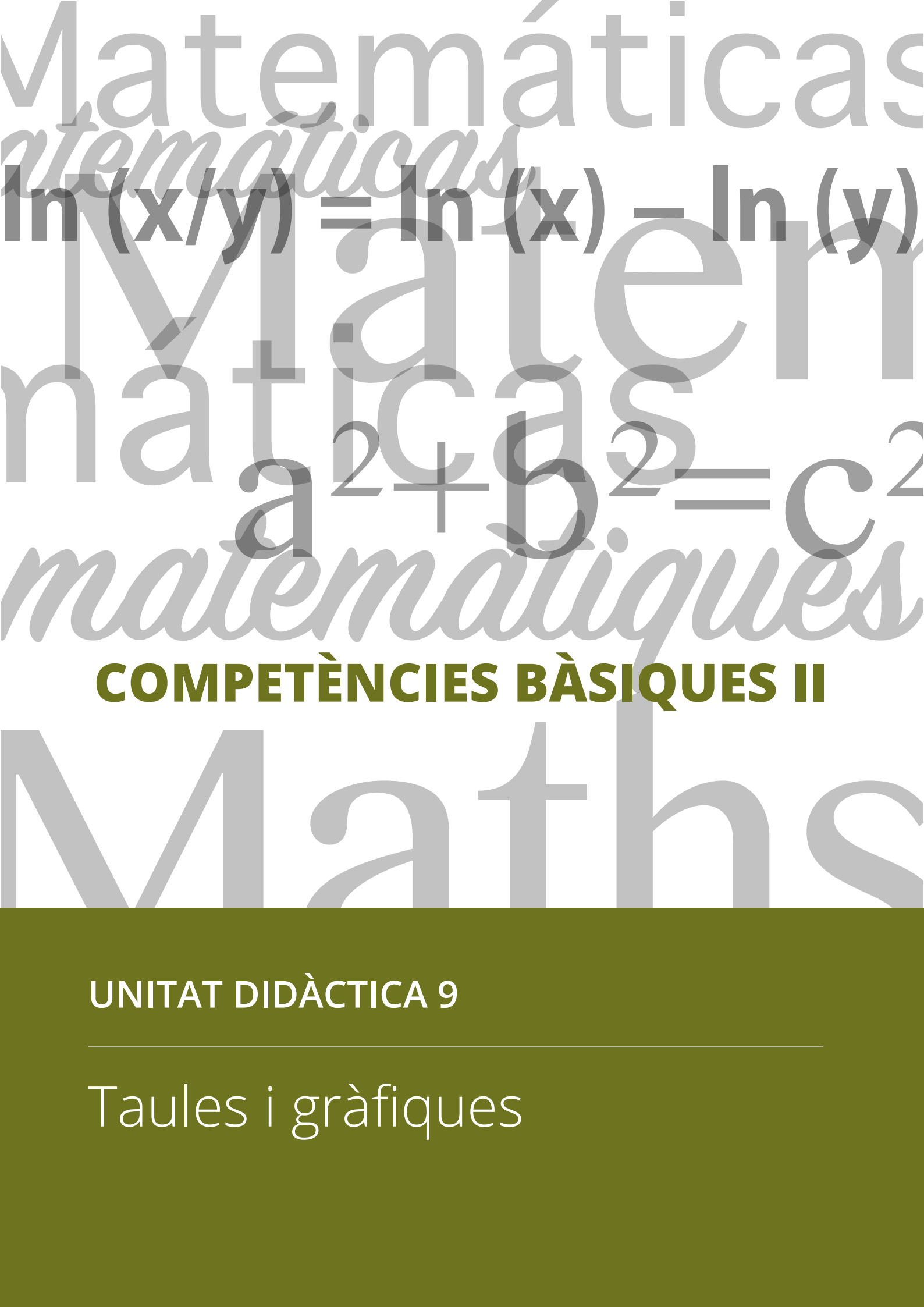
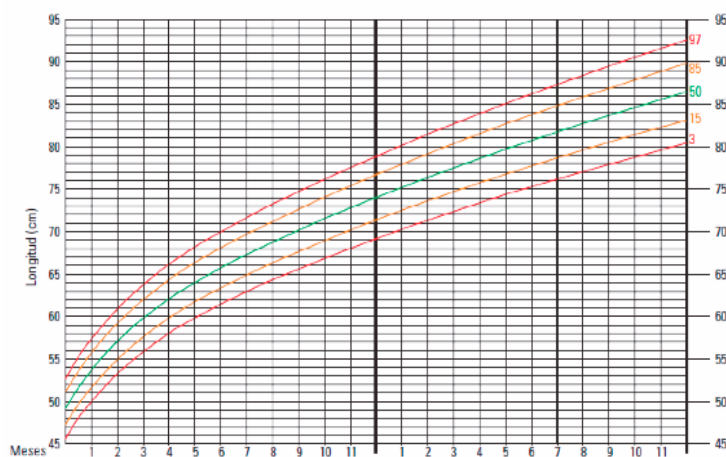




COMPÉTÈNCIES BÀSIQUES II

UNITAT DIDÀCTICA 9

Taules i gràfiques



La meua xiqueta!

Núria i Josep han sigut pares fa dos mesos d'una xiqueta. Han d'anotar a la taula de creixement la dada d'altura de 58 cm

On ha de posar-la?

El metge ha calculat que la xiqueta mesurarà 88 cm quan tinga 2 anys. Va tot bé?

En aquesta unitat es mostren estratègies i eines perquè:

- Formules models matemàtiques que resolguen problemes reals del món dels negocis, les ciències i la societat.
- Interpretes correctament les informacions que ens aporten les seues gràfiques que estan presents en els manuals tècnics de qualsevol branca professional.

Has de repassar:

- La representació en la recta numèrica de nombres enters.

Índex

1. Introducció
2. Coordenades en el pla cartesià
3. Taules de valors i representació gràfica
4. Funcions

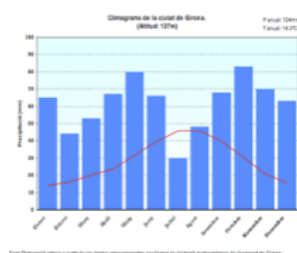
1. Introducció

En els mitjans de comunicació és comú trobar-se amb gràfics per a explicar notícies referides a assumptes econòmics i socials. Alguns exemples són els gràfics referides als aturats de llarga durada, l'evolució de la intenció de vot, la popularitat del president del govern, el grau de satisfacció dels ciutadans sobre un fet concret, etc. També tenim taules per a saber la talla de roba, les kilocalories que aporta cada aliment, taules que relacionen el temps amb l'espai recorregut, taules per a determinar la posició d'un objecte sobre una superfície, etc. Els gràfics s'utilitzen en les Ciències per a representar fenòmens i relacionar els valors de diverses magnituds.

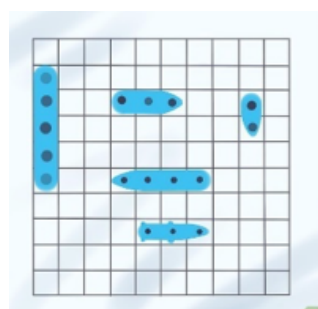
El sistema de representació es deu al filòsof, matemàtic i físic francès René Descartes, també anomenat en escriptura llatina *Renatus Cartesius*.



On apareixen les proporcionalitats?



Fuente: Estadística oficial a partir de los datos proporcionados por el Ayuntamiento de Girona.



