DERIVADES

MCS 2

1. a) Calcula els valors dels paràmetres *a* i *b* per a que la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tinga un extrem relatiu en el punt (−2, 3).
   b) Calcula l'equació de la tangent a la corba $y = x^3 - 4x + 2$ en el seu punt d'inflexió.

2. Siga la funció $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2 & si \quad x < 3 \\ \dfrac{10}{a - x} & si \quad x \geq 3 \end{cases}$

   a) Calcula els valors del paràmetre *a* per als quals *f*(x) és contínua en x = 3.
   b) Per a *a* = 0 calcula els intervals de creixement i decreixement de *f*(x).
   c) Calcula $\int_1^2 f(x)dx$ i interpreta geomètricament el resultat.

3. Siga $f(x) = xe^{-ax}$, amb *a* un paràmetre real.
   a) Calcula els valors del paràmetre *a* per a que *f*(x) tinga un màxim o un mínim en x=3. Per a eixos valors del paràmetre digues si x=3 és màxim o mínim.
   b) Per a *a* = −2 escriu els intervals de creixement, decreixement, concavitat i convexitat de *f*(x).

4. Es considera la funció $f(x) = \dfrac{2x}{x+5}$.
   a) Raona quin és el domini de definició de *f*(x).
   b) Determina els intervals de creixement i decreixement de *f*(x).
   c) Determina els intervals de concavitat i convexitat de *f*(x) i els punts d'inflexió.
   d) Determina els valors de *a* i *b* per a que l'equació de la recta tangent a la gràfica de *f*(x) en el punt x = −3 siga *y* = *ax* + *b* .

5. Es considera la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$, amb *a* i *b* paràmetres reals.
   a) Existeixen valors de *a* i *b* per als quals *f*(x) tinga un màxim en x = 1 i un mínim en x = −1?
   b) Determina els valors de *a* i *b* per als quals *f*(x) tinga un punt d'inflexió en (2,1).
   c) Per a *a* = *b* = −2, calcula $\int_1^2 f(x)dx$.

6. Una cadena de televisió ha presentat un nou programa per a la franja de les 11 a les 15 hores. El share o percentatge d'audiència de la primera emissió va vindre donat per la següent funció, on S(t) representa el share en el temps t, en hores. Per a que el programa continue emetent-se el share ha hagut d'aplegar en algun moment al 30 %

$S(t) = -t^3 + 36t^2 - 420t + 1596, \quad 11 \le t \le 15$

(a) Indica quan va créixer el share i quan va decréixer. El programa seguirà emetent-se?

(b) Dibuixa la gràfica del share.

7. El servei de traumatologia d'un hospital va a implantar un nou sistema que pretén reduir a curt termini les llistes d'espera. Es preveu que a partir d'ara la següent funció indicarà en cada moment (t, en meses) el percentatge de pacients que podrà ser operat sense necessitat d'entrar en llista d'espera: $P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & 0 \le t \le 10 \\ \dfrac{38t - 100}{0'4t} & t > 10 \end{cases}$

(a) A partir de quin moment creixerà aquest percentatge? Per molt de temps que passe, a quin percentatge no aplegarà mai?

(b) Fes un esbós de la gràfica de *P* al llarg del temps.

8. (a) Donada la funció $f(x) = \dfrac{a}{x} + 3x^2 - x^3$, troba *a* per a que si f' és la derivada de *f*, aleshores $f'(-1) = -10$.

(b) Dibuixa la funció $f(x) = 3x^2 - x^3$. Troba l'àrea limitada per la corba i l'eix X entre x = −1 i x = 2.

9. Descompon el número 81 en dos sumands positius de manera que el producte del primer sumand pel quadrat del segon siga màxim.

10. Donada la funció $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$, calcula, quan existesquen:

a) Les asímptotes verticals i les horitzontals.

b) Els intervals de creixement i de decreixement.

c) Els màxims i mínims relatius.

