CONCEPTOS

BÁSICOS

MATEMÁTICAS

ACCESO A LA UNIVERSIDAD MAYORES 25 AÑOS

UNIDAD DIDÁCTICA 0: CONCEPTOS BÁSICOS

ÍNDICE

1. Operaciones en el conjunto de los números reales (R)

1.1. La suma y sus propiedades

Asociativa: (a+b) + c = a + (b+c)

Elemento neutro: es el número 0, ya que a + 0 = 0 + a = a

Elemento simétrico: Dado a, su elemento simétrico, llamado opuesto, es -a, ya que se cumple a + (-a) = (-a) + a = 0

Conmutativa: a+b = b+a

1.2. El producto (o multiplicación) y sus propiedades

Asociativa: (a*b)*c = a*(b*c)

Elemento neutro: es el número 1, ya que 1*a = a*1= a

Elemento simétrico: Dado a ≠ 0, su elemento simétrico, llamado inverso, es a-1 = 1/a, ya que a* (1/a)=1.

Conmutativa: a*b = b*a

Distributiva respecto de la suma: a*(b+c) = a*b + a*c

Relacionado con la multiplicación y la división de número reales se encuentra la **regla de los signos**. Simbólicamente estas reglas se pueden expresar de la siguiente forma:

1. (+)*(+) = (+) (+):(+) = (+)
2. (-)*(-) = (+) (-):(-) = (+)
3. (+)*(-) = (-) (+):(-) = (-)
4. (-)*(+) = (-) (-):(+) = (-)

EJERCICIOS RESUELTOS

1) 3–5 = –2
2) 3+2–7 = –2
3) 12–25+1 = –12

4) $12 + 4 - 20 = -4$
5) $2 - 3 - (-4) = -1 + 4 = 3$
6) $-12 - 4 - 20 = -36$
7) $5\cdot(-12 + 4) = 5\cdot (-8) = -40$
8) $12+(-4) -2 = 12 - 4 = 8$
9) $2-3 + (-4) = -1 - 1 = -2$
10) $4-2- (-3) - (-1) = 2 + 3 + 1= 6$
11) $4\cdot(-3) = -12$
12) $-4\cdot(-3) = 12$
13) $-4\cdot(-3)\cdot(-3) = -36$
14) $-(-3)\cdot(-3) = -9$
15) $-2\cdot 3\cdot(-3) = 18$
16) $4\cdot(4-2) = 4 \cdot 2 = 8$
17) $3\cdot(-12-2) = 3\cdot(-14) = -42$
18) $-4\cdot(-2-3) - 1 = -4\cdot(-5) - 1 = 20-1 =19$
19) $-2\cdot(-2) - 2\cdot(-2) = 4 + 4 = 8$
20) $-1\cdot(-2)+(-2)\cdot(-3)\cdot(-1) = 2 - 6 = -4$
21) $3 - 2\cdot 5 = 3 - 10 = -7$
22) $4 - 2\cdot(-5) = 4 + 10$
23) $2\cdot(-3) - 1 = -6-1 = -7$
24) $-3\cdot(-2)\cdot(-1) - 6 = -6 - 6 = -12$
25) $-10 - (-2)\cdot(-1)\cdot(-3) = -10 - (-6) = -10 + 6 = -4$
26) $10\cdot[3-2\cdot(5-4) -2\cdot(4-2)] =$
$= 10\cdot(3 - 2 - 2\cdot 2) = 10\cdot(1 - 4) = 10\cdot(-3) = -30$
27) $-3\cdot(-4 +(-2)) = -3\cdot(-4-2) = -3\cdot(-6) = 18$
28) $6\cdot(4+5) -4\cdot(5-3) = 6\cdot 9 -4\cdot 2 = 54-8 = 46$
29) $3\cdot(4-1-6) -4\cdot(2-3+6) = 3\cdot(-3) -4\cdot 5 = -9+20 = 11$
30) $-4\cdot[-3-2\cdot(-5+4) -2\cdot(-4+2)] =$
$= -4\cdot[-3+2 -2\cdot(-2)] = -4\cdot(-1+2) = -4$
31) $6\cdot(4 + 5) - 2\cdot(5 - 3) = 36-4 = 32$
32) $- 2\cdot(3 - 6) - 5\cdot(6 - 10) = -6+20 = 14$
33) $2\cdot(- 4 + 1) + 7\cdot(2 - 3) = -6-7 = -13$
34) $-10\cdot(- 1- 5) - (-5 - 3) = 50+8 = 58$
35) $-6\cdot(12 - 5) - 3\cdot(5 - 3) = -42-6 = -48$
36) $7\cdot(6 -(-5)) - 4\cdot(5 - 3) = 7\cdot 11 -4\cdot 2 = 77-8 = 69$
37) $2 - 3 - (- 4) = 2-3+4 = 3$
38) $-5\cdot(-12 + (-4)) = -5\cdot(-16) = -80$
39) $6\cdot(4 + 5) - 4\cdot(5 - 3) = 60-8 = 52$
40) $10\cdot[3-2\cdot(5-4) -2\cdot(4-2)] = 10\cdot(3-2-4) = 10\cdot(-3) = -30$
41) $4\cdot[(3+2) - 5] = 4\cdot 0 = 0$

2. VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real es su valor después de quitarle su eventual signo negativo. Si el número es positivo, su valor absoluto es él mismo; mientras que si es negativo, el valor absoluto es el número opuesto. Se nota |x| el valor absoluto de x. Por ejemplo: |- 4,5| = 4,5 (se quita su signo negativo) y |3,14| =3,14 (no se modifica).

3. DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS

Llamaremos número primo a aquel número que es divisible por sí mismo y por la unidad. Todo número natural puede escribirse como producto de factores primos, diremos entonces que se ha factorizado. Ejemplo: “Factorizar 180”

DIVISORES	
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Luego : 180 = 2*2*3*2*5 = 2^3*3*5.

Las reglas de divisibilidad son criterios que sirven para saber si un número es divisible por otro sin necesidad de realizar la división.

Divisible significa que al dividirlo por ese número el resultado es una división exacta con resto cero. Por ejemplo, 30 es divisible por 5 porque al dividirlo por 5 el resto es cero 30:5=6.

Las reglas:

Un número es divisible por 2, 3 ó 5 si:		
2	Si termina en 0 o en cifra par	Ejemplos 50; 192; 24456;
3	Si la suma de sus cifras es múltiplo de tres	Ejemplos: 333 (dado que 3+3+3 =9); 9 es un múltiplo de 3; (3x3=9)
5	Si termina en 0 o en 5	Ejemplos 35; 70; 1115;
7	Resta el número sin las unidades y el doble de las unidades y si da múltiplo el número es múltiplo de 7	Ejemplos 672; 67-4=63 Si
11	Si sumas las cifras en posiciones pares y restas las otras, la respuesta es:	Ejemplo

Estas reglas son importantes dado que te facilitan el cálculo de las descomposición de factores que a su vez sirven para reducir y simplificar fracciones.

4. MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M. C. D.)

El MÁXIMO COMÚN DIVISOR de dos o más números es el número, más grande posible, que permite dividir a esos números.

1• Para calcularlo. De los números que vayas a sacar el máximo común divisor, se ponen uno debajo del otro, se sacan todos los divisores de los dos números y el máximo que se repita es el máximo común divisor (M.C.D.)

2• Ejemplo: Sacar el M.C.D. de 20 y 10:

20:	1, 2, 4, 5, 10 y 20
10:	1, 2, 5 y 10

Esto sirve para números pequeños. Pero para números grandes hay otra manera: la descomposición de factores.

Forma rápida de calcular el Máximo común Divisor (M.C.D.).

Ejemplo: Sacar el M. C. D. de 40 y 60:

1º Tienes que saber las reglas divisibilidad. Haces la descomposición de factores poniendo números primos. Por ejemplo para 40, en la tabla de abajo, se va descomponiendo en 2, 2, 2 y 5.

40	2	60	2
20	2	30	2
10	2	15	3
5	5	5	5
1		1	

Así, $40=2*2*2*5=2^3*5$, y $60=2*2*3*5=2^2*3*5$.

2º De los resultados, se cogen los números repetidos de menor exponente y se multiplican y ese es el M.C.D. En el ejemplo: M.C.D = $2^2*5=4*5=20$.

5. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.)

Antes de nada, veamos el significado de la palabra “múltiplo”.

Múltiplos: los múltiplos de un número se obtienen multiplicando dicho número por los números naturales 0, 1, 2, 3, 4, 5.....
Ejemplo: múltiplos del 7: 7x0=0; 7x1=7; 7x2=14; 7x3=21; 7x4=28; 7x5=35 ....
Por lo tanto, son múltiplos del 7: 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 48, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, 105, 112, 119, 126, 133, 140, 147, 154, 161, 168...

Veamos ahora como se calcula entonces el mínimo común múltiplo. En primer lugar escribimos su definición. El mínimo común múltiplo (m. c. m.) de dos o más números es el menor múltiplo común distinto de cero.

Ejemplo: Averiguar el m.c.m. de 20 y 10:

20:	20, 40, 60, 80...
10:	10, 20, 30...

20 es el múltiplo menor que es común a ambos números. En consecuencia, m.c.m.=20.

Ejemplo: Calcular el m. c. m. de 4, 5 y 6.

Se hace la descomposición de factores (que ya la explicamos en el apartado dedicado al máximo común divisor). Lo hacemos de la siguiente forma:
4= 2*2=2^2
5= 5
6= 2*3
Se toman los factores comunes y no comunes con el mayor exponente y se multiplican: 2^2 * 3 * 5 = 60. El m.c.m de 4,5 y 6 es 60.

Uno de los usos del m.c.m. es el cálculo de sumas y restas con quebrados (=fracciones). A continuación, dedicaremos un apartado a trabajar con fracciones.