GUIA DE TALLS			
EUR	PIT	CINTURA	MALUCS
S	100	82	106
M	106	88	112
L	112	94	118
XL	118	100	124
XXL	122	104	128

ACTIVITAT	DESPESES ENERGÈTICA EN kJ PER kg I MINUT
Fer el llit	0,239 kJ
Menjar	0,260 kJ
Llegir, estudiar...	0,117 kJ
Baixar escales	0,407 kJ
Pujar escales	1,070 kJ
Anar amb bicicleta	0,504 kJ
Caminar a 5 km/h	0,420 kJ
Córrer a 8-10 km/h	0,634 kJ
Nedar	0,726 kJ
Jugar a futbol	0,575 kJ
Jugar a bàsquet	0,588 kJ
Passejar	0,160 kJ
Esquiar	0,639 kJ

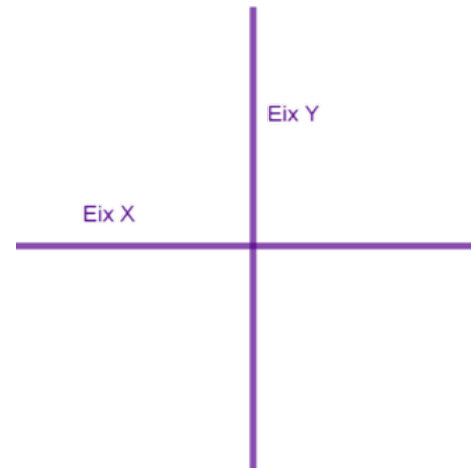
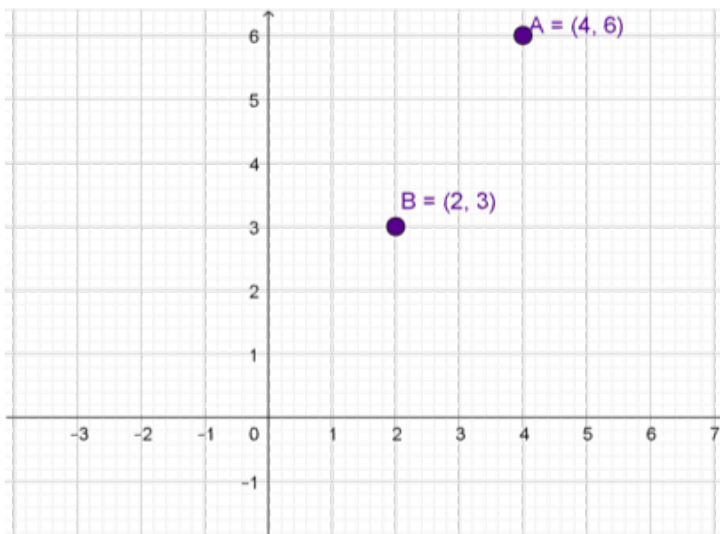
2. Coordenades en el pla cartesià

Els eixos cartesianes o eixos de coordenades són dues rectes perpendiculars.

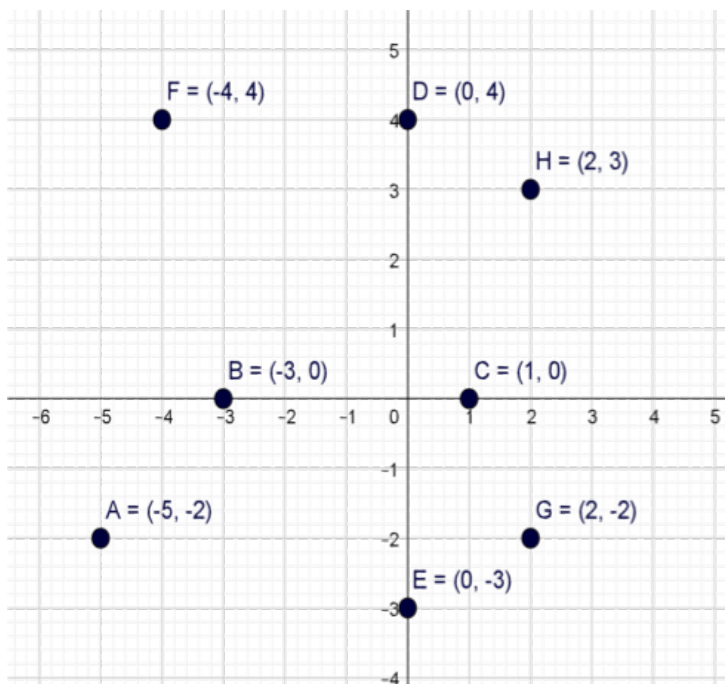
L'eix horitzontal s'anomena eix X o eix d'abscisses i

l'eix vertical s'anomena eix Y o eix d'ordenades.

El punt O, on es tallen els dos eixos, s'anomena origen de coordenades. Aquests eixos i el punt O formen un sistema de



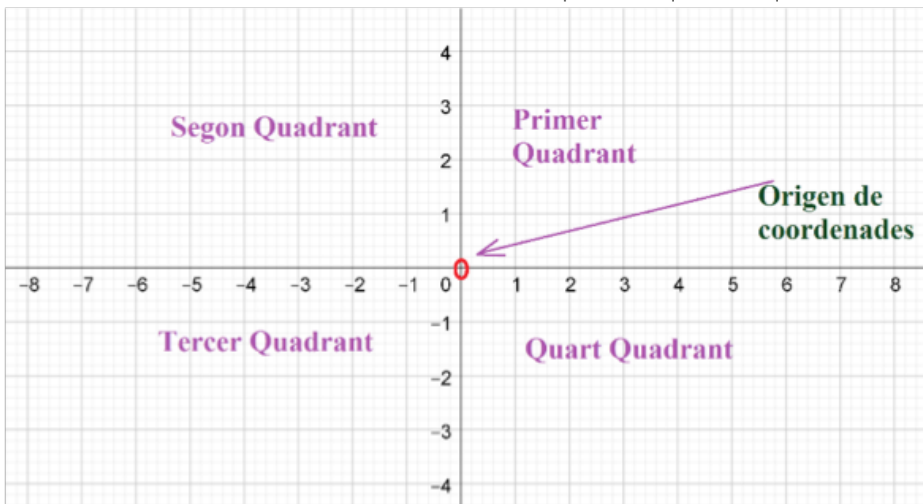
referència cartesià. Cada punt del pla es designa per dues coordenades: la coordenada corresponen a l'eix X i la coordenada corresponen a l'eix Y, sempre en aquest ordre. Els punts es designen amb lletres majúscules: A, B, C, etc.



L'origen de coordenades té coordenades (0,0). Hem representat els punts A=(4,6) i B=(2,3).

En un punt, la primera coordenada indica les unitats que ens desplacem a l'esquerra (si el nombre és negatiu) o a la dreta (si el nombre és positiu), partint de l'origen de coordenades. La segona coordenada ens indica les unitats que ens desplacem cap a dalt (si el nombre és positiu) o cap a baix (si el nombre és negatiu) partint de l'origen de coordenades. Els punts sobre l'eix X sempre tenen ordenada igual a 0. Els punts sobre l'eix Y sempre tenen abscissa igual a 0.

Els eixos de coordenades divideixen el pla en quatre quadrants.



El punt de coordenades $(-5,-2)$ està en el tercer quadrant.

Activitats proposades

1. Representa els punts següents:

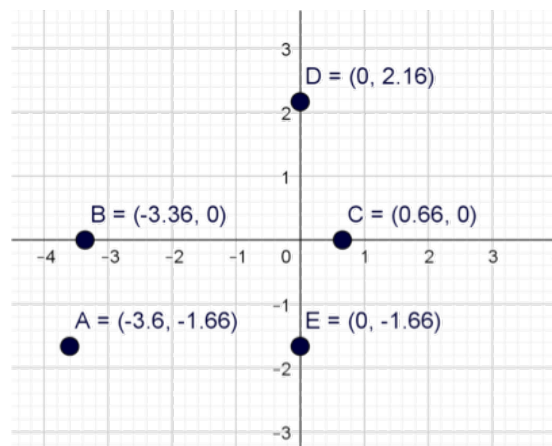
$A=(0,5)$, $B=(1,-1)$, $C=(4,-3)$, $D=(-1,0)$, $E=(0,-2)$, $F=(-4,-1)$

2. Representa els punts següents:

$A=(0,2)$, $B=(2,0)$, $C=(4,0)$, $D=(6,2)$, $E=(4,4)$, $F=(2,4)$

Si uneixes els punts, quina figura obtens?

També es poden representar punts que tinguin coordenades decimals. En aquest cas per a evitar confusió, sol emprar-se el signe “,” per a separar l’abscissa i l’ordenada. Per exemple, $(-3,6;-1,66)$.



