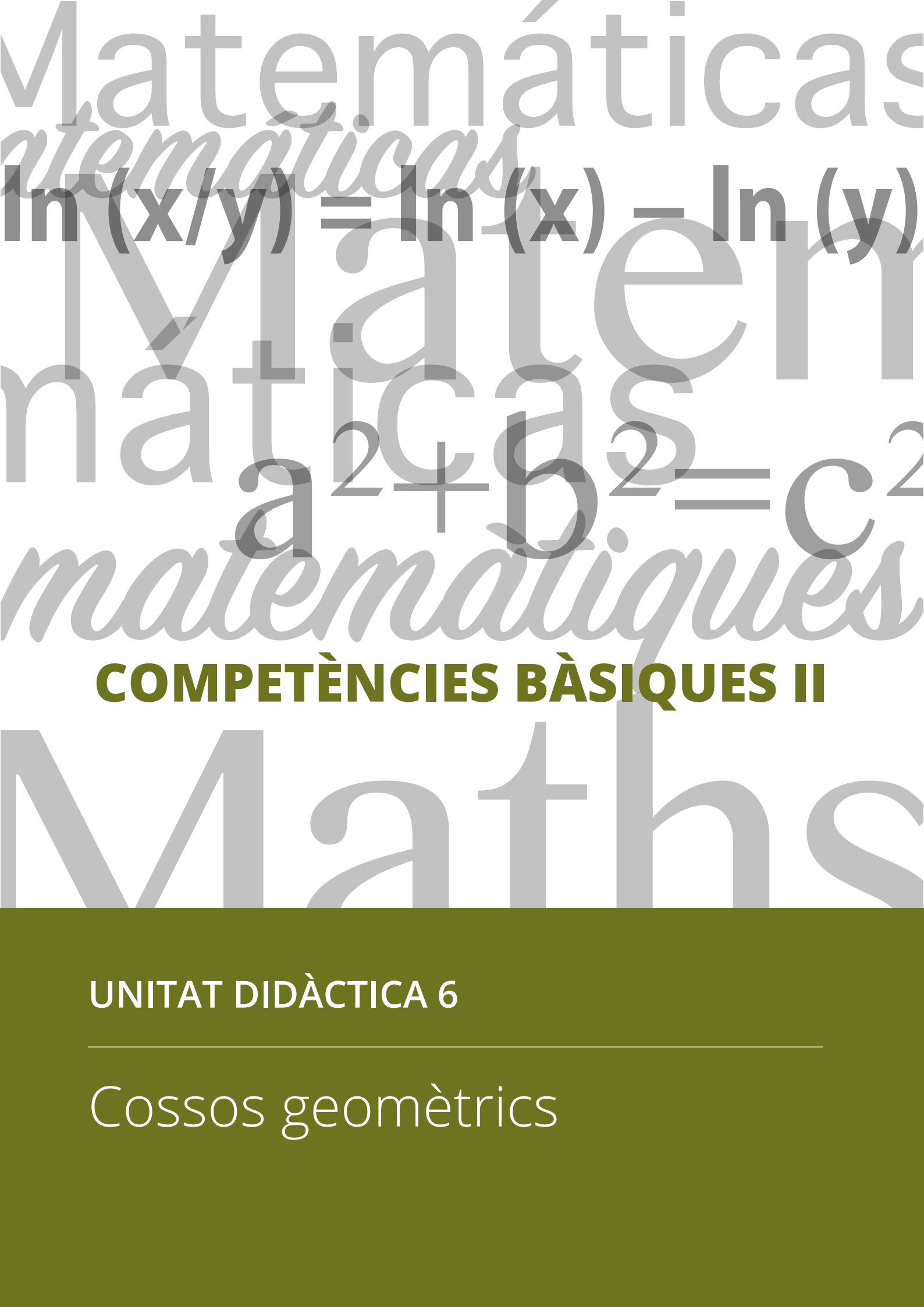


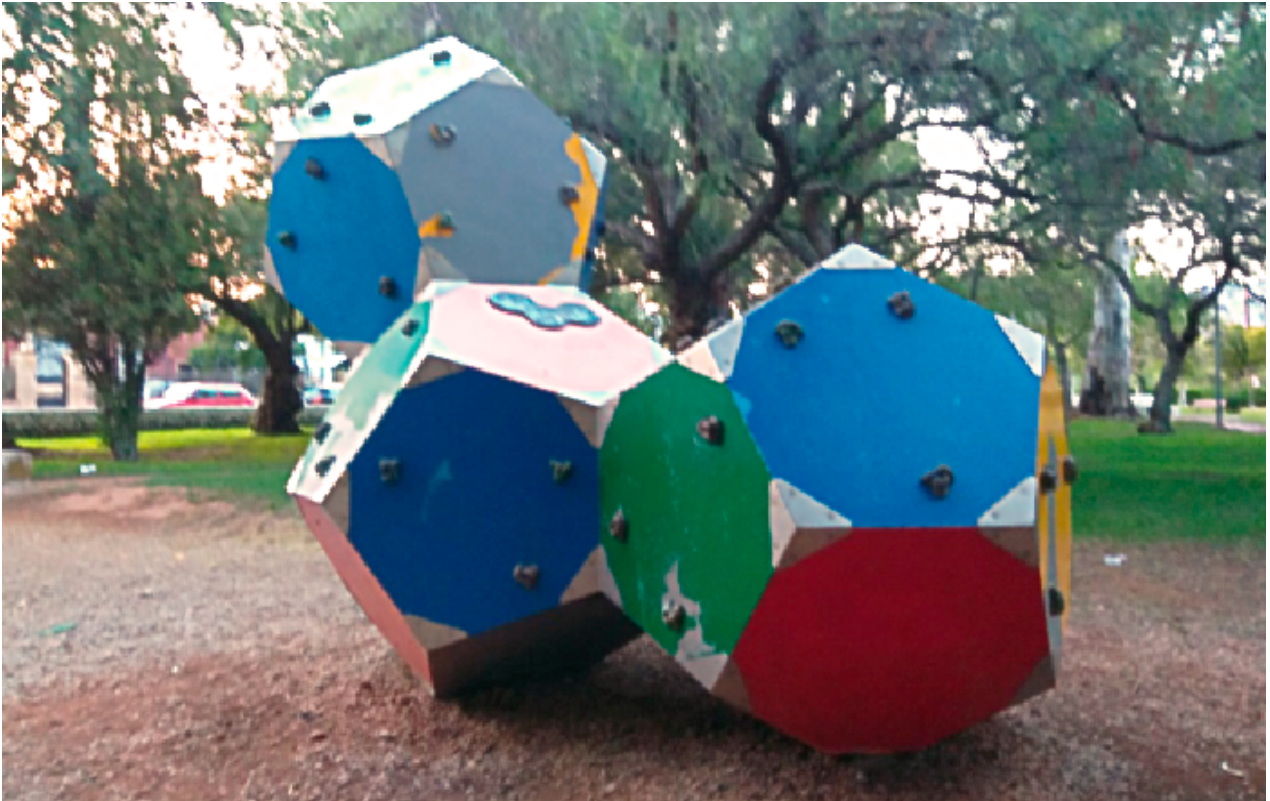


COMPETÈNCIES BÀSIQUES II

UNITAT DIDÀCTICA 6

Cossos geomètrics

Escalada de dodecaedres!