6. OPERACIONES CON FRACCIONES

6.1. Sumar fracciones

Se calcula el m.c.m de los denominadores. Entonces se pone como denominador ese número. A continuación, el numerador de la primera fracción se multiplica por la siguiente operación: (m.c.m./denominador de la primera fracción). Después se realiza la misma operación pero con respecto a numerador y denominador de la segunda fracción. Finalmente, se suman estos números. Ejemplo:

$$\frac{5}{3}+\frac{1}{2}_{(M.C.M(2,3)=6} = \frac{5\cdot(6/3)+1\cdot(6/2)}{6} = \frac{5\cdot2+1\cdot3}{6} = \frac{13}{6}$$

6.2. Restar fracciones

Lo mismo que la suma de fracciones, pero al final en vez de sumar, se restan. Ejemplo:

$$\frac{5}{3}+\frac{1}{2}_{(M.C.M(2,3)=6} = \frac{5\cdot(6/3)+1\cdot(6/2)}{6} = \frac{5\cdot 2+1\cdot 3}{6} = \frac{13}{6}$$

6.3. Multiplicar fracciones

Es muy fácil; se multiplican los numeradores para calcular el nuevo numerador y se multiplican los denominadores para calcular el nuevo denominador. Ejemplo:

$$\frac{5}{3} x \frac{1}{2} = \frac{5\cdot 1}{3\cdot 2} = \frac{5}{6}$$

6.4. Dividir fracciones

También muy fáciles de hacer. Debemos usar la vieja regla: "se multiplican en cruz". Es decir, el numerador se calcula multiplicando el primer numerador por el segundo denominador. El denominador se calcula multiplicando el primer denominador por el segundo numerador. Ejemplo:

$$\frac{5}{3} : \frac{1}{2} = \frac{5\cdot 2}{3\cdot 1} = \frac{10}{3}$$

Ejercicios resueltos

1) $1+\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{1\cdot 1}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$

2) $\frac{3}{5}-6=\frac{3\cdot 1}{5}-\frac{5\cdot 6}{5}=\frac{3-30}{5}=-\frac{27}{5}$

3) $\frac{4}{6}-7=\frac{4\cdot 1}{6}-\frac{7\cdot 6}{6}=\frac{4-42}{6}=\frac{4\cdot 1-7\cdot 6}{6}=-\frac{38}{6}=-\frac{19}{3}$

4) $\frac{1}{4}-\frac{3}{14}=\frac{1\cdot 7}{28}-\frac{3\cdot 2}{28}=\frac{7-6}{28}=\frac{1}{28}$

5) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 3}{6}+\frac{2\cdot 2}{6}-\frac{1\cdot 1}{6}=\frac{3+4-1}{6}=\frac{6}{6}=1$

6) $\frac{1}{2}-3+\frac{5}{3}=\frac{1\cdot 3}{6}-\frac{3\cdot 6}{6}+\frac{5\cdot 2}{6}=\frac{3-18+10}{6}=-\frac{5}{6}$

7) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 6}{6}+\frac{1\cdot 3}{6}+\frac{1\cdot 1}{6}=\frac{6+3+1}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

8) $$\frac{60}{20}+\frac{1}{10}-\frac{2}{30}=3+\frac{1}{10}-\frac{1}{15}=\frac{3\cdot 30}{30}+\frac{1\cdot 3}{30}-\frac{1\cdot 2}{30}=\frac{90}{30}+\frac{3}{30}-\frac{2}{30}=\frac{90+3-2}{30}=\frac{91}{30}$$

9) $$\frac{3}{20}+\frac{1}{25}-\frac{11}{60}=\frac{3\cdot 15}{300}+\frac{1\cdot 12}{300}-\frac{11\cdot 5}{300}=\frac{45+12-55}{300}=\frac{2}{300}=\frac{1}{150}$$

10) $$\frac{14}{15}-\frac{1}{45}+3-\frac{2}{75}=\frac{14}{15}-\frac{1}{45}+3-\frac{2}{75}=\frac{14\cdot 15-5+3\cdot 225-2\cdot 3}{225}=$$
$$=\frac{210-5+675-6}{225}==\frac{874}{225}$$

11) $$\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{5}-1\right)=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{1}{2}-\left(\frac{3\cdot 1}{5}-\frac{1\cdot 5}{5}\right)=\frac{1}{2}-\left(\frac{3-5}{5}\right)=\frac{1}{2}-\left(\frac{-2}{5}\right)=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{5}{10}+\frac{4}{10}=\frac{9}{10}$$

12) $$-\frac{5}{4}-\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-1\right)=-\frac{5}{4}+\frac{1}{8}=\frac{-10+1}{8}=-\frac{9}{8}$$

13) $$-\frac{5}{4}-\left(-3-\frac{1}{6}-1\right)+\frac{2}{7}=-\frac{5}{4}-\left(\frac{-18-1-6}{6}\right)+\frac{2}{7}=-\frac{5}{4}+\frac{25}{6}+\frac{2}{7}=$$
$$=\frac{-21+14+12}{84}=\frac{5}{84}$$

14) $$\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-2\right)-\frac{1}{3}=\frac{3}{2}-\left(\frac{-25}{12}\right)-\frac{1}{3}=\frac{3}{2}+\frac{25}{12}-\frac{1}{3}=\frac{39}{12}=\frac{13}{4}$$