Activitat proposada

3. Representa els punts següents:

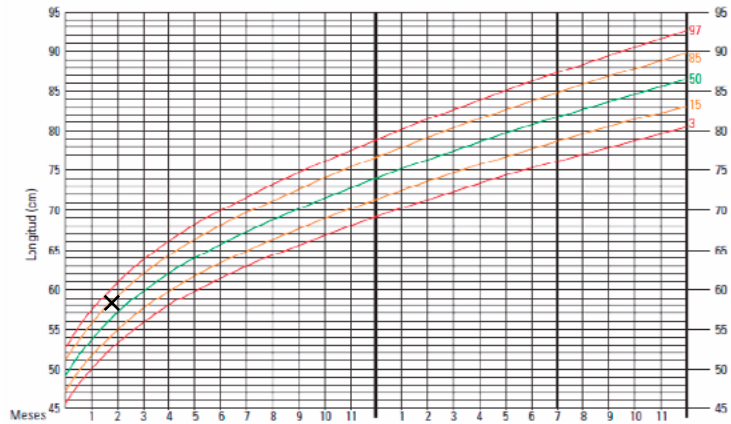
$A=(3,5;0,5)$, $B=(-2,5;-4)$, $C=\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$

3. Taules de valors i representació gràfica

Tornant al problema inicial

Núria i Josep han sigut pares fa dos mesos d'una xiqueta. Han d'anotar a la taula de creixement la dada d'altura de 58 cm. On ha de posar-la? El metge ha calculat que la xiqueta mesurarà 88 cm quan tinga 2 anys. Va tot bé?

A l'eix horitzontal es representen els mesos i a l'eix vertical l'altura. Per tant, hem de representar el punt (2,58).



Tot va bé, perquè la dada queda per damunt de la corba del percentil 50 (color verd) que per a 12 mesos indica 87 cm aproximadament.

Una taula de valors és una taula en la qual situem ordenadament les quantitats corresponents de dues magnituds relacionades. Es poden col·locar de manera horitzontal o vertical.

Exemple

Quan viatgem a velocitat constant, les magnituds espai i temps són directament proporcionals.

Dades:

Temps (h)	1	2	3	4
Espai (Km)	80	160	240	320

La raó de proporcionalitat de les magnituds espai i temps és

$$k = \frac{80}{1} = \frac{160}{2} = \frac{240}{3} = \frac{320}{4}$$

que és la velocitat, és a dir, **80 km/h**.

En una tenda d'Aiora venen mel per 7 € el kg.

La venen en envasos de 125 g, 250 g, 500 g, 750 g i 1000 g. S'afegeix el preu de l'envàs que és de 50 cèntims. La taula de valors següent relaciona el pes de la mel amb el seu preu i inclou el preu de l'envàs.

Massa (g)	125	250	500	750	1000
Preu (€)	1,375	2,25	4	5,75	7,5

Una gràfica o representació gràfica de la taula de valors és la representació del conjunt de punts corresponents a parells de dades de la taula de valors. D'aquesta manera poden visualitzar la relació que existeix entre aquestes magnituds. També a partir de la gràfica podem construir la taula de valors.

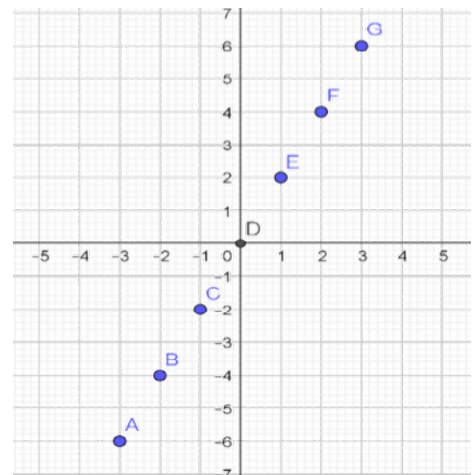
Exemples:

Considerem la taula de valors:

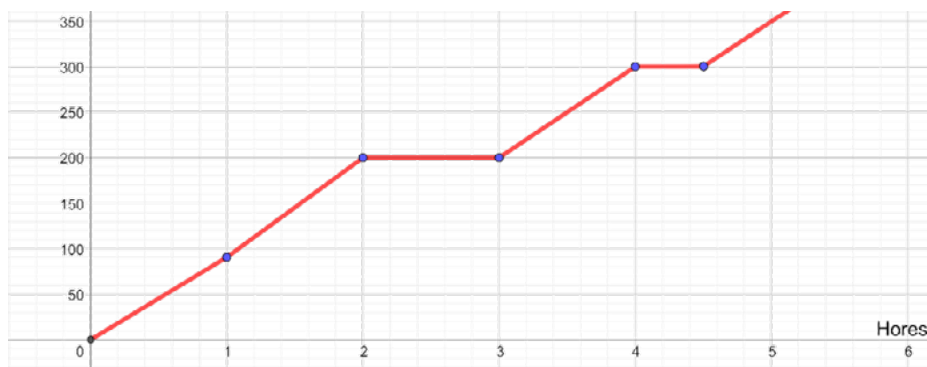
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-6	-4	-2	0	2	4	6

La gràfica d'aquesta taula conté els punts:

$A=(-3,-6)$, $B=(-2,-4)$, $C=(-1,-2)$, $D=(0,0)$, $E=(1,2)$, $F=(2,4)$ i $G=(3,6)$.



La gràfica següent descriu el viatge realitzat amb cotxe per Àngels des de Torrevella a Morella

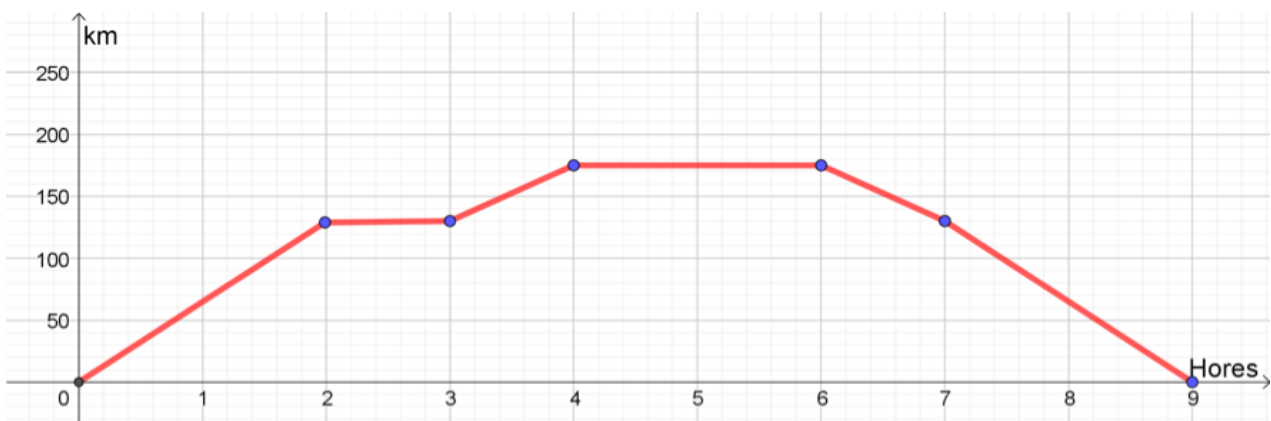


Podem deduir a partir de la gràfica que:

- Ha recorregut 400 km en 5 h 30 min.
- Ha fet dues parades, una a les dues hores d'una durada d'una hora i l'altra de mitja hora després de passar 4 hores des de l'eixida.
- En la primera hora ha recorregut 90 km i en la segona 110 km.
- Després de la primera parada ha recorregut 100 km i després de la segona parada ha recorregut 100 km més.
- Va més ràpid en la segona hora.

Activitat proposada

4. La gràfica següent correspon a un viatge d'anada i volta des de Morella fins a Ademús passant per Terol. Segons la gràfica, a) quantes hores està parat? b) Quants quilòmetres recorre abans de la primera parada? c) A quina hora està més allunyat del punt d'eixida si va començar el viatge a les sis del matí? d) Quantes hores ha estat en Terol?