Pilar va anar al parc. Els seus fills van jugar amb aquests dodecaedres. Quants pentàgons han fet falta per a construir els dodecaedres?

En aquesta unitat es mostren estratègies i eines perquè:

- Identifiqués què és un poliedre i els seus elements: cares, arestes i vèrtexs.
- Conegues els poliedres regulars.
- Dibuixes el desenvolupament en el pla d'un poliedre per a aplicar-ho a la construcció de peces.
- Identifiqués alguns sòlids de revolució: cilindre, con i esfera.
- Compregues el concepte de volum.

Amb tots aquests recursos podràs resoldre fàcilment el problema dels dodecaedres i uns altres similars.

Has de repassar:

- Els conceptes bàsics de geometria de figures en el pla i les unitats de mesura.

Índex

1. ¡Poliedres. Elements i relació d'Euler
2. Poliedres regulars
3. Elements d'un prisma i una piràmide
4. Concepte de volum
5. Elements del cilindre, el con i l'esfera

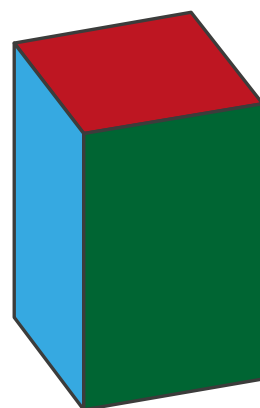
1. Poliedres. Elements i relació d'Euler

Els cossos geomètrics apareixen en la nostra vida quotidiana sovint. Construïm cases i mobles basant-nos en composicions d'un tipus de cos geomètric que té unes característiques especials: el poliedre.

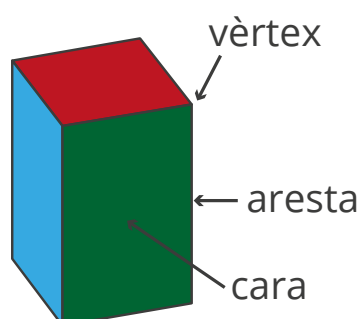
Un poliedre és una part de l'espai delimitada per superfícies plans, de forma que el volum delimitat per aquestes es finit, és a dir, un poliedre és un cos geomètric tridimensional les cares dels quals són polígons. Cadascun d'aquests polígons es diu cara.

Observa que "poli" significa molt i "edro" significa cara o pla.

L'espai on vivim té tres dimensions: el llarg, l'ample i l'altura. De fet, nosaltres som éssers tridimensionals. En canvi, el pla involucra dos dimensions el llarg i l'ample. De vegades, interessa més una dimensió que una altra, per exemple, quan tenim un fil si no importa el grossor, només considerarem el llarg.



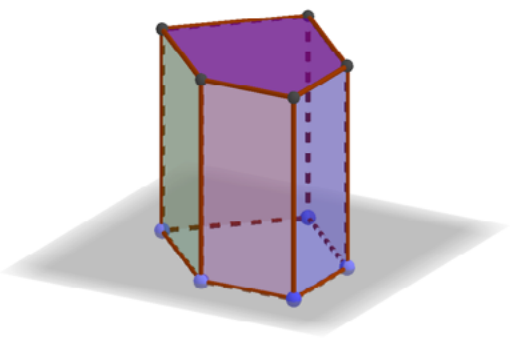
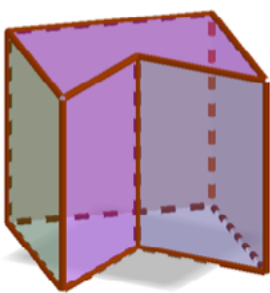
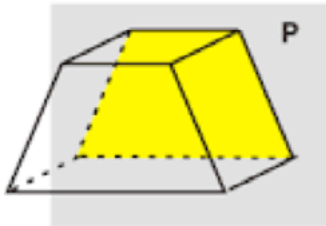
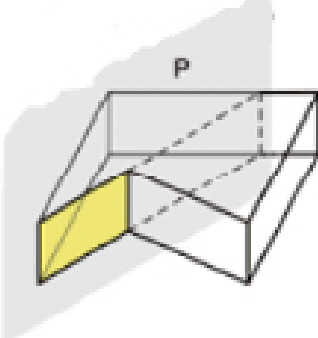
On apareixen els cossos geomètrics?



Els elements d'un poliedre són les cares, les arestes i els vèrtexs. Les arestes són els segments en els quals s'intersequen les cares (els costats de les cares) i els vèrtexs són els punts on s'intersequen dues arestes (els vèrtexs de les cares).

Un poliedre es diu convex si el segment que uneix dos punts que estan dins aquest poliedre, queda dins el poliedre. En cas contrari, es diu còncav.

Altres caracteritzacions de poliedre convex és quan prolonguem una cara, aquesta no talla al poliedre en cap punt que no pertanyi a aquesta cara.

Convex	Còncav
	
	

En tots els poliedres convexos es compleix la coneguda fórmula d'Euler que relaciona les cares, arestes i vèrtexs. La fórmula d'Euler per als poliedres diu que en un poliedre convex la suma de cares més vèrtex és igual al número d'arestes més dos unitats, és a dir: $C+V=A+2$

Equivalentment, $C-A+V=2$,

Cares $\rightarrow$ Dimensions = 2 Arestes $\rightarrow$ Dimensions = 1 Vèrtex $\rightarrow$ Dimensions = 0

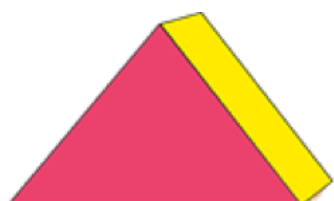


En aquest poliedre, el nombre de cares és 6, el d'arestes és 12 i el de vèrtexs és 8.

$$6-12+8=2$$

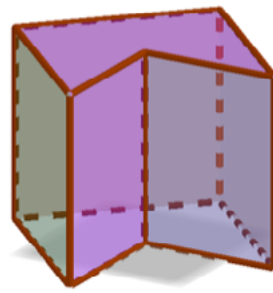
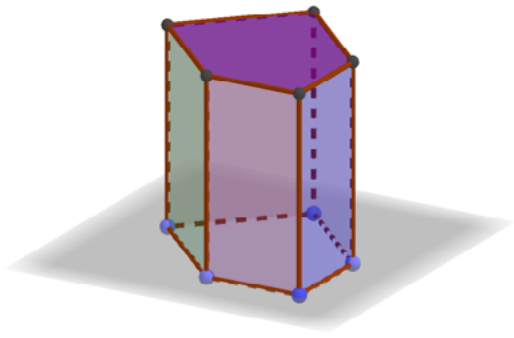
Activitat proposada

1. Comprova que es compleix la fórmula d'Euler per al poliedre.



Existeixen poliedres còncavs que compleixen aquest teorema, per exemple,

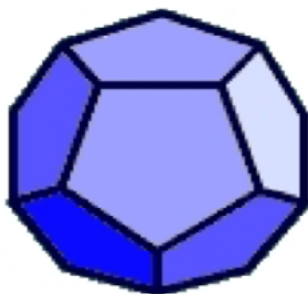
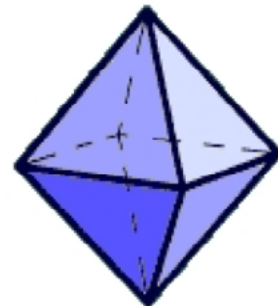
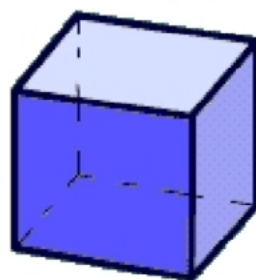
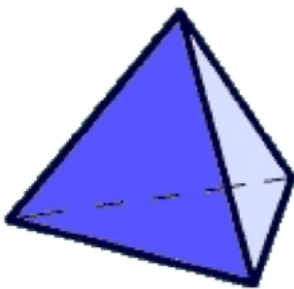
els poliedres següents tenen ambdós 7 cares, 15 arestes i 10 vèrtex i compleixen la fórmula perquè $7-15+10=2$. El de l'esquerra és convex i el de la dreta és còncav (però no té forats).