20) $$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$

21) $$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{8}$$

22) $$\frac{(-1)}{2}\cdot\frac{3}{5}=-\frac{3}{10}$$

23) $$\frac{2}{3}\cdot\frac{(-5)}{7}\cdot\frac{9}{5}=-\frac{2\cdot 3}{7}=-\frac{6}{7}$$

24) $$\frac{1}{2}\cdot\frac{(-2)}{3}\cdot\frac{3}{5}=-\frac{1}{5}$$

25) $$\frac{1}{2}:\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$$

26) $\frac{6}{7}:\frac{(-2)}{3}=-\frac{18}{14}=-\frac{9}{7}$

27) $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}+\frac{5}{2}:\frac{7}{2}=\frac{3}{5}+\frac{5}{7}=\frac{46}{35}$

28) $\frac{3}{2}:\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3\cdot 2}{2\cdot 1}+\frac{3\cdot 1}{2\cdot 2}=\frac{6}{2}+\frac{3}{4}=3+\frac{3}{4}==\frac{12+3}{4}=\frac{15}{4}$

29) $\frac{12}{5}\cdot\frac{(-3)}{2}-\frac{5}{(-2)}:\frac{(-7)}{2}=-\frac{18}{5}-\frac{5}{7}=-\frac{151}{35}$

36) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$

37) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}:\frac{2}{3}}=1+\frac{1}{\frac{7}{4}}=1+\frac{4}{7}=\frac{11}{7}$

38) $\frac{3-\left[-\frac{1}{2}-5\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]}{-4+\frac{1}{2}}=\frac{3-\left[-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right]}{-\frac{7}{2}}=\frac{3-\left[-\frac{6}{2}\right]}{-\frac{7}{2}}=\frac{3+3}{-\frac{7}{2}}=\frac{6}{-\frac{7}{2}}=-\frac{12}{7}$

39) $1-\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}=1-\frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

46) $\frac{\frac{(-4)}{2}:\left\{\frac{3}{9}\cdot\left[\frac{32}{4}-\frac{16}{2}:\left(\frac{1}{3}-1-\frac{3}{2}\right)\right]-1:\frac{1}{2}\right\}}{\left(1-\frac{1}{2}\right):\frac{3}{2}+(-2):\frac{1}{2}}=\frac{-2:\left\{\frac{1}{3}\cdot\left[8-8:\frac{13}{6}\right]-2\right\}}{\frac{1}{2}:\frac{3}{2}-4}=$

$=\frac{-2:\left\{\frac{1}{3}\cdot\left[8-\frac{64}{13}\right]-2\right\}}{\frac{1}{3}-4}=\frac{-2:\left\{\frac{13}{3}-2\right\}}{-\frac{11}{3}}=\frac{2:\frac{7}{3}}{\frac{11}{3}}=\frac{\frac{6}{7}}{\frac{11}{3}}=\frac{18}{77}$

7. SACAR FACTOR COMÚN

Sacar factor común consiste en extraer el monomio que se repite en todos los términos.

Ejemplos:

$15X^3 + 3X^2 - 12X = 3X(5X^2 + X - 4)$

$4x^3 - 12x^2 + 6x = 2x\ (4x^3 - 12x^2 + 6x)\ 2x\ 2x\ 2x$

En otras palabras, se busca el máximo factor común y dividimos cada término del polinomio por el máximo factor común. En el caso anterior, el resultado es el siguiente: $4x^3 - 12x^2 + 6x = 2x\ (2x^2 - 6x + 3)$

Otro ejemplo. Simplificar la expresión $6x^5 - 8x^4 - 10x^3$

El máximo factor común entre los coeficientes numéricos es 2. La variable x se repite en todos los términos y al exponente menor que aparece es 3. Por lo tanto el máximo factor común es:

$6x^5 - 8x^4 - 10x^3 = 2x^3(\ 6x^5 - 8x^4 - 10x^3)\ 2x^3\ 2x^3\ 2x^3$

$= 2x^3\ (\ 3x^2 - 4x - 5)$

El paso de división es opcional y lo podemos hacer mentalmente.

Otro ejemplo. Simplificar la expresión $3x^2 - 9x$.

El máximo factor común es 3x y dividiendo por este obtenemos:
$3x^2 - 9x = 3x\ (\ x - 3\ )$

8. PRODUCTOS NOTABLES

Existen algunos productos, que por su continuo uso en álgebra y en cálculo, conviene MEMORIZAR. Estos productos son:

8.1. Binomio al cuadrado.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

8.2. Suma por diferencia de dos cantidades.

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

9. PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS Y LOS RADICALES

Aquí se muestran algunas de las propiedades más interesantes.