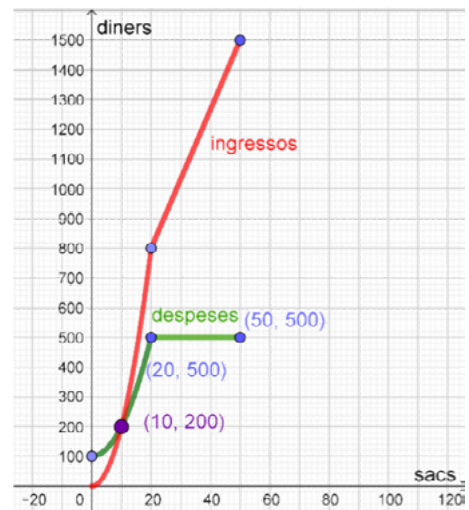


Activitat resolta

Pere té un negoci de venda de sacs de creïlles a domicili. Els ingressos (roig) i les despeses (verd) es poden veure en el gràfic següent:

- A partir de quin nombre de sacs venuts comença a obtenir beneficis?
- Perd si només ven 15 sacs?
- Quant guanya si ven 20 sacs?
- Quant guanya si ven 50 sacs?

Fixa't que hem representat a l'eix horitzontal el nombre de sacs i a l'eix vertical els diners.



Solució

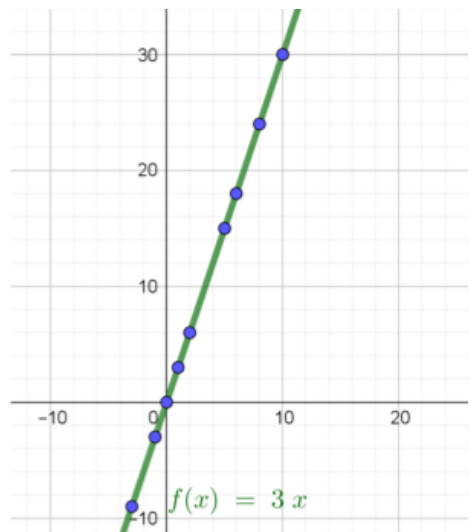
- A partir de 10 sacs, perquè per a 10 sacs els ingressos són iguals a les despeses.
- Sí, perquè la gràfica d'ingressos queda per davant de la de despeses.
- Ingressos-despeses=800-500=300 €.
- Ingressos-despeses=1500-500=1000 €.

4. Funcions

Les funcions són com màquines que transformen un valor x en altre valor y . Per exemple, poden considerar la funció que fa el triple i així, obtenim la taula següent:

x	-3	-1	0	1	2	5	6	8	10
y	-9	-3	0	3	6	15	18	24	30

Matemàticament, expressem $y=3x$. També, s'escriu $y=f(x)=3x$, doncs, la variable y està en funció de la variable x . La variable x , s'anomena variable independent i la variable y s'anomena variable dependent. Els punts de la taula es representen i després s'uneixen.



Activitat resolta

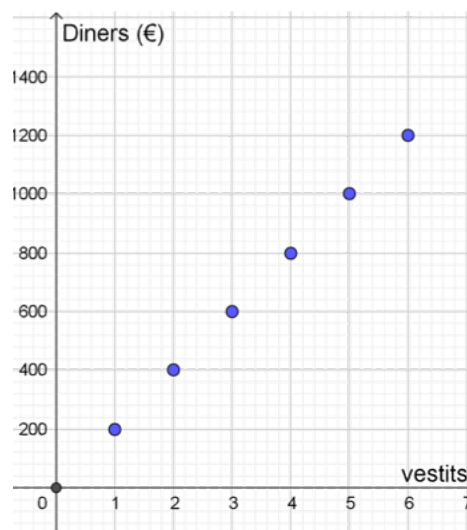
Laura cobra per vestits cosits. Per cada vestit que fa, li paguen 200 €. Per tant, els diners que guanya estan en funció del nombre de vestits que faça. Construeix una taula de valors, representa els punts i expressa mitjançant una fórmula els diners que guanya en funció dels vestits cosits.

Solució

Vestits x	0	1	2	3	4	5	6
Diners (€) y	0	200	400	600	800	1000	1200

Si fa x vestits, aleshores cobra el resultat de multiplicar 200 per x . Podem anomenar y a la quantitat de diners que guanya i escrivim $y=200x$.

Representem els punts de la taula, però, en aquest cas, no té sentit unir els punts perquè si fa mig vestit no cobra res.



Activitat proposada

5. En una autoescola el preu de la matrícula és de 150 € i el preu d'una classe és de 20 €. Si he necessitat 15 classes per a obtenir el carnet, quant he pagat en total? Construeix una taula de valors, representa els punts i expressa mitjançant una fórmula el cost total en funció del nombre de classes.

Situació amb medicaments

Tenim un medicament líquid amb una concentració de 100 mg/ml. Això vol dir que en cada ml hi ha 100 mg de medicament. El prospecte ens indica que la dosi recomanada és de 15 mg per kg de pes del xiquet cada 6 hores. Per tant, si un xiquet té un pes de 15 kg, aleshores la quantitat serà 225 mg.

mg		ml
100	→	1
225	→	z

Fixa't que 225 mg corresponen a 2,25 ml, atès que es tracta d'una regla de tres simple directa. D'aquesta forma tenim la taula,

kg	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ml	1,5	1,65	1,8	1,95	2,1	2,25	2,4	2,55	2,7	2,85	3

Hem multiplicat els quilograms per 15 i després hem dividit entre 100.

Ara generalitzem. Anomenem x a la variable quilograms del xiquet i considerem la funció $f(x)$ que és la quantitat en ml de medicament que hem d'administrar.

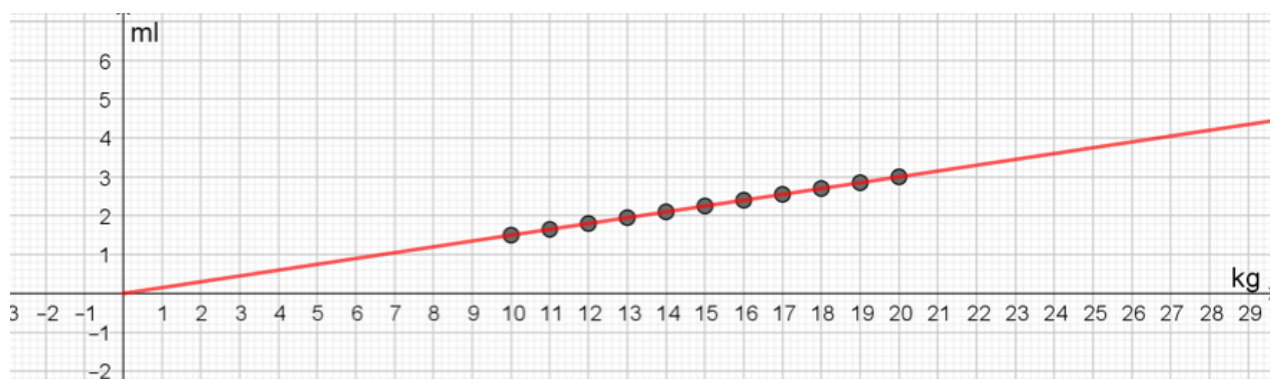
Com $15x$ és el nombre de mg i en 1 ml del nostre flascó hi ha 100 mg, llavors, hem de administrar $\frac{15x}{100}$ ml.