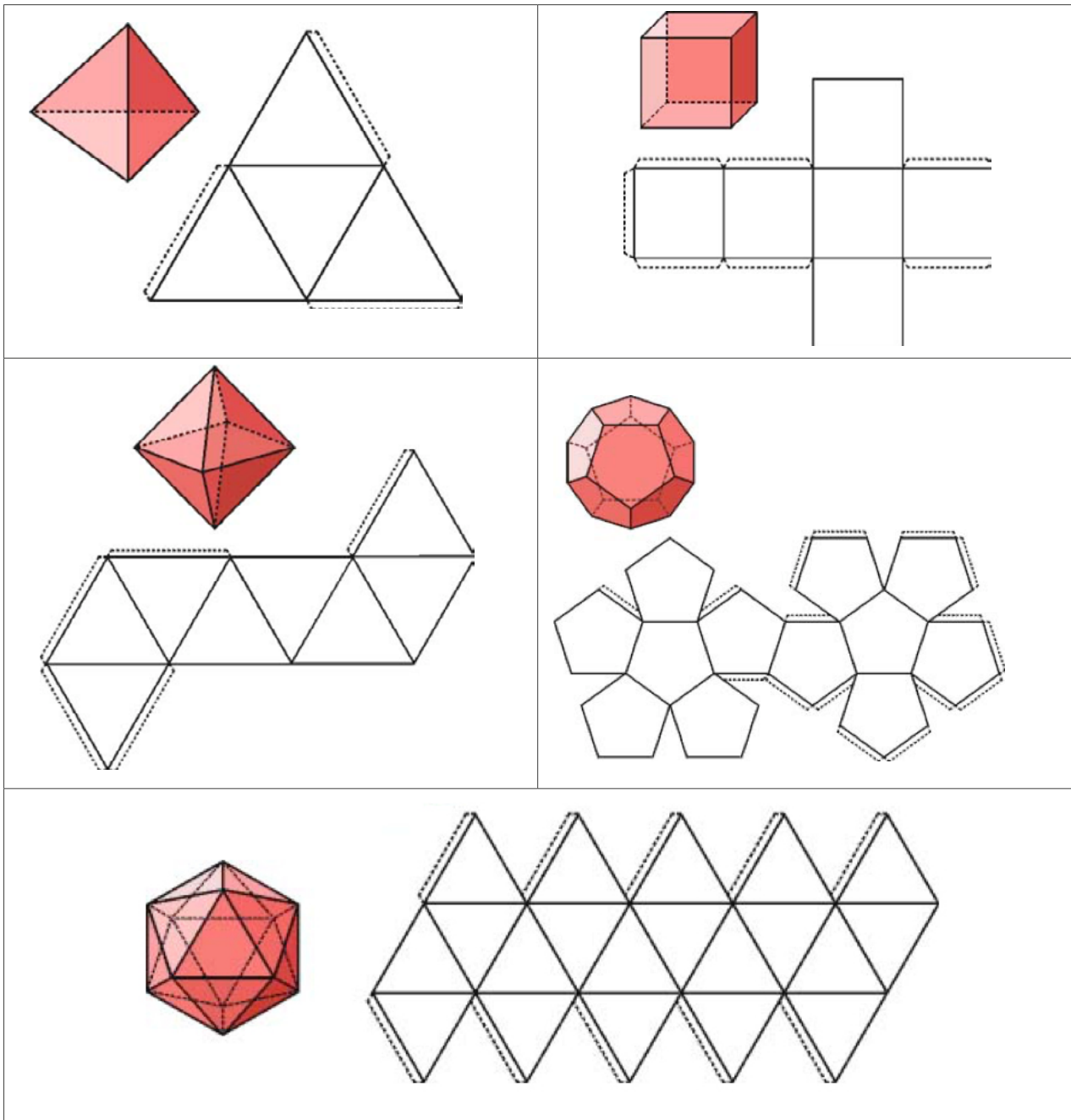
2. Poliedres regulars

Un poliedre és regular si tots el polígons que formen el poliedre són regulars i a més del mateix nombre de costats. Només es poden formar poliedres regulars amb triangles, quadrats i pentàgons. Hi ha 5 només:

- Tetraedre format per 4 triangles,
- Cub o hexaedre format per 6 quadrats,
- Octaedre: format per 8 triangles,
- Dodecaedre, format per 12 pentàgons,
- Icosaedre, format per 20 triangles.



Tots els poliedres regulars es poden construir amb el desenvolupament de les seues cares en el pla.



Activitat resolta

Comprova que es compleix la fórmula d'Euler per a les poliedres regulars

Poliedre	Cares	Arestes	Vèrtexs	Cares-Arestes+- Vèrtexs
Tetraedre	4	6	4	2
Hexaedre	6	12	8	2
Octaedre	8	12	6	2
Dodecaedre	12	30	20	2
Icosaedre	20	30	12	2

Tornant al problema inicial

Pilar va anar al parc. Els seus fills van jugar amb aquests dodecaedres. Quants pentàgons han fet falta per a construir els dodecaedres?

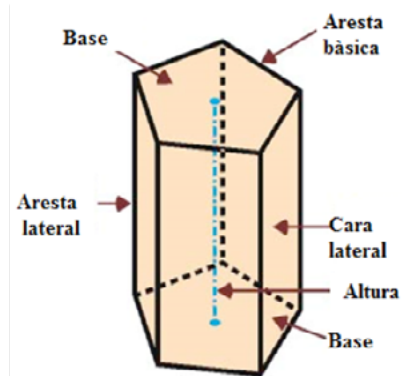
Cada dodecaedre té 12 pentàgons, per tant, s'han utilitzat 36 pentàgons, però, si consideren que les cares per on estan units no compten, aleshores, **hi ha 32 pentàgons**.

3. Elements de prismes i piràmides

Un prisma és un poliedre format per dues cares paral·leles que són polígons iguals anomenades bases i tantes cares laterals, que són paral·lelograms, com costats tenen les bases.