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

b) $a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

c) $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$

d) $a^p \cdot b^p = \left(a \cdot b\right)^p$

e) $\left(a^p \cdot b^q\right)^m = a^{p \cdot m} \cdot b^{q \cdot m}$

f) $a^0 = 1$

g) $a^1 = a$

h) $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

i) $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$

j) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$

k) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$

l) $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

m) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

n) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}} = \left(\left(a^p\right)^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{p}{mn}}$

o) $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[p]{a^q} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{np}}$

EJERCICIOS RESUELTOS

a) $2^4 \cdot 2^2 = 2^{4+2} = 2^6$

b) $3 \cdot 3^2 \cdot 3^6 = 3^{1+2+6} = 3^9$

c) $2^4 \cdot 2^{-2} = 2^{4+(-2)} = 2^{4-2} = 2^2$

d) $2^{-4} \cdot 2^{-2} = 2^{-4+(-2)} = 2^{-4-2} = 2^{-6} = \dfrac{1}{2^6}$

e) $2^{-1} \cdot 2^3 \cdot 2^{-2} = 2^{-1+3+(-2)} = 2^{-1+3-2} = 2^0 = 1$

a) $5^3 : 5^2 = 5^{3-2} = 5^1 = 5$

b) $11^3 : 11^{-3} = 11^{3-(-3)} = 11^{3+3} = 11^6$

c) $\dfrac{2^2}{2^{-3}} = 2^{2-3} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

d) $7^{-8} : 7^3 = 7^{-8+3} = 7^{-5} = \dfrac{1}{7^5}$

e) $\dfrac{2^2 : 2^{-3}}{2^{-3}} = \dfrac{2^{2-(-3)}}{2^{-3}} = \dfrac{2^{2+3}}{2^{-3}} = \dfrac{2^5}{2^{-3}} = 2^{5-(-3)} = 2^{5+3} = 2^8$

f) $\left(3^5 : 3^{-2}\right) : 3^{-4} = 3^{5-(-2)} : 3^{-4} = 3^{5+2} : 3^{-4} = 3^7 : 3^{-4} = 3^{7-(-4)} = 3^{7+4} = 3^{11}$

a) $\left(3^4\right)^2 = 3^{4\cdot 2} = 3^8$

b) $\left(2^{-3}\right)^{-3} = 2^{-3\cdot(-3)} = 2^9$

c) $\left[\left(3^{-3}\right)^{-2}\right]^{-2} = 3^{-3\cdot(-2)\cdot(-2)} = 3^{6\cdot(-2)} = 3^{-12}$

d) $\left(3^4\right)^0 = 3^{4\cdot 0} = 3^0 = 1$

e) $\left\{\left[\left(3^3\right)^{-1}\right]^{-2}\right\}^{-2} = 3^{3\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-1)} = 3^{3\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-1)} = 3^{-6} = \dfrac{1}{3^6}$

a) $\dfrac{\left(5^{2}\right)^{3}}{\left(5^{3}\right)^{7}}=\dfrac{5^{2\cdot 3}}{5^{3\cdot 7}}=\dfrac{5^{6}}{5^{21}}=5^{6-21}=5^{-15}=\dfrac{1}{5^{15}}$

b) $\left(3^{2}\right)^{3}:\left(3^{3}\right)^{3}=5^{2\cdot 3}:5^{3\cdot 3}=3^{6}:3^{9}=3^{6-9}=3^{-3}=\dfrac{1}{3^{3}}$

c) $\dfrac{\left(3^{2}\right)^{5}\cdot 3^{3}}{\left(3^{3}\right)^{2}}=\dfrac{3^{2\cdot 5}\cdot 3^{3}}{3^{3\cdot 2}}=\dfrac{3^{10}\cdot 3^{3}}{3^{6}}=\dfrac{3^{10+3}}{3^{6}}=\dfrac{3^{13}}{3^{6}}=3^{13-6}=3^{7}$

d) $\dfrac{\left(5^{-2}\cdot 5^{-3}\right)^{-1}:5^{2}}{5^{3}:\left(\left(5^{2}\right)^{2}\right)^{-1}}=\dfrac{\left(5^{-2+(-3)}\right)^{-1}:5^{2}}{5^{3}:5^{2\cdot 2\cdot(-1)}}=\dfrac{\left(5^{-2-3}\right)^{-1}:5^{2}}{5^{3}:5^{-4}}=\dfrac{5^{(-5)\cdot(-1)}:5^{2}}{5^{3-(-4)}}=\dfrac{5^{5}:5^{2}}{5^{3+4}}=\dfrac{5^{5-2}}{5^{7}}=\dfrac{5^{3}}{5^{7}}=5^{3-7}=$

$=5^{-4}=\dfrac{1}{5^{4}}$

e) $\dfrac{\left(2^{-2}\right)^{-3}:\left(2^{-3}\right)^{2}}{\left(2^{-3}\right)^{-1}\cdot\left(2^{-1}\right)^{-2}}=\dfrac{2^{-2\cdot(-3)}:2^{-3\cdot 2}}{2^{-3\cdot(-1)}\cdot 2^{-1\cdot(-2)}}=\dfrac{2^{6}:2^{-6}}{2^{3}\cdot 2^{2}}=\dfrac{2^{6-(-6)}}{2^{3+2}}=\dfrac{2^{6+6}}{2^{5}}=\dfrac{2^{12}}{2^{5}}=2^{12-5}=2^{7}$

POLINOMIOS

MATEMÁTICAS

ACCESO A LA UNIVERSIDAD MAYORES 25 AÑOS

UNIDAD I: ***POLINOMIOS***

En esta unidad se estudian en general, los polinomios en una variable. En particular, las operaciones con polinomios. Especialmente, se estudia el caso de la división de los polinomios entre el binomio (x-a), la regla de Ruffini y la factorización de polinomios. Seguidamente, en esta unidad didáctica describimos el proceso general de resolución de las ecuaciones polinómicas de primer, segundo y tercer grado. La unidad termina con la realización de distintos ejercicios y problemas de aplicación sobre el tema.