Així doncs, la funció ve donada per

$$f(x)=0,15x$$

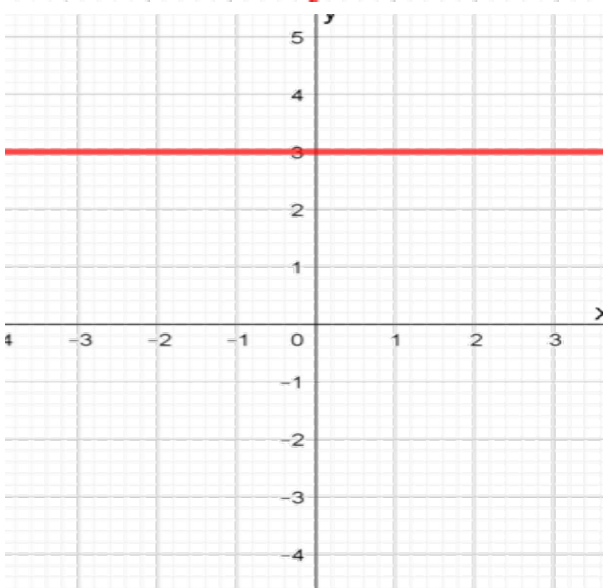
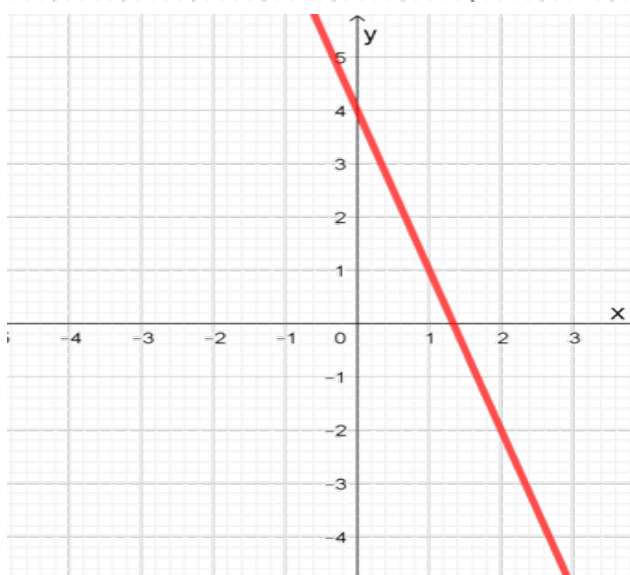
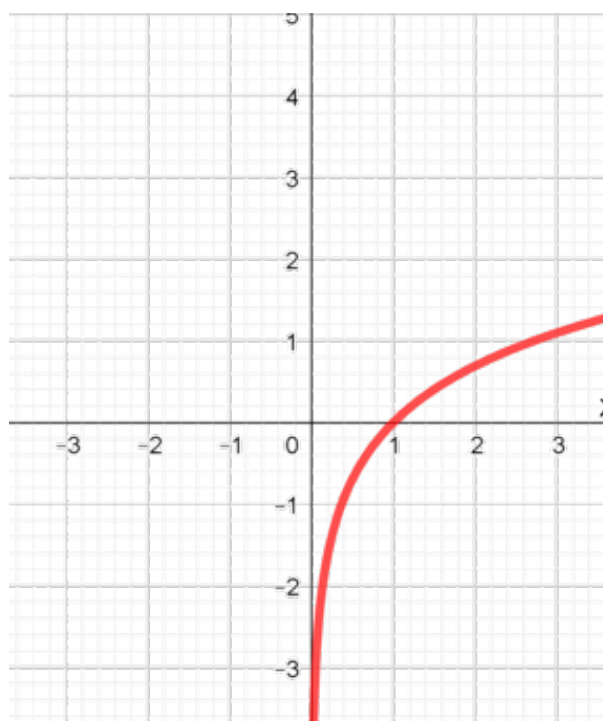
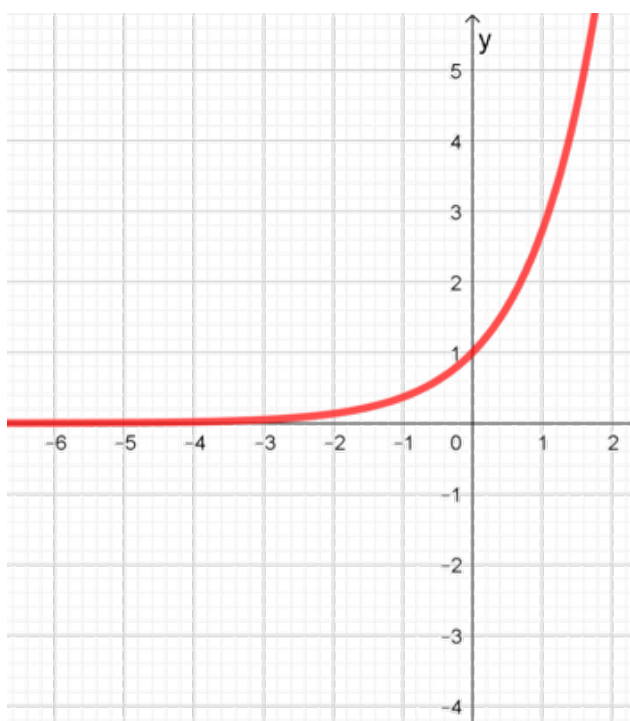
Amb la funció definida a partir de la expressió $f(x)=0,15x$, podem calcular fàcilment la quantitat en mil·lilitres exactament per a qualsevol cas. Per exemple, per a un xiquet de 14,5 kg, la quantitat és

$$f(14,5)=0,15 \cdot 14,5 = 2,175 \text{ cada 6 hores.}$$



Ací, sí que té sentit unir els punts perquè el pes pot prendre valors entre els valors que hem posat. Però no hi ha gràfica per a valors negatius de pes i tampoc la quantitat de ml pot ser negativa.

Exemples de gràfiques de funcions

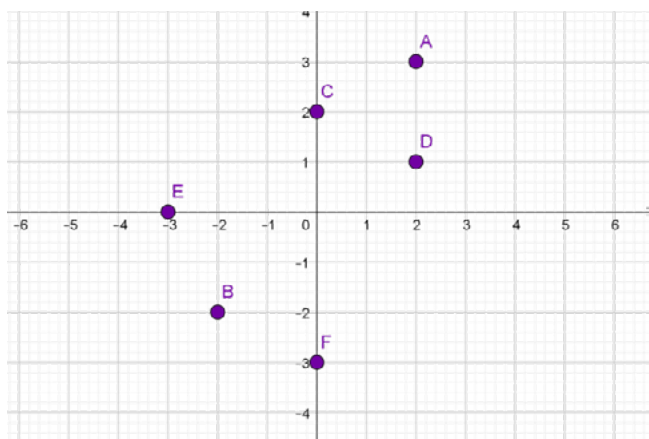


Activitats finals

1. Completa:

Coordenades	(9,-2)	(-2,3)	(8,2)	(-7,-3)	(-3,7)	(-10,-9)
Quadrant						

2. Quines coordenades tenen els punts de la gràfica?



3. Construeix una taula de valors per a la funció $y=3x+2$ amb quatre punts diferents. Representa els punts.

4. Construeix una taula de valors per a la funció $y=-3x$ amb quatre punts diferents. Representa els punts.

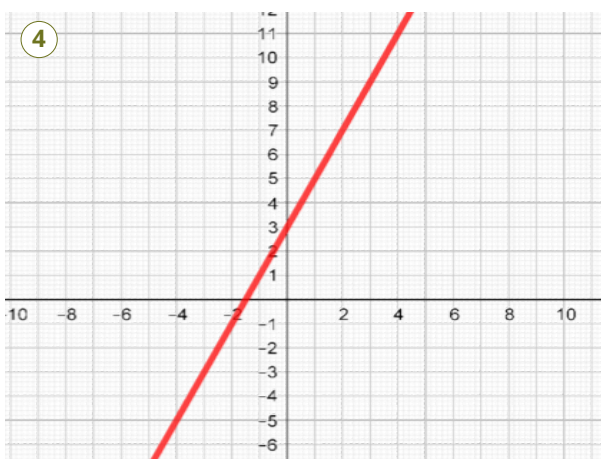
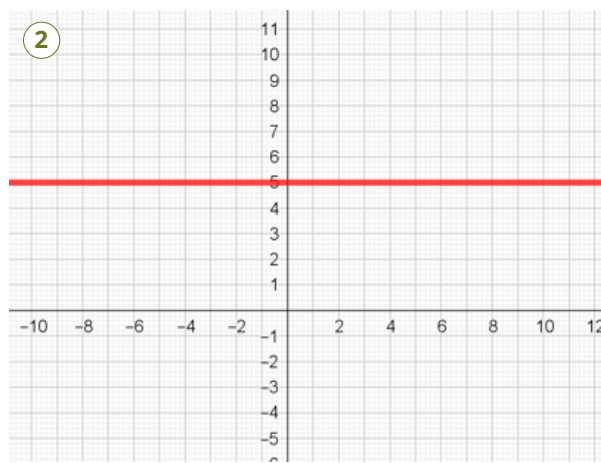
5. Relaciona les funcions següents amb les seues gràfiques