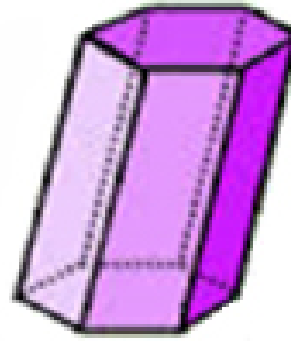
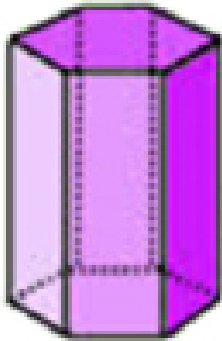
L'altura del prisma és la distància entre les bases. Hi ha prismes rectes i oblics.

r



Recte

Oblic

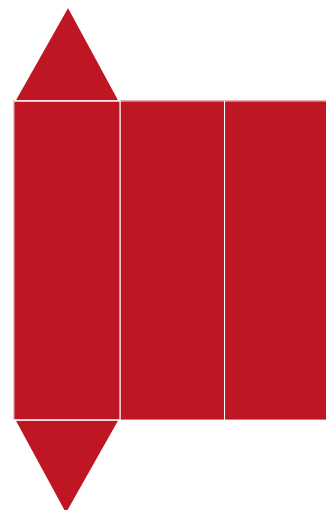


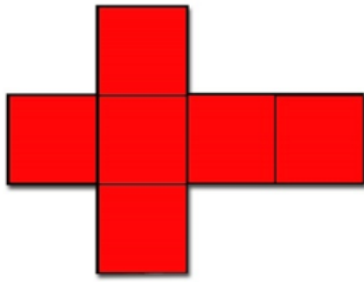
En els prismes rectes les cares laterals són rectangles i l'altura coincideix amb la mesura de les arestes laterals.

Un prisma s'anomena regular si les bases són dos polígons regulars.

Un prisma s'anomena en funció dels polígons de la base. Així, si la base és un triangle tindrem un prisma triangular, si és un quadrilàter el prisma es dirà quadrangular, si és un rombe, prisma ròmbic, si és un hexàgon, el prisma es diu hexagonal, etc.

Els prismes quadrangulars poden tenir molts altres noms com paral·lelepípede, si totes les cares són romboides; ortoedre, si les cares són rectangles, és a dir, en forma de caixa. Si totes les cares del paral·lelepípede són quadrades, aleshores, es tracta del cub o hexaedre.





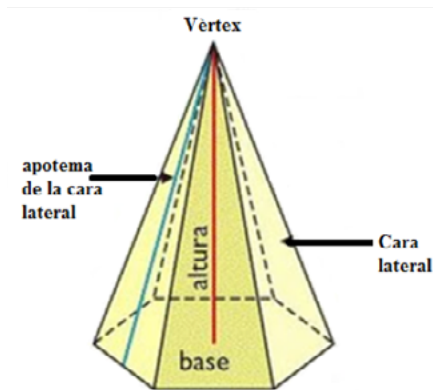
Activitat resolta

Calcula l'àrea de cartolina que necessiten per a fer el desenvolupament en el pla d'una caixa amb forma de cub d'aresta 9 cm.

Solució. Cal calcular l'àrea de 6 quadrats de 9 cm de costats.

$$6 \cdot 9^2 = 486\text{cm}^2$$

Piràmide



Una piràmide és un poliedre amb una sola base formada per un polígon qualsevol i triangles en les seues cares laterals amb un vèrtex en comú que s'anomena vèrtex de la piràmide.

L'altura de la piràmide és la distància del vèrtex a la base.

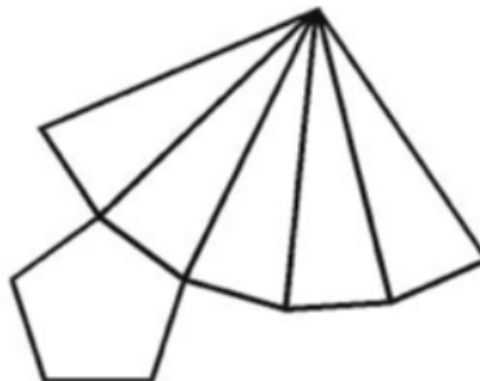
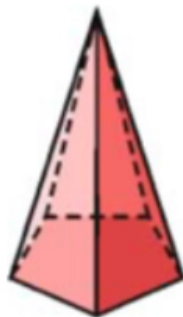
Un tetraedre és un cas particular de piràmide.

Quan la base de la piràmide és un polígon regular i el vèrtex es projecta sobre el centre de la base, es diu que la piràmide és regular.

En aquest cas, les cares laterals són triangles isòsceles iguals.

Depenent del nombre de costats de la base de la piràmide, aquesta s'anomena triangular, quadrangular, pentagonal, etc.

Aquest és el desenvolupament en el pla d'una piràmide de base pentagonal.



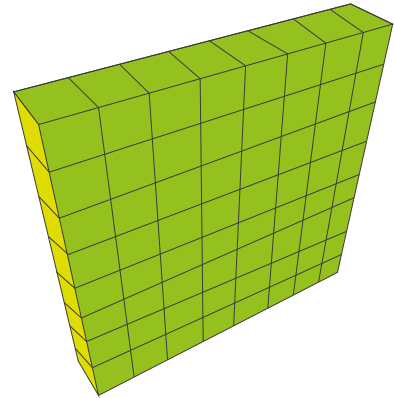
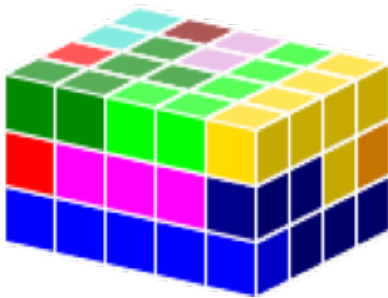
Activitat proposada

2. Dibuixa el desenvolupament en el pla d'una piràmide de base quadrada, les cares laterals de la qual són triangles equilàters.

4. Concepte de volum

Suposem que tenim aquestes caixes amb forma de cub.
Si cada caixa té un volum de 1 dm^3 , aleshores, per a saber el volum total, comptem el número de caixes.

Així, el volum total és de 64 dm^3 .



El volum d'un cos és la quantitat d'espai que ocupa.

Un decímetre cúbic és el volum d'un cub d'aresta 1 dm . Un centímetre cúbic és el volum d'un cub d'aresta 1 cm .

Si cada cub té d'aresta 1 cm , el seu volum és $1 \text{ centímetre cúbic}$, com que hi ha 48 cubetes, deduïm que el volum és igual a 48 cm^3 .



Activitat proposada

3. Calcula el volum de la figura, sabent que cada cubet té d'aresta 1 cm .

Quan es tracta d'una caixa i tenim el llarg, l'amplària i l'altura, aleshores, per a calcular el volum multipliquem els valors de les tres dimensions que han d'estar expressades en la mateixa unitat de mesura, és a dir, totes en metres o totes en centímetres, etc. La unitat de mesura resultant és la que teníem elevada al cub.

Exemple

Una caixa que té d'ample 7 cm , de llarg 10 cm i d'altura 8 cm té un volum de 560 cm^3 . Dividim entre 1000 per a passar a dm^3 ,

$$560 \text{ cm}^3 = 0,56 \text{ dm}^3 = 0,56 \text{ l},$$

doncs $1 \text{ decímetre cúbic}$ equival a 1 litre .