11. Siga la funció $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$. Determina:

a) Domini de definició.

b) Asímptotes si existeixen.

c) Intervals de creixement i decreixement de la funció, així com els seus màxims i mínims.

d) Àrea tancada per: *f*(x), la recta x = 5 i la funció $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

12. La suma de tres números positius és 60. El primer més el doble del segon més el triple del tercer sumen 120. Calcula els números que verifiquen aquesta condició i que el seu producte és màxim.

13. L'altura en metres, H, que assoleix una pilota llançada verticalment cap a amunt, ve donada en funció del temps en segons per l'expressió: $H(t) = 20t - 2t^2$.

1) Quina altura haurà assolit als tres segons?
2) En quins moments estarà a 32 m d'altura?
3) Quina és l'altura màxima que assoleix? Quan?

14. Una companyia d'autobusos interurbans ha comprovat que el número de viatgers (N) diaris depén del preu del bitllet (p) segons l'expressió: $N(p) = 300 - 6p$.

1) Dona l'expressió que ens proporciona els ingressos diaris (I) d'eixa companyia en funció del preu del bitllet.
2) Quin ingrés diari s'obté si el preu del bitllet és 15 euros?
3) Quin és el preu del bitllet que fa màxim els ingressos diaris?
4) Quins són eixos ingressos màxims?

15. Sabem que la funció $f(x) = ax^2 + bx$ té un màxim en el punt (3, 8).

a) Calcula els valors de *a* i *b*.
b) Per a eixos valors, calcula l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en el punt d'abscissa 0

16. Considera la funció $f(x) = \frac{x^3}{30} - 15x^2 + 2500$.

a) Calcula l'equació de la recta tangent en el punt d'abscissa x = 0.
b) En quin punt de la corba és mínim el pendent de la recta tangent? Quin és el valor del pendent mínim?

17. Es vol construir una piscina que tinga per base un rectangle i dos semicercles adjacents. Sabent que el perímetre de la piscina ha de ser de 30 m, calcula les seues dimensions per a que la seua superfície siga màxima.

18. En els estudis epidemiològics realitzats en una determinada població s'ha descobert que el número de persones afectades per certa malaltia ve donat per la funció: $f(x) = -3x^2 + 72x + 243$, sent x el número de dies transcorreguts des que es va detectar la malaltia. Determina:

a) El número de dies que han de transcórrer fins que desaparega la malaltia
b) El número màxim de persones afectades.
c) Els intervals de creixement i decreixement de la malaltia

Justifica la resposta.

19. Un professor ha comprovat que el grau d'atenció (puntuat de 0 a 100) que li presten els seus alumnes durant els 40 minuts de duració de la seua classe segueix la funció:
$F(t) = \alpha t(\beta - t)$ amb $0 \le t \le 40$
Sabent que als 20 minuts de començar la classe li presten la màxima atenció, és a dir, el grau d'atenció és 100, ses demana:

a) Determina, justificant la resposta, α i β.
b) Representa la funció obtinguda.

20. El grau d'estrés (puntuat de 0 a 10) durant les 8 hores de treball de cert agent de borsa ve donat a través de la funció: $f(t) = \dfrac{-2t(t-10)}{5}, \quad 0 \le t \le 8$

a) En quin instant de la seua jornada de treball el grau d'estrés és màxim?
b) Representa la funció anterior.

21. El valor (en milions d'euros) de certa empresa al llarg dels seus cinc anys de funcionament ve donat per l'expressió: $B(t) = 10 - (t - 3)^2$, $0 \le t \le 5$.
Determina:

a) En quins anys va assolir eixa empresa els seus valors màxim i mínim?
b) Quins van ser eixos valors màxim i mínim?

Justifica las respostes.