a) $y=5$

b) $y=4x$

c) $y=2x+3$

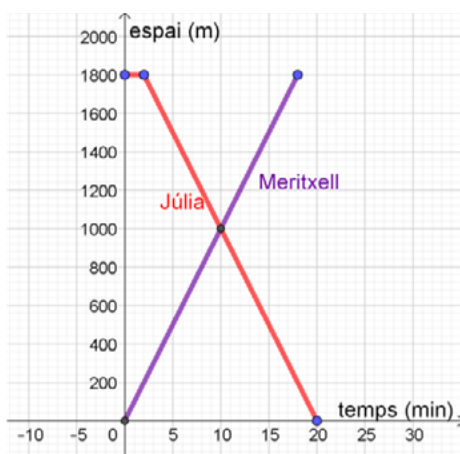
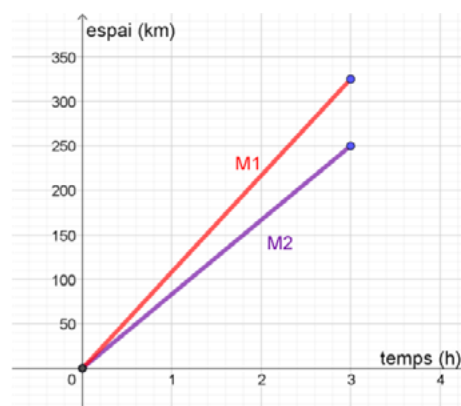
d) $y=-x$



6. Les gràfiques següents representen la relació espai-temps de dos motoristes M1 i M2:

Calcula

- La velocitat de M1
- La velocitat de M2
- Segons el gràfic han eixit alhora?



7. Meritxell ix de l'Hospital Verge dels Liris d'Alcoi en direcció a la Plaça d'Espanya pel Pont Francisco Aura. El GPS indica una distància de 1800 metres. Júlia va a la seua trobada des de la Plaça d'Espanya. Segons les gràfiques, a) a quina distància de l'Hospital es trobaran? b) Han començat a caminar al mateix temps? c) A quina distància de la Plaça d'Espanya es produeix la trobada? d) Van a la mateixa velocitat?

8. Completa seguint l'exemple:

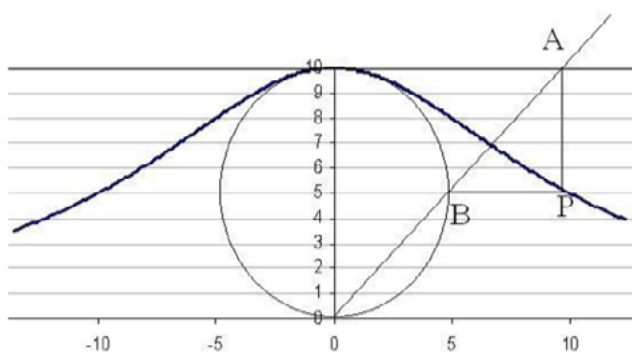
a) La funció que a cada número fa correspondre la seua meitat:	$f(x)=2x$ També $y=2x$
b) La funció que a cada número fa correspondre el seu triple més huit unitats:	
c)	$y=4x+9$
d)	$y=2x-10$
e) La funció que a cada número fa correspondre el seu oposat:	



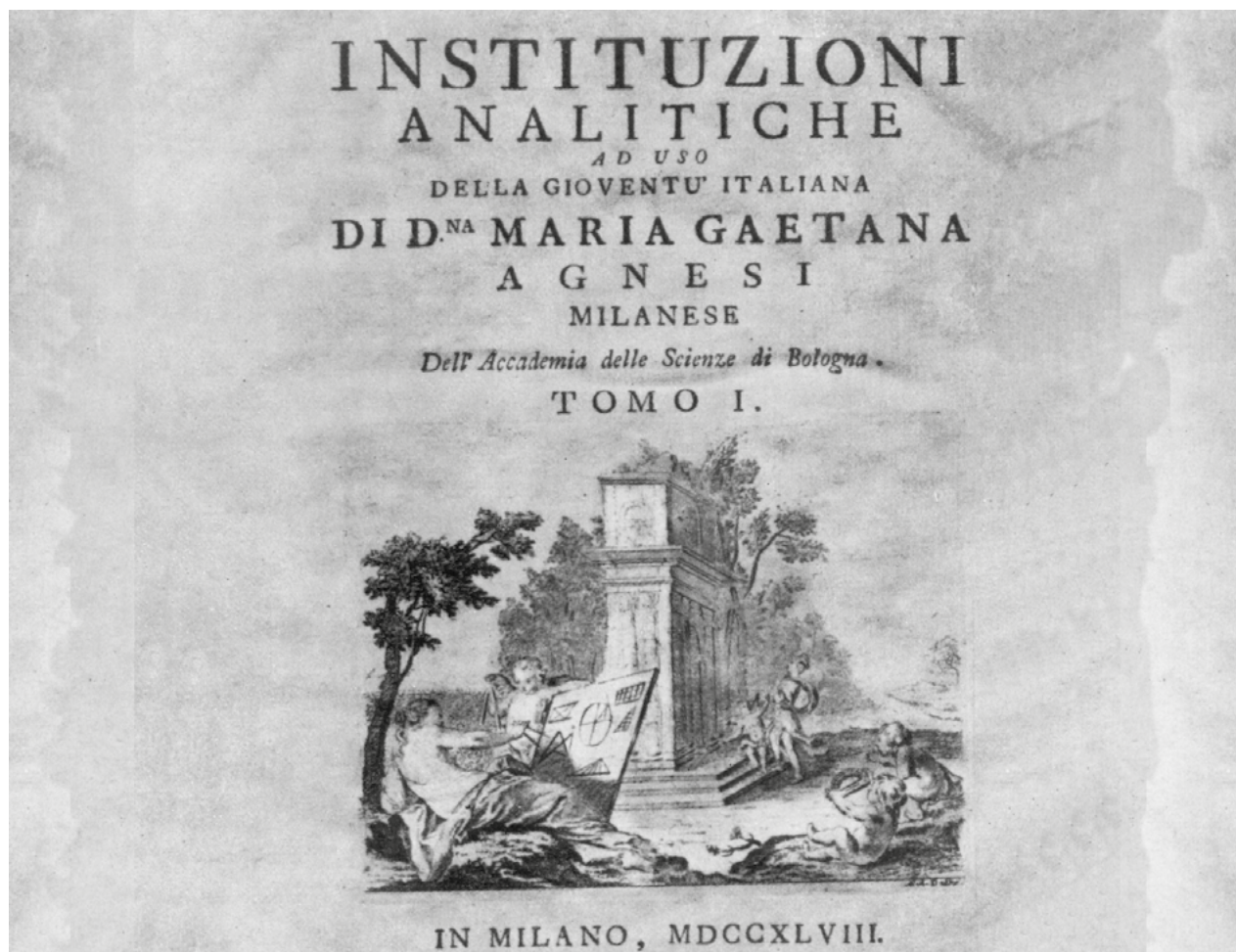
Sabies que...

María Gaetana Agnesi (1718-1799 Milà, (Itàlia)), filla d'un professor matemàtic, a l'edat de nou anys parlava francès, llatí, grec, hebreu i algunes altres llengües. A aqueixa edat va escriure un discurs defensant l'educació de les dones.

El seu treball més important: *Instituzioni Analítiche* ("Instituzioni analítiche ad use della gioventú italiana"), va estar publicat i traduït al francès i a l'anglès. Una de les parts més importants d'aquest llibre va ser la corba anomenada originalment com versiera:



Quan aquest llibre va ser traduït a l'anglès per John Colson, professor de matemàtiques de Cambridge, aquest li va donar el nom de "bruixa" a la corba estudiada per Agnesi a causa d'una mala traducció i d'ací cada vegada que s'anava a esmentar a Agnesi es referien a ella com la bruixa d'Agnesi.