Activitat proposada

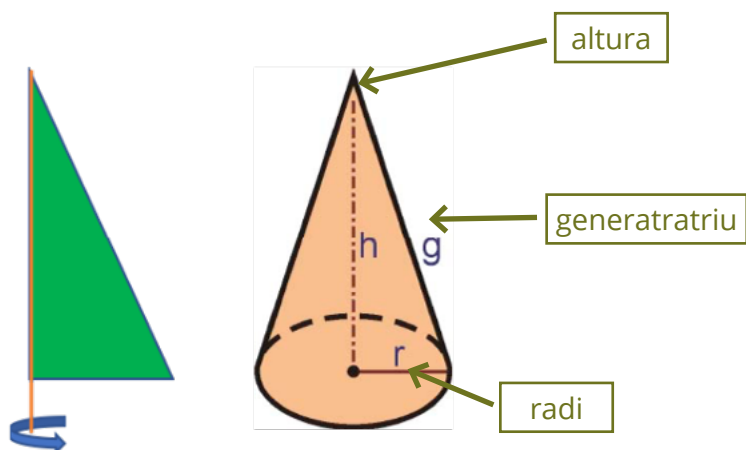
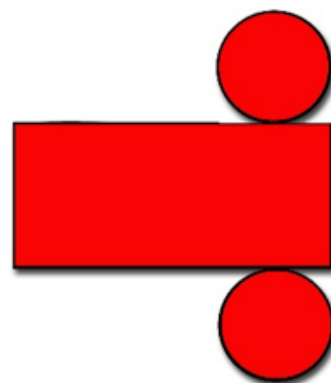
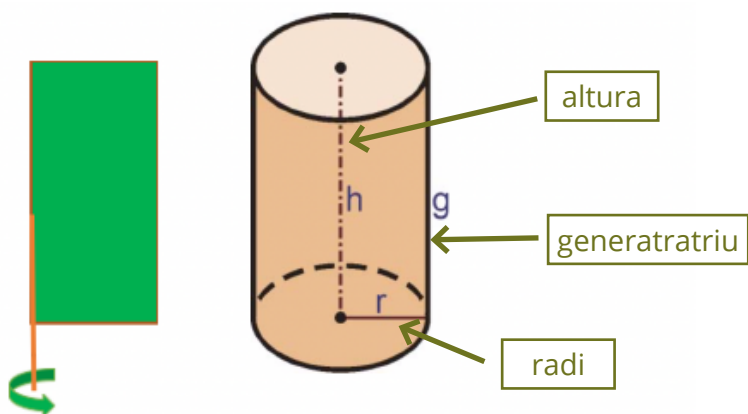
4. Calcula els litres que caben en una caixa de 20 cm d'ample, 10 cm de llarg i 5 cm d'altura.

5. Elements del cilindre, el con i l'esfera

Els cossos de revolució són cossos geomètrics, com a cilindres, cons i esferes, que s'obtenen en fer girar una línia recta o corba al voltant d'una recta fixa anomenada eix. La línia que gira es diu generatriu.

Un cilindre es genera en girar un rectangle al voltant d'un dels seus costats.

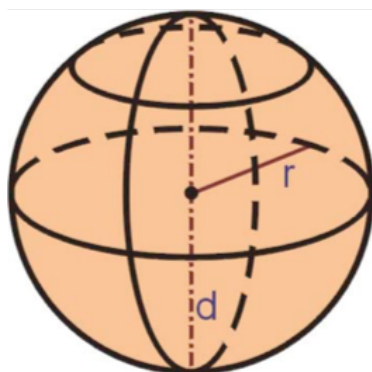
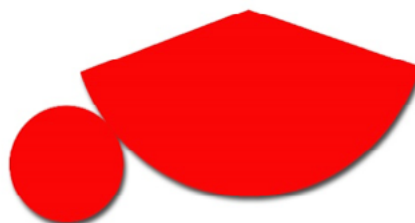
Un con es genera en girar un triangle rectangle al voltant d'un dels seus catets.



Un con es genera en girar un triangle rectangle al voltant d'un dels seus catets.

Un con és com una piràmide regular però, ara la base és un cercle.

D'un con es pot fer el desenvolupament en el pla.



Una esfera es genera quan fent que un semicercle gire al voltant del seu diàmetre. El radi del semicercle és el radi de l'esfera.

Quan tallem una esfera per un pla, tots els talls són cercles. Si el pla pel qual tallem passa pel centre de l'esfera, obtenim un cercle màxim.

El radi d'un cercle màxim és el radi de l'esfera.

D'una esfera no es pot fer el desenvolupament en el pla.

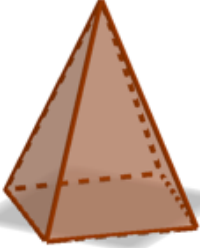
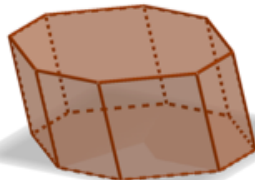
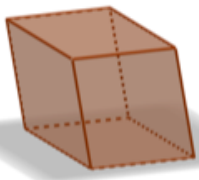
Els paral·lels són les circumferències que queden en tallar l'esfera terrestre amb plans perpendiculars a l'eix que passa pels pols. L'equador és l'únic paral·lel que és un cercle màxim

En l'esfera terrestre, els meridians es corresponen amb cercles màxims.



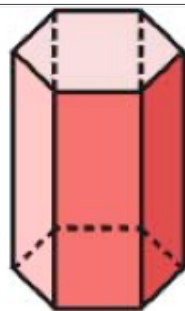
Activitats finals

1. Completa

			
Cares			
Arestes			
Vèrtexs			

2.

- Dibuixa el desenvolupament del prisma
- Quantes cares té?
- Quantes arestes?
- Quants vèrtexs?



3. Completa les frases sobre poliedres regulars

- El _____ té 4 cares que són _____.
- El _____ té ___ cares que són quadrats.
- El _____ té 8 cares que són _____.
- El _____ té ___ cares que són pentàgons.
- El _____ té 20 cares que són _____.

4. Digues si són vertaderes o falses les següents afirmacions:

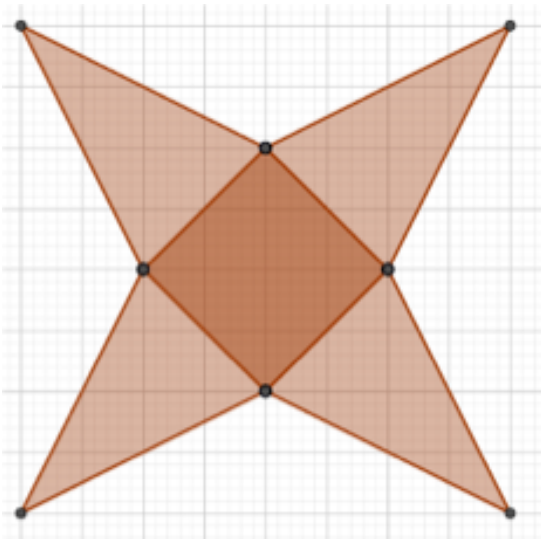
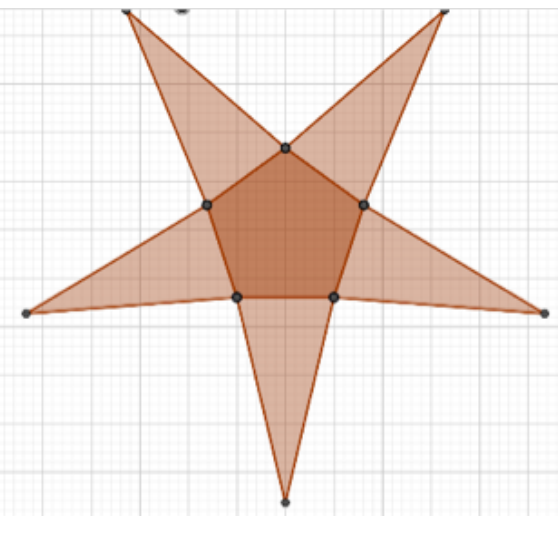
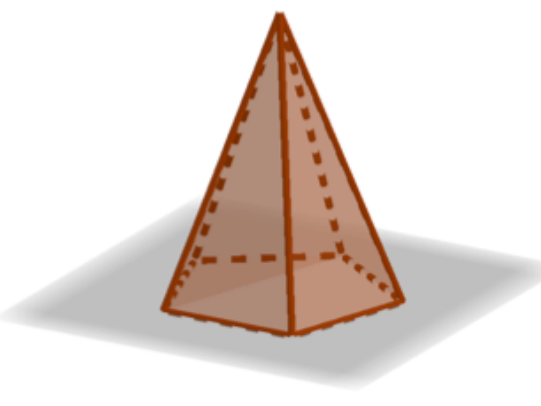
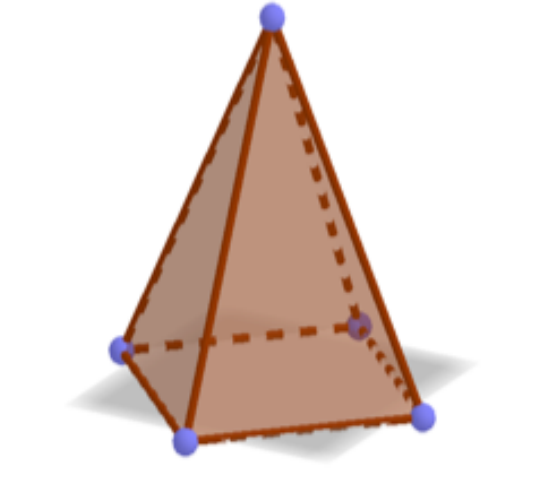
- El major nombre de cares d'un poliedre regular és 20.
- No es pot fer un poliedre regular només amb hexàgons.
- Les arestes d'un polígon regular no són totes de la mateixa longitud.
- Tots els poliedres es fan amb el mateix tipus de polígon.