1) Introducción: Conjuntos numéricos y expresiones algebraicas

El concepto de número es tan antiguo o más que las propias Matemáticas. El sistema numérico tal cual lo conocemos hoy en día es el resultado de una evolución gradual. El primer conjunto numérico del que se tiene conocimiento es el de los

números Naturales $N = \{1,2,3,\ldots\}$, utilizados para contar y, que no siempre se han representado con los mismos símbolos. Por ejemplo, los romanos utilizaban los símbolos I, II, III, IV, ... La operación suma a+b y producto $a \cdot b$ de dos números

naturales a y b son también números naturales, es decir, dichas operaciones son cerradas en el conjunto de los números naturales. Sin embargo, para poder resolver ecuaciones de la forma x+a=b con a y b números naturales necesitamos ampliar dicho conjunto, introduciendo los llamados números enteros negativos $\{-1,-2,-3,\ldots\}$ y el cero obteniendo así, la solución de la ecuación anterior como x = b - a.

Al conjunto de lo números naturales o enteros positivos, enteros negativos y el cero se les denomina conjunto de **números enteros** y los denotamos por Z. Las operaciones suma y producto de números enteros también son operaciones internas.

Por otra parte, necesitamos introducir los **números racionales** o fracciones $\frac{a}{b}$ a y b son números enteros cualesquiera con $b \neq 0$ que nos permiten resolver ecuaciones de la forma ax = b. El conjunto de los números racionales normalmente se denota por Q. Dicho conjunto también es cerrado respecto de las operaciones suma y producto. La medida de magnitudes plantea problemas para cuya solución los números racionales tampoco son suficientes. Por ejemplo: La resolución del problema, planteado por los griegos, de buscar el lado del cuadrado que tuviera el doble de área que el cuadrado de lado unidad, precisa de la resolución de la ecuación $x^2 = 2$, cuya solución sabemos que es $x = \sqrt{2}$.

A los números, que al igual que $\sqrt{2}$, es decir, que no son racionales, o lo que es equivalente, que no podemos representarlos de la forma $\frac{m}{n}$ con m y n números enteros, se les llama **números irracionales**.

Al conjunto de los números racionales e irracionales se le denomina conjunto de los **números reales** y, normalmente los denotamos por $\Re$. Las operaciones suma y producto de números reales también son operaciones cerradas. Los números reales pueden representarse por puntos de una recta, llamada eje real. Recíprocamente, para cada punto situado sobre la recta hay uno y sólo un número real. El punto correspondiente al cero se llama origen. Si un punto B sobre la recta correspondiente a un número real b está situado a la izquierda de un punto C representado por un número real c, decimos que b es menor que c y lo denotamos por b < c ó c > b y que cumple las siguientes propiedades:

- Se verifica una y sólo una de las relaciones b = c, b < c, b > c
- $b < c \Rightarrow b + d < c + d$ para todo $d \in \Re$.
- b > 0 y c >0 $\Rightarrow b \cdot c > 0$

Es decir, el conjunto $\Re$ es un conjunto totalmente ordenado. Sin embargo, las ecuaciones polinómicas como $x^2 + 1 = 0$ no tienen solución en $\Re$. Para resolver este tipo de ecuaciones tenemos que introducir los números complejos, los cuales de momento no van a ser motivo de estudio.

Por otra parte, en esta breve introducción a los diferentes conjuntos numéricos nos han aparecido expresiones en las que se utilizan letras, números y signos de operaciones. Una expresión de este tipo recibe el nombre de **expresión algebraica**. Por ejemplo, para expresar el valor del perímetro y del área de un terreno rectangular.

Si suponemos que mide "x" metros de largo e "y" metros de ancho, obtendremos:

Perímetro: 2x + 2y ; Area: xy. Ambas son expresiones algebraicas (recuérdese que el signo de la multiplicación acostumbra a no ponerse). Si en una expresión algebráica se sustituyen las letras por número y se realiza la operación indicada se obtiene un número que es el "**valor númerico"** de la expresión algebraica para los valores de las letras dados. En el **ejemplo del terreno rectangular**, si el largo del terreno fueran 50 m (x = 50) y el ancho 30 m (y = 30), el valor numérico de:

Perímetro = 2 · 50 + 2 · 30 = 100 + 60 = 160 m
Área = 50 · 30 = 1500 m^2
Naturalmente debe observarse que el valor numérico de una expresión algebraica no es único sino que depende del valor que demos a las letras que intervienen en ella.