Calculadora científica

Arrel quadrada	
Arrel quadrada	 Altres possibilitats és utilitzar aquesta tecla, i després introduïm el número 0.5, perquè fer l'arrel quadrada és equivalent a elevar a 0,5.
Arrel cúbica	 En algunes calculadores és necessari que premem primer la tecla SHIFT
Recorda que si no dóna nombre decimal has d'utilitzar la tecla:  La coma del decimal es fica amb la tecla: 	

Activitats proposades

1. Amb l'ajuda de la calculadora completa la taula de la funció arrel quadrada, és a dir, $y=\sqrt{x}$:

x	4	10	16	22	28	34	40
y							

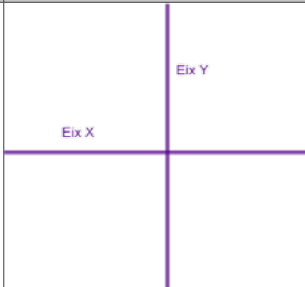
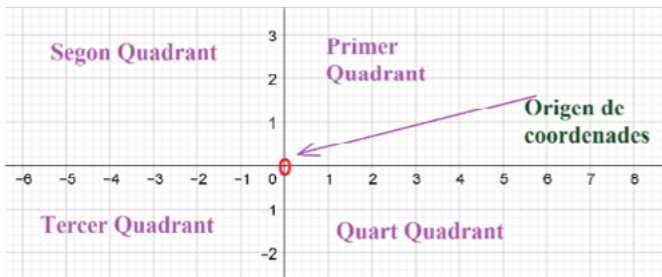
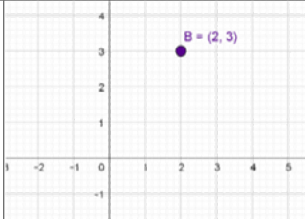
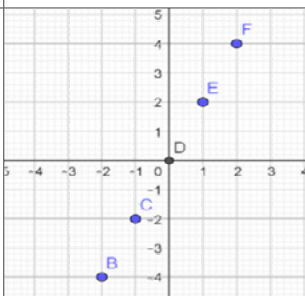
Fes arrodoniment si cal.

2. Amb l'ajuda de la calculadora

x	27	64	125	245	512	700	1000
y							

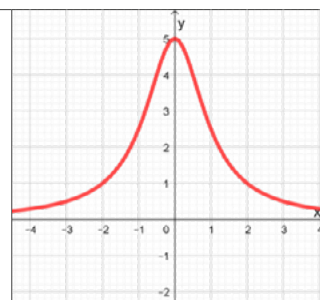
Fes arrodoniment si cal.

Resum

Nom del concepte o propietat	Definició	Exemple												
Sistema de referència cartesià	Està format per dues rectes perpendiculars X i Y anomenades eixos de coordenades i el punt O, on es tallen que s'anomena origen de coordenades. L'eix X s'anomena eix d'abscisses i l'eix Y s'anomena eix d'ordenades.													
Quadrants	Els eixos de coordenades divideixen el pla en 4 quadrants.													
Coordenades	Cada punt del pla es designa per dues coordenades. La coordenada corresponen a l'eix X i la coordenada corresponen a l'eix Y, sempre en aquest ordre..													
Taula de valors	És una taula en la qual situem ordenadament les quantitats corresponents de dues magnituds relacionades.	<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>-4</td><td>-2</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td></tr></table>	x	-2	-1	0	1	2	y	-4	-2	0	2	4
x	-2	-1	0	1	2									
y	-4	-2	0	2	4									
Gràfica d'una taula de valors	És la representació del conjunt de punts corresponen a parells de dades de la taula de valors.													
Funció	Una funció entre dues magnituds x i y és una relació o correspondència de manera que, a cada valor de la variable independent, x, correspon un únic valor de la dependent, y . Una funció es pot expressar mitjançant una taula de valors, una fórmula o una gràfica.	$y = f(x)$ $f(x) = 4x$												

Representació gràfica d'una funció

És la representació del conjunt de punts determinats per la fórmula de la funció, la taula de valors associada o la expressió amb qualsevol llenguatge.



Autoavaluació

1. Les coordenades dels punts indicats són:

- a) $(-5,1)$ i $(0,5)$
- b) $(1,-5)$ i $(5,0)$
- c) $(-5,-1)$ i $(0,1)$
- d) $(5,1)$, $(-1,0)$

2. El punt $(-3,-4)$ està

- a) En el primer quadrant
- b) En el segon quadrant
- c) En el tercer quadrant
- d) En el quart quadrant

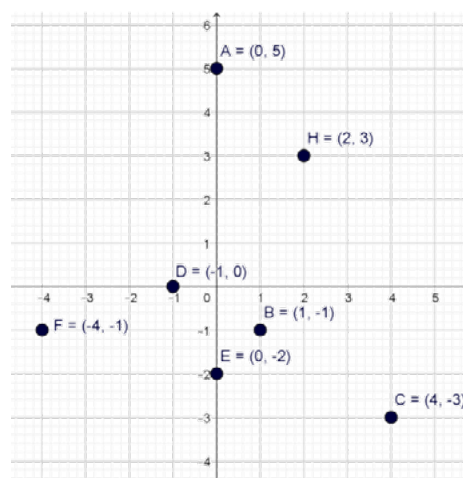
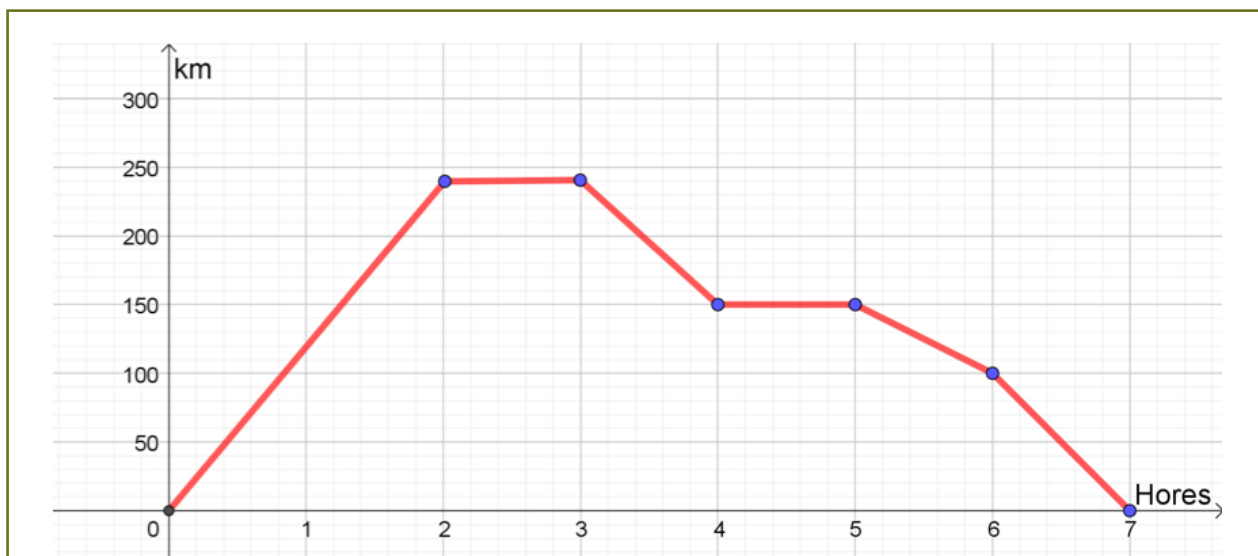


Figura. Preguntes 3, 4, 5 i 6.



3. Segons la gràfica, quantes hores està parat el vehicle?

- a) 2 hores
- b) 3 hores
- c) Una hora i mitja
- d) Caps de les anteriors

4. Segons la gràfica, quants quilòmetres recorre en total?

- a) 240 km
- b) 480 km
- c) 300 km
- d) Caps de les anteriors

5. Va eixir a les set del matí, a quina hora està més allunyat del punt d'eixida?

- a) A les 14:00
- b) Entre les 9 i les 10 del matí
- c) Entre les 11 i les 12 del matí
- d) Caps de les anteriors

6. Segons la gràfica, a quina hora va retornar al punt d'eixida si va eixir a les set del matí?

- a) A les 12:00
- b) A les 13:00
- c) A les 2 de la vesprada
- d) Caps de les anteriors

7. Els números que completen la taula de magnituds directament proporcionals són d'esquerra a dreta:

Tomaques (kg)	1	2		6	8
Preu (€)	1,3		3,9		

- a) 2,3; 3,3; 6,3 i 8,3
- b) 2,6; 3; 5,2 i 6,5
- c) 2,6; 3; 7,8 i 10,4
- d) 2,3; 1,3; 3,6 i 4,3

8. Una funció ve donada per $y=2x+1$. Per a $x=3$, el valor de y és:

- a) 7
- b) 8
- c) 6
- d) Caps de les anteriors

9. Una funció ve donada per $y=5x+9$. Per a $x=-2$, el valor de y és:

- a) 35
- b) -1
- c) 12
- d) Caps de les anteriors

10. En una autoescola el preu de la matrícula és de 140 € i el preu d'una classe és de 20 €. Si he necessitat 10 classes per a obtenir el carnet, quant he pagat en total?

