FUNCIONS

MCS 2

1. La temperatura T, en graus centígrades, que adquireix una peça sotmesa a un procés ve donada en funció del temps t, en hores, per l'expressió: $T(t) = 40t - 10t^2$, amb $0 \leq t \leq 4$
   a) Representa gràficament la funció T i determina la temperatura màxima que assoleix la peça.
   b) Quina temperatura tindrà la peça transcorreguda 1 hora? Tornarà a tindre eixa mateixa temperatura en algun altre instant?

2. a) Calcula els valors dels paràmetres *a* i *b* per a que la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tinga un extrem relatiu en el punt (−2, 3).
   b) Calcula l'equació de la tangent a la corba $y = x^3 - 4x + 2$ en el seu punt d'inflexió.

3. Siga la funció $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2 & si \quad x < 3 \\ \dfrac{10}{a - x} & si \quad x \geq 3 \end{cases}$
   a) Calcula els valors del paràmetre *a* per als quals *f*(x) és contínua en x = 3.
   b) Per a *a* = 0 calcula els intervals de creixement i decreixement de *f*(x).
   c) Calcula $\int_1^2 f(x)dx$ i interpreta geomètricament el resultad.

4. Es considera la funció $f(x) = \dfrac{2x}{x+5}$.
   a) Raona a què és igual el domini de definició de *f*(x).
   b) Determina els intervals de creixement i decreixement de *f*(x).
   c) Determina els intervals de concavitat i convexitat de *f*(x) i els punts d'inflexió.
   d) Determina els valors de *a* i *b* per als quals l'equació de la recta tangent a la gràfica de *f*(x) en el punt x = −3 siga $y = ax + b$.

5. El servei de traumatologia d'un hospital va a implantar un nou sistema que pretén reduir a curt termini les llistes d'espera. Es preveu que a partir d'ara la següent funció indicarà en cada moment (t, en mesos) el percentatge de pacients que podrà ser operat sense necessitat d'entrar en llista d'espera:
$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & 0 \leq t \leq 10 \\ \dfrac{38t - 100}{0'4t} & t > 10 \end{cases}$$
   (a) A partir de quin moment creixerà aquest percentatge? Per molt de temps que passe, a quin percentatge no aplegarà mai?
   (b) Fes un esbós de la gràfica de *P* al llarg del temps.

6. L'altura en metres, H, que assoleix una pilota llançada verticalment cap a amunt, ve donada en funció del temps en segons per l'expressió: $H(t) = 20t - 2t^2$.
   1) A quina altura haurà aplegat als tres segons?
   2) En quins moments estarà a 32 m d'altura?
   3) Quina és l'altura màxima que assoleix? Quan?

7. Una multinacional ha estimat que anualment els seus ingressos en euros venen donats per la funció $I(x) = 28x^2 + 36000x$, mentre que les seues despeses (també en euros) es poden calcular mitjançant la funció $G(x) = 44x^2 + 12000x + 700000$, on x representa la quantitat d'unitats venudes. Determina:
   a) La funció que defineix el benefici anual en euros.
   b) La quantitat d'unitats que han de ser venudes per a que el benefici siga màxim. Justifica que és màxim.

c) El benefici màxim.

8. Un restaurant obri a les 8 de la nit i tanca quan tots els clients se n'han anat. La funció $C(t) = 60t - 10t^2$ representa el nombre de clients que hi ha en el restaurant en funció del nombre d'hores t que porta obert el restaurant. Es demana:

a) Determina el número màxim de clients que van una determinada nit al restaurant. Justifica que és un màxim.

b) Si desitgem anar al restaurant quan hi haja almenys 50 persones i no més de 80, entre quines hores hauríem d'anar?

9. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & si \quad x \le 0 \\ -1 + 2x & si \quad 0 < x \le 1 \\ -x^2 + 2x & si \quad x > 1 \end{cases}$

1) Representa gràficament *f*.

2) Estudia la seua continuïtat en els punts x = 0 i x = 1.

3) Calcula l'àrea del recinte limitat per la gràfica de *f*, i les rectes x=1/2 i x=3/2.

10. Una companyia d'autobusos interurbans ha comprovat que el número de viatgers (N) diaris depén del preu del bitllet (p) segons l'expressió: N(p) = 300 − 6 p.

1) Dona l'expressió que ens proporciona els ingressos diaris (I) d'eixa companyia en funció del preu del bitllet.

2) Quin ingrés diari s'obté si el preu del bitllet és 15 euros?

