GEOMETRIA A L'ESPAI

MAT 2

1.- Calcula el punt mitjà dels segment d'extrems A(2,-1,3) i B(6,3,7)

2.- Divideix el segment d'extrems A(3,-3,-6) i B(7,5,10) en quatre parts iguals.

3.- Si $B=\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\}$ base de V^3 i $B'=\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}$ / $\begin{cases}\overrightarrow{v_1}=3\overrightarrow{u_1}+2\overrightarrow{u_2}-\overrightarrow{u_3}\\ \overrightarrow{v_2}=4\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_3}\\ \overrightarrow{v_3}=2\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_3}\end{cases}$

a) Demostra que B' també és base de V^3

b) Calcula en la base B' les coordenades dels vectors $\vec{x}(1,2,3)_B$ i $\vec{y}(1,0,-1)_B$

c) Calcula en la base B les coordenades del vector $\vec{z}(-1,0,1)_{B'}$

4.- Siguen els conjunts de vectors

$B=\{\overrightarrow{u_1}(1,1,1),\overrightarrow{u_2}(2,1,-1),\overrightarrow{u_3}(1,0,5)\}$ i $B'=\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}$ / $\begin{cases}\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}\\ \overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_3}\\ \overrightarrow{v_3}=\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_3}\end{cases}$

a) B és base de V^3?

b) B' és base de V^3?

5.- Calcula els cosinus directors del vector (-3,1,4).

6.- Troba l'angle que formen les forces $\vec{f_1}(2,3,4)N$ i $\vec{f_2}(1,5,2)N$ i calcula el treball realitzat per la força $\vec{f_1}+\vec{f_2}$ en desplaçar un objecte entre dos punts units pel vector $\vec{d}(2,3,6)$

7.- Donats $\vec{u}(1,3,0)$ i $\vec{v}(4,-1,3)$ en una base ortonormal, calcula:

a) $\vec{u}\times\vec{v}$

b) dos vectors perpendiculars a $\vec{u}$ i $\vec{v}$

c) àrea del triangle de costats $\vec{u}$ i $\vec{v}$

8.- Donats $\vec{u}(2,-3,0)$ i $\vec{v}(1,-4,1)$ en una base ortonormal, calcula un vector unitari i perpendicular a $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

9.- Donats els punts A(1,0,2) i B(-3,1,-1), calcula les coordenades del punt mig del segment AB.

10.- Escriu totes les equacions dels tres eixos de coordenades.

11.- Equacions dels tres plans coordenats.

12.- Expressa, mitjançant intersecció de dos plans, la recta: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{5}$

13.- Expressa en forma contínua la recta: $\begin{cases} 2x-y+7=0 \\ x-y+3z=4 \end{cases}$

14.- Equació de la recta que és paral·lela a $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-2}$ i que a més es recolza en les rectes: $\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{1}$ i $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{4}$

15.- Calcula l'equació general del pla que talla els eixos en punts que disten "a" unitats de l'origen de coordenades.

16.- Estudia, segons el valor de a, la posició de: $ax+(a-1)y+z=0$ i la recta $\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=-t \end{cases}$

17.- Escriu una condició necessària i suficient perquè el pla $Ax+By+Cz+D=0$ passe per l'origen.

18.- Comprova que és condició necessària i suficient per a que els punts P(a,b,c) i P'(a',b',c') estiguen alineats amb l'origen, que les seues coordenades siguen proporcionals.

19.- En l'espai, considerem els punts A(m,2,-3), B(2,m,1) i C(5,3,-2)

a) Si m=0, demostra que A,B i C no estan alineats i calcula el pla que els conté.
b) Calcula m perquè estiguen alineats i l'equació de la recta que els conté.

20.- Calcula el valor d'α perquè les rectes r: $\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ -x+2y+3z=3 \end{cases}$ i s: $\begin{cases} -2x+y+z=-1 \\ x-y-z=\alpha \end{cases}$ es tallen en un punt. Per a eixe valor de α, calcula l'equació del pla que les conté.

21.- Calcula l'angle que formen el pla $2x+y-z=0$ amb la recta $\begin{cases} x+3y-z=-3 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$

22.- Calcula la distància entre els plans $x+y+z=3$ i $2x+2y+2z=5$

23.- Calcula l'àrea del polígon determinat pels punts: A(1,2,-3), B(0,3,0), C(-1,2,1) i D(2,0,7).

24.- Projecció ortogonal del punt P(1,3,7) sobre el pla $x+2y+3z=0$.

25.- Calcula el pla π que passa per A(0,0,3), B(2,0,-3) i C(2,-2,0). Calcula també l'àrea del triangle de vèrtexs els punts d'intersecció de π amb els eixos de coorenades.

26.- Siga r_1 la recta que passa pels punts A(0, 0, 0) i B(80, 10, 0) i siga r_2 la recta que passa per C(0, 0, 10) i D(m, 10,10).
Calcula la distància entre r_1 i r_2. Justifica geomètricament que la distància entre r_1 i r_2 és independent del valor de m.

27.- Calcula la distància del punt (0, 0, 10) al pla que passa pels punts (0, 0, 1), (4, 2, 7) i (4, 0, 3)

28.- D'un paral·lelogram ABCD se sap que A(3, 4, 0), B(4, 3, 0), que les dues coordenades del vèrtex C són positives i que tant la diagonal AC com el costat BC mesuren 5. Calcula les coordenades de C i de D.

29.- Calcula el volum d'un paral·lelepípede de bases ABCD i EFGH, sabent que A(8, 0, 0), B(0, 8, 0), C(0, 0, 8) i E(8, 8, 8). Calcula també les coordenades dels restants vèrtexs.

30.- Siga r_1 la recta que passa pels punts A(1, 0, 2) i B(0, 1, 3), i siga r_2 la recta que passa per C(0, 3, 0) i D(1, 2, 1). Justifica si r_1 i r_2 es creuen o no. Calcula la distància entre r_1 i r_2.

31.- Les bases d'un paral·lelepípede són ABCD i EFGH, on sabem A(2, 3, 1), B(3, 4, 1), C(2, 7, 1) i E(8, 0, 0). Es demana:

a) Coordenades de D, F, G i H
b) Volum del paral·lelepípede
c) Altura del paral·lelepípede.

32.- Suposem que el sistema de referència OXYZ té l'eix OZ vertical, i el pla OXY és horitzontal. Es considera la vareta vertical d'extrems A(2, 1, 0) i B(2, 1, 12). En dos moments determinats del dia l'ombra que projecta A sobre el pla OXY coincideix amb els punts (7, 0, 0) i (0, 6, 0). Calcula:

a) Equacions de la recta que descriu l'ombra de A al llarg del dia.
b) La longitud més curta de l'ombra al llarg del dia.

33.- Calcula la distància mínima entre dues partícules A i B amb posicions: $(x_A, y_A, z_A) = t(1,2,0)$ i $(x_B, y_B, z_B) = (2,-4,7) + t(-2,3,0)$, essent t el temps en segons.

Calcula la mínima distància entre les rectes r i s:

$r: (x,y,z) = t(1,2,0)$ s: $s: (x,y,z) = (2,-4,7) + t(-2,3,0)$

Justifica la no coincidència dels dos resultats anteriors.

34.- Determina raonadament si el pla que passa pels punts (0, 0, 1), (1, 1, -1) i (2, -1, 0) té, o no, punts en comú amb el pla que passa per (3, 2, -4), (-3, -3, 7) i (2, 2, -3)