- a) 160 €
- b) 200 €
- c) 340 €
- d) Caps de les anteriors

11. La factura del gas d'una ciutat té una quantitat fixa de 16 € i 0,7 € per cada metre cúbic. Si anomenem x al nombre de metres cúbics i y als diners totals de la factura. Quina és l'expressió de la funció?

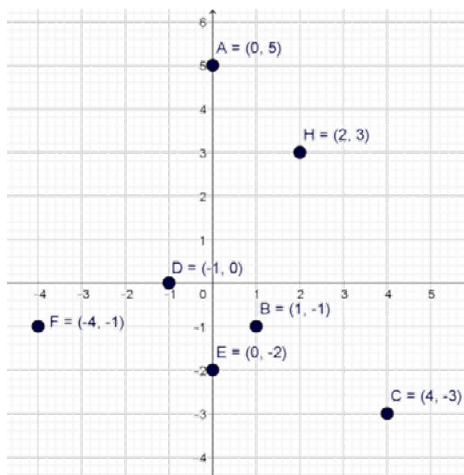
- a) $y=16x+0,7$
- b) $y=16,7x$
- c) $y=x+16+0,7$
- d) $y=0,7x+16$

12. Què tenen en comú els punts (3,0), (-1,0), (1,5;0), (-1/2,0)?

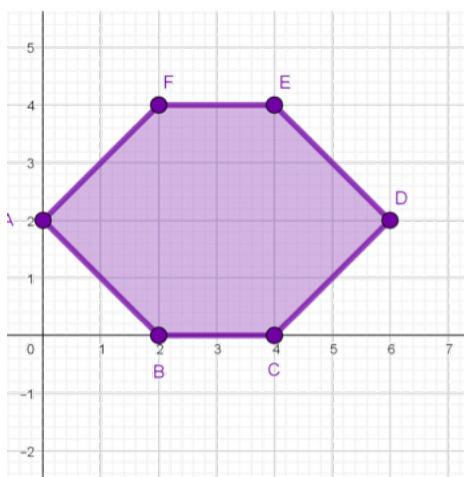
- a) Que es representen sobre l'eix X
- b) Que es representen sobre l'eix Y
- c) Que estan en el primer quadrant
- d) Que estan en el segon quadrant

Solucionari. Activitats proposades

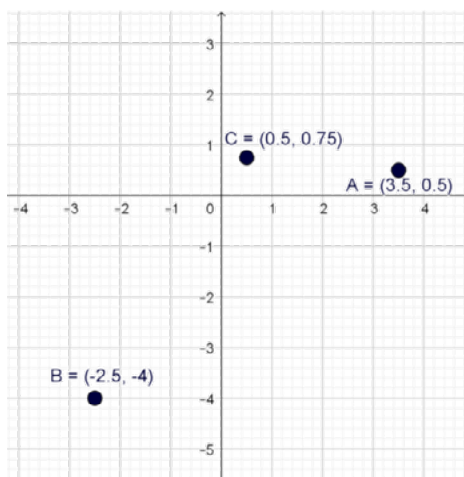
1.



2. Un hexàgon:



3. Observa que $(1/2, 3/4)$ és el punt $(0,5;0,75)$



4. a) 3 hores

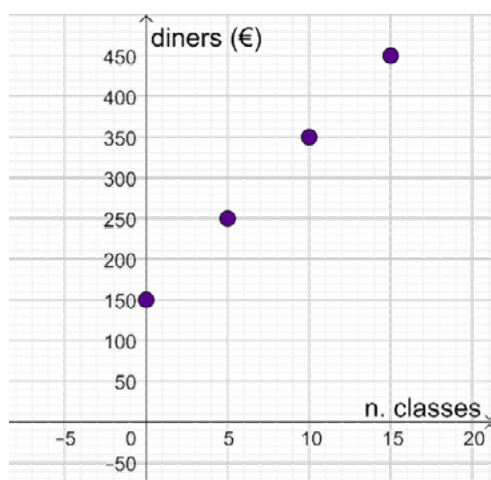
b) 130 km

c) Entre les 10 i les 12

d) 1 hora.

5. Has pagat en total 450 €.

x	0	5	10	15
y	150	250	350	450



Solucionari. Activitats finals

1.

Coordenades	(9,-2)	(-2,3)	(8,2)	(-7,-3)	(-3,7)	(-10,-9)
Quadrant	4t	2n	1r	3r	2n	3r

2.

A=(2,3);

B=(-2,-2);

C=(0,2);

D=(2,1);

E=(-3,0);

F=(0,-3)

3. Càlculs:

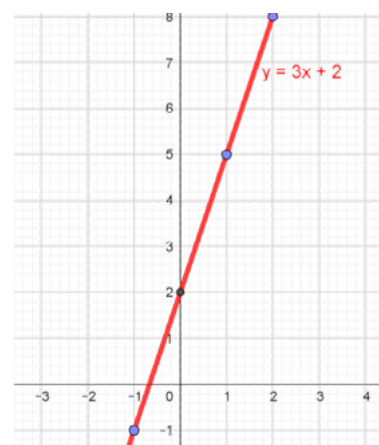
$$3 \cdot (-1) + 2 = -1;$$

$$3 \cdot 0 + 2 = 2;$$

$$3 \cdot 1 + 2 = 5;$$

$$3 \cdot 2 + 2 = 8$$

x	-1	0	1	2
y	-1	2	5	8



3. Càlculs:

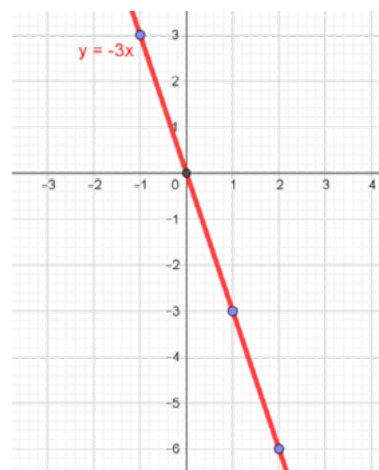
$$-3 \cdot (-1) = 3;$$

$$-3 \cdot 0 = 0;$$

$$-3 \cdot 1 = -3;$$

$$-3 \cdot 2 = -6$$

x	-1	0	1	2
y	3	0	-3	-6



5. a)2)

b)3)

c)4)

d)1)

6.

$$a) 325 \text{ km} / 3 \text{ h} = 108,3 \text{ km/h}$$

$$b) 250 \text{ km} / 3 \text{ h} = 83,3 \text{ km/h}$$

c) Sí, perquè les dues gràfiques passen pel punt (0,0).

7.

$$a) 1000 \text{ m}$$

b) No, Júlia comença més tard, està parada 2 min

$$c) 800 \text{ m}$$

d) Sí, perquè ambdues caminen a velocitat de $1800 \text{ m} / 18 \text{ min} = 100 \text{ m/min}$.

8.

a) La funció que a cada número fa correspondre la seua meitat:	$f(x) = 2x$ També $y = 2x$
b) La funció que a cada número fa correspondre el seu triple més huit unitats:	$y = 3x + 8$
c) La funció que a cada número fa correspondre el seu quàdruple més nou unitats:	$y = 4x + 9$
d) La funció que a cada número fa correspondre el seu doble menys deu unitats:	$y = 2x - 10$
e) La funció que a cada número fa correspondre el seu oposat:	$y = -x$



Solucionari. Activitats calculadora

1.

x	4	10	16	22	28	34	40
y	2	3,16	4	4,69	5,29	5,83	6,32

2.

x	27	64	125	245	512	700	1000
y	3	4	5	6,26	8	8,88	10

Solucionari. Autoavaluació

1b) 2c) 3a) 4b) 5b) 6c) 7c) 8 a) 9b) 10c) 11d) 12 a)