3) Quin és el preu del bitllet que fa màxim els ingressos diaris?

4)Quins són eixos ingressos màxims?

11. En una determinada empresa es fabriquen *x* unitats d'un producte, i la funció de benefici ve donada per $B(x) = -x^2 + 12x - 20$

a) Calcula el número d'unitats produïdes *x* que s'han de fabricar per a que no hi haja ni beneficis ni pèrdues.

b) Calcula el número d'unitats *x* que s'han de fabricar per a que el benefici siga màxim. A quant ascendeix eixe benefici màxim?

12. El valor (en milions d'euros) de certa empresa al llarg dels seus cinc anys de funcionament ve donat per l'expressió: $B(t) = 10 - (t - 3)^2$, $0 \le t \le 5$. Determina:

a) En quins anys assoleix eixa empresa els seus valores màxim i mínim?

b) Quins van ser eixos valors màxim i mínim?

13. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & si \quad x \le 0 \\ 2 & si \quad 0 < x \le 1 \\ x^2 - 4x + 5 & si \quad x > 1 \end{cases}$

1) Representa gràficament *f*.

2) Estudia la seua continuïtat en els punts x = 0 i x = 1.

3) Calcula l'àrea del recinte limitat per la gràfica de *f*, els eixos de coordenades i la recta x = 2.

14. La concentració d'ozó contaminant, en micrograms per metre cúbic, en una ciutat ve donada per la funció $C(x) = 90 + 15x - 0{,}6x^2$, on *x* és el temps transcorregut des de l'1 de gener de 1990 comptat en anys.

a) Fins quin any està creixent la concentració d'ozó?

b) Quina és la concentració màxima d'ozó que s'assoleix en eixa ciutat?

15. Donada la següent funció: $f(x)=\begin{cases} -9x+2a-10 & x\le -1 \\ 3x^2-9x+a-3 & -1<x\le 2 \end{cases}$

a) Determina *a* per a que la funció *f*(*x*) siga contínua.
b) Calcula l'àrea del recinte fitat determinat per la funció obtinguda en l'apartat anterior, l'eix OX i les rectes $x = -1$ i $x = 1$.

16. Una empresa de lloguer de cotxes ens ofereix la possibilitat de triar entre dues tarifes:
A: 20 € per dia més 0,2 € per quilòmetre recorregut. B: 40 € per dia.

a) Per a cada una de les dues tarifes, expressa el cost del lloguer en funció del número t de dies de duració del viatge i del quilometratge x.
b) Si s'han fet 1000 km en 8 dies, a quina tarifa convé acollir-se? I si el viatge de 1000 km ha de durar 12 dies?
c) Si hem de fer 1000 km, per a quina duració del viatge el cost és el mateix amb les dues tarifes? Explica quina tarifa interessa triar en funció del número de dies que dura el viatge.

17. En els estudis epidemiològics realitzats en una determinada població s'ha descobert que el número de persones afectades per certa malaltia ve donat per la funció: $f(x)=-3x^2+72x+243$, sent x el número de dies transcorreguts des que es va detectar la malaltia. Determina:

a) El número de dies que han de transcorre fins que desaparega la malaltia.
b) El número màxim de persones afectades.
c) Els intervals de creixement i decreixement de la malaltia.

18. Donada la funció $f(x)=\begin{cases} 2x+5 & x\le -2 \\ x^2+2x+1 & -2<x\le 0 \\ x^2+1 & 0<x\le 2 \\ 3x+1 & 2<x \end{cases}$

Estudia la seua continuïtat i la seua derivabilitat en tot R.

19. Es compra un equip industrial en 1990 (x = 0) i se sap que genera uns ingressos de $R(x)=6125-\frac{125}{4}x^2$ (milers d'euros anuals) x anys després de comprat.
Al mateix temps, els costos de funcionament i manteniment són $C(x) = 2000 + 10x^2$ milers d'euros.

a) Representa les gràfiques de les funcions R(x) i C(x).
b) Durant quants anys va ser rendible l'equip?
c) En quin any el benefici va ser màxim i a quant va ascendir el mateix?

20. Calcula *a, b, c* i *d* per a que siga contínua la funció *f*(x) i representa-la gràficament.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x & si \quad x<2 \\ 3x-a & si \quad 2\le x<3 \\ b & si \quad 3\le x<5 \\ -x+c & si \quad 5\le x<7 \\ d & si \quad 7\le x \end{cases}$$