5. Dibuixa el desenvolupament d'un prisma, la base del qual és un rectangle de longituds 3 cm x 5 cm i que mesura 8 cm d'altura.

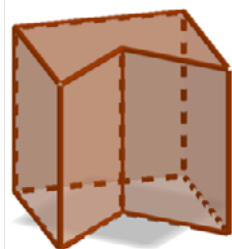
6. Calcula la superfície de cartolina que necessitem per a fer:

- Un tetraedre regular d'arestes de 5 cm. (Pren d'altura dels triangles 4,3 cm).
- Un hexaedre regular d'arestes de 7 cm.
- Un dodecaedre regular d'arestes de 6 cm. (Pren d'apotema de les pentàgons 4,1 cm).

7. Identifica cada poliedre amb el seu desenvolupament

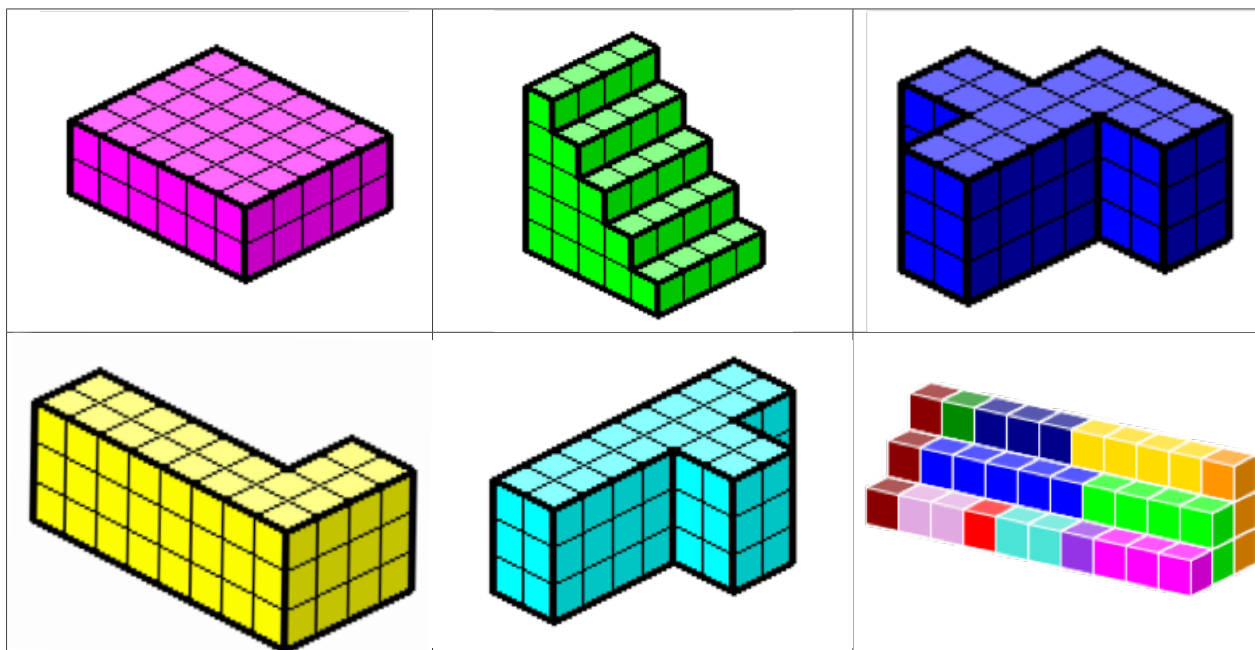
 a)	 b)
 1)	 2)

8. Dibuixa el desenvolupament del poliedre:

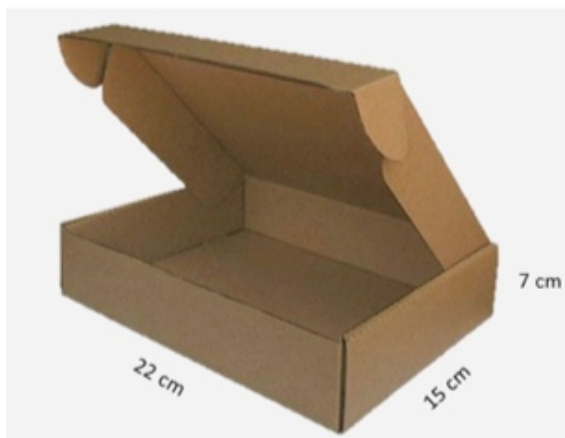


9. Estima el volum d'un aula del col·legi en m^3 i en litres.

10. Calcula el volum de cada figura sabent que cada cub representa 1 cm^3 .



11. Calcula el volum de la caixa en cm^3 , en m^3 i en litres:



12. Descriu la forma d'aquests objectes. Quins cossos geomètrics apareixen?

a)

b)

c)



13. Quants litres caben en una piscina de 25 m de llarg, 10 m d'ample i 1,5 m de profunditat?

14. Repassa les unitats de mesura i completa:

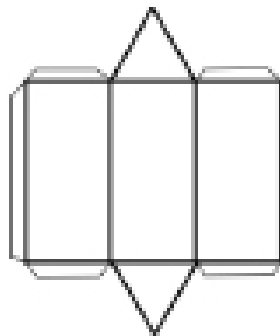
- En un cub d'1 dm d'aresta caben _____cubs de 1 cm d'aresta.
- En un cub d'1 m d'aresta caben _____litres.
- En un cub d'1 dm d'aresta caben _____litres.
- Un cub d'1 dm d'aresta té un volum de _____.
- Un cub de 4 m d'aresta té un volum de _____.