22. La funció de cost total de producció de x unitats d'un determinat producte és $C(x) = \dfrac{x^3}{100} + 8x + 20$.

a) Es defineix la funció de cost mitjà per unitat com $Q(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, quantes unitats x_0 cal produir per a que siga mínim el cost mitjà per unitat?
b) Quina relació existeix entre $Q(x_0)$ i $C'(x_0)$?

23. Una malaltia es propaga de tal forma que, després de t setmanes afecta a N(t) centenars de persones, on
$$N(t) = \begin{cases} 5 - t^2(t-6) & per\ a\ 0 \le t \le 6 \\ -\frac{5}{4}(t-10) & per\ a\ 6 < t \le 10 \end{cases}$$

a) Estudia el creixement i decreixement de N(t). Calcula el màxim de persones afectades i la setmana en la que es presenta eixe màxim. Calcula també la setmana en la que es presenta el punt d'inflexió i el número de persones afectades.
b) A partir de quina setmana la malaltia afecta a 250 persones com a màxim?

24. Els beneficis (en milions d'euros per any) estimats per a una empresa s'ajusten a la següent funció: $B(x)=\frac{5x}{x^2+4},\quad x\geq 0$; on B representa els beneficis de l'empresa i x els anys transcorreguts des del moment de la seua constitució (x = 0).

a) Determina els intervals de creixement i decreixement de B(x). Quina informació ens dóna sobre l'evolució dels beneficis al llarg del temps?

b) Al cap de quant de temps obté l'empresa el màxim benefici? Quin és eixe benefici màxim?

25. Es considera la funció real de variable real definida per $f(x)=\frac{x^3}{a}-ax^2+5x+10$, amb $a\neq 0$.

(a) Obtén els valors de *a* per als quals la funció *f*(x) té un màxim en x =1.

(b) Calcula els extrems relatius de *f*(x) per a *a* = 3 i representa la funció.

26. Es considera la funció real de variable real definida per $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}$

(a) Determina el seu domini de definició.

(b) Calcula les seues asímptotes.

27. Es compra un equip industrial en 1990 (x = 0) i se sap que genera uns ingressos de $R(x)=6125-\frac{125}{4}x^2$ (milers d'euros anuals) x anys després de comprat.

Al mateix temps, els costos de funcionament i manteniment són *C*(*x*) = 2000 +10x^2 milers d'euros.

a) Representa les gràfiques de les funcions R(x) i C(x).

b) Durant quants anys va ser rendible l'equip?

c) En quin any el benefici va ser màxim i a quant va ascendir el mateix?

28. Siguen les funcions $f(x)=x^2-2x-8$; $g(x)=-\frac{x^2}{2}+x+4$

(a) Calcula $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{g(x)}$.

(b) Calcula l'àrea del recinte limitat per les corbes *f*(x) i *g*(x).

29. Determina les condicions més econòmiques d'una piscina oberta a l'aire, de volum 32 m3 amb un fons quadrat, de manera que la superfície de les seues parets i del sòl necessite la quantitat mínima de material.

30. Donada la corba: $y = \frac{x}{x^2 - 1}$, es demana:

   a) Domini i asímptotes.
   b) Simetries i talls amb els eixos.
   c) Intervals de creixement i decreixement.
   d) Màxims i mínims, si n'hi ha.
   e) Una representació aproximada de la mateixa.

31. La funció $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ passa pel punt (−1, 0) i té un màxim en (0,4). Calcula:

   i) La funció.
   ii) El mínim.
   iii) El punt d'inflexió.

32. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & x \le -2 \\ x^2+2x+1 & -2 < x \le 0 \\ x^2+1 & 0 < x \le 2 \\ 3x+1 & 2 < x \end{cases}$

   Estudia la seua continuïtat i la seua derivabilitat en tot R.

33. Sabent que la gràfica de la derivada de la funció f és la paràbola amb vèrtex en (0, −1) que passa pels punts (−1, 0) i (1, 0), estudia raonadament el creixement, la concavitat, els màxims, els mínims i els punts d'inflexió de f.