2) Concepto de polinomio

Los **polinomios** de una variable son expresiones algebraicas en las que aparecen unos números determinados, llamados **coeficientes**, relacionados con una variable mediante las operaciones elementales de suma, diferencia y multiplicación. Es decir, un polinomio, **P**, con coeficientes reales es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \Re$.

Algunos de los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ pueden ser igual a cero. Si suponemos que $a_n \neq 0$ diremos que n es el grado del polinomio. Es decir, se llama **grado** de un polinomio al exponente de la potencia máxima con coeficiente distinto de cero. Escribiremos grad(P)=n, si $a_n \neq 0$, además, dicho coeficiente a_n recibe el nombre de **coeficiente principal** de **P**.

Los polinomios se suelen representar por letras tales como **P, Q, S** o bien si se especifica la variable por **P(x), Q(x), S(x).**

Ejemplo 1.

- *Los números reales se pueden considerar como polinomios de grado cero. Es decir, P(x)=6, representa al polinomio P(x)=3x^0*
- *Los polinomios de grado uno son de la forma P(x)= a_1x+a_0 con $a_1 \neq 0$, y también reciben el nombre de polinomios lineales. Un caso particular p(x)=5x-1.*
- *Los polinomios de segundo grado son de la forma $P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ reciben el nombre de polinomio cuadrático. Por ejemplo p(x)=3x^2+x+7.*

3) Operaciones con polinomios

a) **Suma y diferencia de polinomios.** Dados dos polinomios P(x) y Q(x), escritos de la siguiente forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

donde si grad(Q)=m<n=grad(P), entonces $b_n = b_{n-1} = \ldots = b_{m+1} = 0.$

Definimos la suma de dichos polinomios Py Q como el polinomio

$$S(x) = (P+Q)(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_0 + b_0)$$

Análogamente se define la diferencia como el polinomio

$$D(x) = (P-Q)(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_0 - b_0)$$

b) Producto de polinomios. El producto de P y Q es el polinomio $P \cdot Q$ cuyos coeficientes vienen dadas por

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0, \qquad 0 \le k \le grad(P) + grad(Q)$$

Ejemplo 2.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 2x^3 & -3x^2 & & +1 \\
 & & & 2x & -3 \\
\hline
 & -6x^3 & +9x^2 & & -3 \\
4x^4 & -6x^3 & & +2x & \\
\hline
4x^4 & -12x^3 & +9x^2 & +2x & -3
\end{array}$$

b) **División Euclídea de polinomios.** De manera similar a la división de números enteros tenemos el siguiente resultado para polinomios: dados dos polinomios P y S, con $S \neq 0$, existen dos polinomios Q y R, tales que

$$P = SQ + R, \qquad grad(R) < grad(S).$$

Llamaremos al polinomio Q cociente de la división de P por S y diremos que R es el resto de dicha división. Además, los polinomios Q y R son únicos

Ejemplo 3.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & -3x^2 & & +3 & x^2-x+1 \\
\cline{5-5}
-4x^3 & +4x^2 & -4x & & 4x+1 \\
\cline{1-4}
\backslash & x^2 & -4x & +3 & \\
 & -x^2 & +x & -1 & \\
\cline{1-4}
 & \backslash & -3x & +2 &
\end{array}
$$

c)Regla de Ruffini.

En el apartado anterior hemos visto la división de polinomios, en general, pero uno de los casos más importantes de la división de polinomios es el que tiene por divisor un binomio del tipo x - a, siendo "a" un número entero; por ejemplo

(x - 1), (x + 2), etc. Además de realizarse la división por el método general expuesto en el apartado anterior, se puede realizar usando la regla de Ruffini en la que se procede de la siguiente forma: en primer lugar se deben colocar todos los coeficientes del dividendo ordenados de mayor a menor grado y si falta el de algún grado intermedio colocar un 0. A continuación:

- Se "baja" el primer coeficiente del dividendo.

- Se multiplica "a" por el coeficiente bajado y se coloca el resultado debajo del segundo coeficiente (el signo de a será positivo si el divisor es del tipo (x-a) y negativo si el divisor es del tipo (x+a).

- Se suma el segundo coeficiente con el resultado anterior.

- Se continúa el proceso hasta terminar con los coeficientes.

Los números de la fila inferior obtenida son los coeficientes del cociente (de un grado menor al dividendo) excepto el último número que es el valor del resto.

Ejemplo 4. $(2x^2+3x^3+-2x+x^4+4):(x-2)$

Primero se ordena el dividiendo $(x^4+3x^3+2x^2-2x+4)$*. A continuación, se escriben sólo los coeficientes con sus signos. El término independiente del divisor (x-2) se pone a la izquierda con el signo cambiado y se procede.*

	1	3	2	-2	4
2		2	10	24	44
	1	5	12	22	48

Es decir, el cociente es $x^3+5x^2+12x+22$ *y el resto 48.*

4) **Resolución de ecuaciones polinómicas.** En este apartado vamos a tratar la resolución de ecuaciones polinómicas de grado menor ó igual a tres. Para ello, en primer lugar vamos a ver el siguiente teorema:

Teorema del resto:

" El resto de la división de un polinomio P(x) entre un binomio de la forma (x - a), es igual al valor numérico del polinomio cuando x toma el valor "a" que podemos expresar como P(a) "

Ejercicio 1- Calcula el valor numérico del polinomio $x^3 + 6x^2 - 3x - 4$ en los casos: $x = 0$; $x = -2$; $x = 1$. Realiza la división del polinomio por el binomio del tipo (x - a) adecuado, comprobando que el resto de la división coincide con el valor numérico calculado antes.

a) **Factorización de polinomios**

Una aplicación muy importante de la división de polinomios es la factorización de polinomios, y en concreto conseguir factores del tipo (x-a).