15. Digues a quin cossos geomètrics corresponen els desenvolupaments següents:

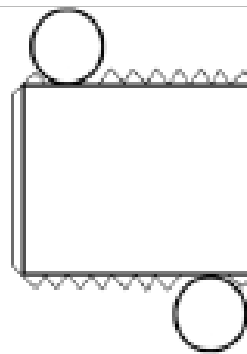
a)



b)

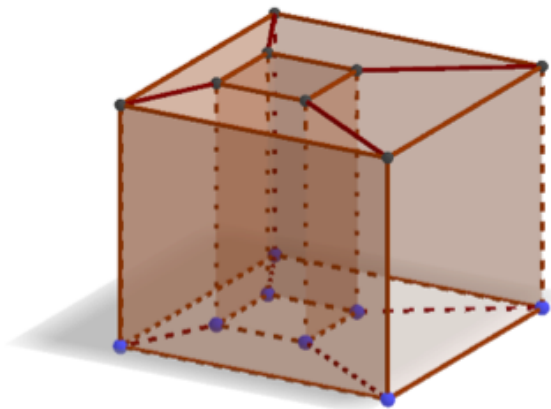


c)



16. Es compleix la fórmula d'Euler en aquest poliedre amb un forat?

Indicació: Observa que té 32 arestes i 16 cares.

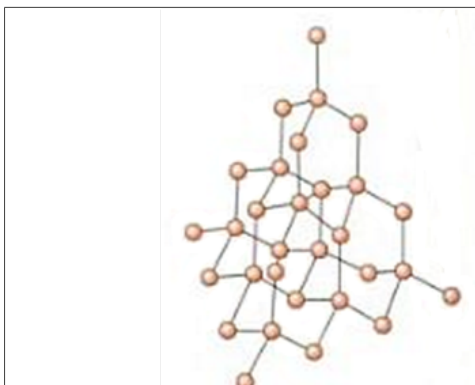


Sabies que...

El diamant i el grafit (material amb el qual es fabricant els llapis) tenen la mateixa composició química però diferent estructura cristal·lina, és a dir, els àtoms de carboni es disposen de diferent forma.

En el cas del diamant formen tetraedres i en el cas del grafit formen prismes de base hexagonal.

a) Diamant



b) Grafit

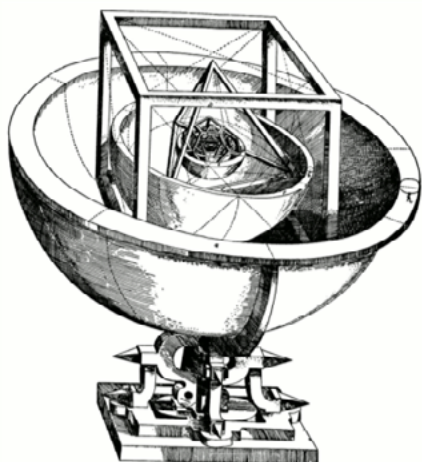


Els poliedres ja es coneixien en el neolític, prova d'això són aquests poliedres d'un jaciment d'Escòcia.

Plató (grec, 427-347 a. C.) va associar els elements de la naturalesa amb poliedres regulars. Segons ell, el foc està format per tetraedres; l'aire, d'octaedres; l'aigua, d'icosaedres; la terra de cubs; i com encara és possible una cinquena forma, Déu ha utilitzat aquesta, el dodecaedre pentagonal, perquè servís de límit al món.



Més tard, Johannes Kepler (alemany 1571-1630) va proposar un Sistema Solar en el qual els planetes giraven al voltant del Sol en unes esferes contingudes en els poliedres regulars.



A Mercuri no li corresponia cap poliedre, però sí que tenien Venus, La Terra, Mart, Júpiter i Saturn. En aqueixa època només es coneixien 6 planetes. Aquesta teoria no és vàlida, però a partir d'aquesta Kepler, va deduir les seues tres famoses lleis, les Lleis de Kepler, que permeten explicar correctament els moviments orbitals de tots els planetes.

Calculadora científica

Tecla per a calcular el cub d'un número	
En la majoria de les calculadores has de prémer primer la tecla	
També és equivalent	 3
Per a calcular 45^3 :	45    Resultat: 91125

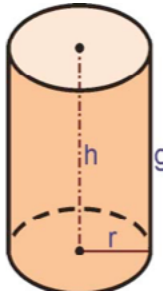
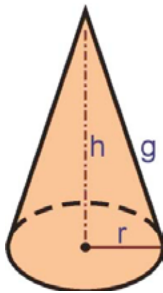
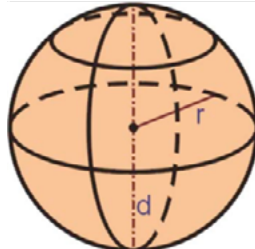
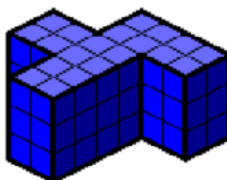
Activitats proposades

1. Calcula el volum d'un cub de 56 cm d'aresta.

2. Completa la taula

x	0	23	100	64	25	1	1000
x^3							

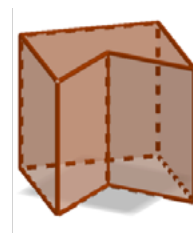
Resum

Nom del concepte o propietat	Definició	Exemple	
Poliedre	Un poliedre és una part de l'espai delimitada per superfícies planes.	Un cub és un poliedre	
Elements d'un poliedre	Cares (són polígons), arestes (són segments) i vèrtexs (són punts)		
Fórmula d'Euler	Caras-Arestes+Vèrtexs=2 Es compleix per a qualsevol poliedre que no tinga forats.		
Poliedres regulars	Tots el polígons que formen el poliedre són regulars i a més del mateix nombre de costats. Només es poden formar poliedres regulars amb triangles, quadrats i pentàgons. Hi ha 5: tetraedre, cub, octaedre, dodecaedre i icosaedre.		
Prisma	És un poliedre formats per dos bases iguals i paral·leles, i per cares laterals que són romboïdes. En els prismes rectes, les cares laterals són rectangles	Una caixa de sabates és un prisma	
Piràmide	És un poliedre amb una sola base formada per un polígon qualsevol, i les seues cares laterals són triangles.	Les piràmides d'Egipte	
Cossos redons	Alguns d'aquests són:		
			
Volum d'un cos	És la quantitat d'espai que ocupa.		Si cada cub té d'aresta 1 cm, com que hi ha 60 cubetes, deduïm que el volum és igual a 60 cm ³ .

Autoavaluació

1. Compta el nombre de cares, arestes i vèrtexs de:

- a) 7 cares, 11 arestes i 8 vèrtexs.
- b) 4 cares, 15 arestes i 10 vèrtexs.
- c) 7 cares, 15 arestes i 10 vèrtexs.
- d) Cap de les anteriors.

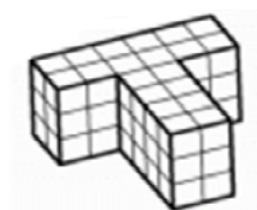


2. Com s'anomena el poliedre regular que té 20 cares?:

- a) Vintaedre
- b) icosaedre
- c) cub
- d) hexaedre

3. Si cada cub petit té 1 cm d'aresta. Quin volum té el cos de la figura?

- a) 72 cm³
- b) 70 cm³
- c) 60 cm³
- d) 80 cm³



4. Quants litres d'aigua caben en un depòsit que d'ample 0,5 m, de llarg 1 m i d'altura 1,5 m?

- a) 750 l
- b) 0,75 l
- c) 7500 l
- d) 3000 l

5. Quants poliedres regulars diferents poden fer amb 32 triangles equilàters iguals?

- a) 6
- b) 5
- c) 4
- d) 3

6. Quants rectangles necessiten per a construir una caixa amb cartolina sense tenir en compte les pestanyes per a enganxar les cares?

- a) 6
- b) 8
- c) 12
- d) 4

7. La piràmide de Keops d'Egipte té base quadrada. Quants cares té?

- a) 4
- b) 5
- c) 3
- d) Cap de les anteriors

8. Per a cosir una funda per a aquest coixí necessiten tallar:

- a) El desenvolupament d'un cilindre
- b) Un polígon corbat i dos cercles
- c) Dos cercles iguals i un rectangle
- d) a) i c) són vertaders.



9. Assenyala la afirmació falsa

- a) Una esfera té un desenvolupament en el pla
- b) Un prisma té dos bases que són paral·leles
- c) Les cares laterals d'un prisma recto són rectangles.
- d) Un cub és també un prisma recto de base quadrada.

10. En un vèrtex d'un dodecaedre concorren

- a) 5 cares
- b) 6 cares
- c) 2 cares
- d) 3 cares

11. Si un poliedre té forats, aleshores el resultat de Cares-Arestes+Vèrtexs és

- a) sempre és 2
- b) sempre és 0
- c) sempre és 4
- d) No és 2

12. Per a fer aquest llum s'utilitzen unes varetes de plàstic en les arestes. Quantes varetes de plàstic es necessiten?

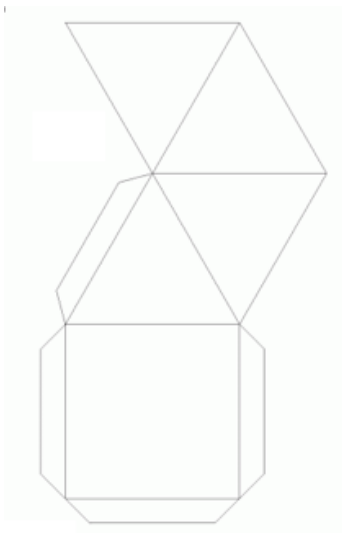
- a) 3
- b) 6
- c) 4
- d) 5



Solucionari. Activitats proposades

1. $C=5$, $A=9$, $V=6$; $5-9+6=2$

2.

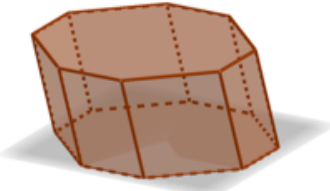
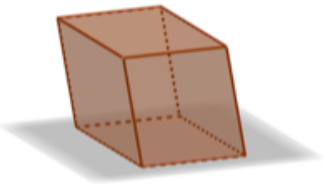


3. 9 cm^3

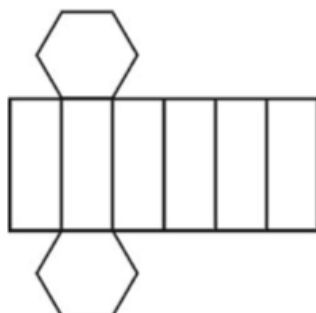
4. $1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ l}$

Solucionari. Activitats finals

1. Completa

			
Cares	5	10	6
Arestes	8	24	12
Vèrtexs	5	16	8

2.



a)

b) 8 cares

c) 18

d) 12

3.

Completa les frases sobre poliedres regulars

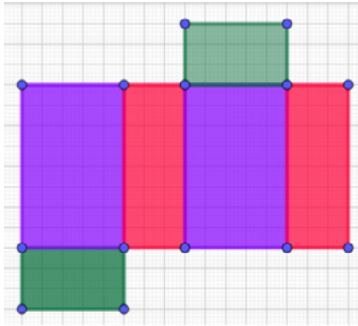
- El tetraedre té 4 cares que són triangles.
- El cub o hexaedre té 6 cares que són quadrats.
- El octaedre té 8 cares que són triangles.
- El dodecaedre té 20 cares que són pentàgons.
- El icosaedre té 20 cares que són triangles.

4.

Digues si són vertaderes o falses les següents afirmacions:

- V
- V
- F
- F

5.



6. a) Cada triangle té de superfície

$$A = \frac{(5 \cdot 4,3)}{2} \text{ cm}^2$$

Com que hi ha 4 triangles, multipliquem per 4 i ens queda 43 cm^2 .

b) Com que té 6 quadrats, l'àrea total és $6 \cdot 7^2 \text{ cm}^2 = 294 \text{ cm}^2$.

c) Cada pentàgon té de superfície

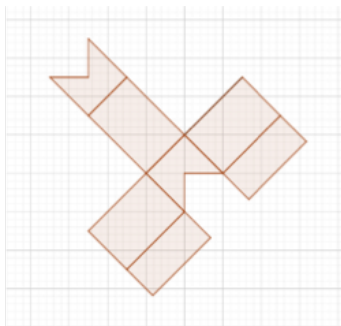
$$A = \frac{\text{Perímetre} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{(5 \cdot 6 \cdot 4,1)}{2} \text{ cm}^2$$

Com que hi ha 12 pentàgons, multipliquem per 12 i ens queda 738 cm^2 .

7.

a) $\rightarrow 2)$ b) $\rightarrow 1)$

8.



9. Mesura el llarg, l'amplària i l'altura en la mateixa unitat (cm) i multiplica.

10. Calcula el volum de cada figura sabent que cada cub representa 1 cm^3 .

a) 60 cm^3 b) 60 cm^3 c) 60 cm^3 d) 60 cm^3 e) 60 cm^3 f) 60 cm^3

11. Multipliquem els valors de les tres dimensions (llarg, amplària i altura):

$$22 \cdot 15 \cdot 7 \text{ cm}^3 = 2310 \text{ cm}^3 = 2,31 \text{ dm}^3 = 2,31 \text{ l} = 0,00231 \text{ m}^3.$$

12.

- a) Prisma recto de base quadrada
 b) Prisma recto de base triangular
 c) Piràmide de base quadrada.

13. $25 \cdot 10 \cdot 1,5 \text{ m}^3 = 375 \text{ m}^3 = 375000 \text{ l}$

14.

- a) En un cub d'1 dm d'aresta caben 1000 cubs de 1 cm d'aresta.
 b) En un cub d'1 m d'aresta caben 1000 litres.
 c) En un cub d'1 dm d'aresta cab 1 litre.
 d) Un cub d'1 dm d'aresta té un volum de 1 l = 1 dm^3 .
 e) Un cub de 4 m d'aresta té un volum de 64 m³ = 64000 l .

15.

- a) Octaedre b) Prisma recto de base triangular c) Cilindre

16. No, observa que té 16 vèrtexs. Per tant, $16 - 32 + 16 = 0$. Recorda que aquesta fórmula es compleix per a poliedres sense forats.

Solucionari. Activitats calculadora

1. 175616 cm^3 .

2. Completa la taula

x	0	23	100	64	25	1	1000
x³	0	12167	1000000	262144	15625	1	1000000000

Solucionari. Autoavaluació

1c) 2b) 3c) 4a) 5d) 6a) 7b) 8d) 9a) 10d) 1 1d) 1 2b)