Ejemplo 5. *Si se realiza el producto $(x-2)\cdot(x+3)$ se obtiene el polinomio $x^2 + x - 6$, por lo que puede expresarse dicho polinomio como producto de factores: $x^2 + x - 6 = (x-2) \cdot (x+3)$*

Conseguir, cuando sea posible, expresar un polinomio como producto de binomios de primer grado, en principio del tipo del ejemplo, o al menos algún binomio de ese tipo, es lo que se denomina "factorizar el polinomio".

Para conseguir factores del tipo mencionado (x - a), bastará encontrar valores de "a" para los que la división, que se efectúa por la regla de Ruffini, sea exacta, o sea que el resto sea 0 y aplicar que:

"***Dividendo = divisor · cociente + resto***" o $D = d \cdot c + r$, con lo que quedaría $D = d \cdot c$ que en términos de polinomios con la variable x, se puede expresar: $D(x) = d(x) \cdot c(x)$ obteniéndose ya el polinomio dividendo descompuesto en dos factores.

Habrás podido observar que en todos los casos en los que el valor numérico ha sido 0, la división del polinomio por "x - a" es exacta (teorema del resto).

Si has probado bien, habrás encontrado que el valor numérico era 0 para x = 1 (a = 1) y para x = -2 . ¿cuál es el cociente para a = 1?

Ejercicio 2*- Dado el polinomio $2x^3 + x^2 - 5x + 2$, encontrar valores de "a" para los que el valor numérico del polinomio sea 0.*

Habrás podido observar que en todos los casos en los que el valor numérico ha sido 0, la división del polinomio por "x - a" es exacta (teorema del resto).

Si has probado bien, habrás encontrado que el valor numérico era 0 para x = 1 (a = 1) y para x = -2 . ¿cuál es el cociente para a = 1?.

Nota**: **Una regla muy útil: Los valores de "x = a" enteros, para los que el valor numérico de un polinomio es cero, son siempre divisores del término independiente del polinomio.

Con esta regla es más fácil buscar los valores de "a". Así en el ejercicio anterior sólo pueden ser 1, -1, 2 y -2.

Ejemplo 6. *El polinomio siguiente se factoriza:*

$2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (x - 1)(x + 2)(2x - 1)$

Por tanto, el valor numérico de dicho polinomio para x = 1 y x = -2 es 0, es decir, si escribimos la ecuación:

$2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$, sabemos que dos soluciones de la misma son x = 1 y x = -2.

Estos valores de x se llaman "raices del polinomio", que son por tanto soluciones de la ecuación P(x) = 0.

De la ecuación: $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (x - 1)(x + 2)(2x - 1) = 0$ se obtiene, además de las dos soluciones anteriores, la solución $2x - 1 = 0$; $x = 1/2 = 0.5$.

1. RESUMEN

- **Operaciones con polinomios**
  - Dados dos polinomios P(x) y Q(x), escritos de la siguiente forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{,}$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \text{.}$$

$$S(x) = (P+Q)(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_0 + b_0)$$

$$D(x) = (P-Q)(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_0 - b_0)$$

  - $P \cdot Q$ cuyos coeficientes vienen dadas por

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0, \qquad 0 \le k \le grad(P) + grad(Q)$$

  - Dados dos polinomios P y S, con $S \neq 0$, existen dos polinomios Q y R, tales que

$$P = SQ + R, \qquad grad(R) < grad(S).$$

Llamaremos al polinomio Q cociente de la división de P por S y diremos que R es el resto de dicha división. Además, los polinomios Q y R son únicos

- **Dado un polinomio P(x) las siguientes afirmaciones son equivalentes:**

- El valor numérico para x = a es 0 o sea P(a) = 0

- La división del polinomio P(x) entre el binomio (x - a) es exacta

- (x - a) es un factor del polinomio: P(x) = (x - a) C(x), siendo C (x) el cociente de P(x) : (x-a)

- La ecuación P(x) = 0 tiene una solución para x = a.

- **Teorema del resto:** ***" El resto de la división de un polinomio P(x) entre un binomio de la forma (x - a), es igual al valor numérico del polinomio cuando x toma el valor "a" que podemos expresar como P(a) "***
- ***: Los valores de "x = a" enteros, para los que el valor numérico de un polinomio es cero, son siempre divisores del término independiente del polinomio.***

7. ACTIVIDADES

1) Dados los polinomios P(x)=x^2+x+1, Q(x)=x2-1, R(x)=2x^2+ 5x-1 y S(x)=x^3 +x^2+1. Calcular: S(x)+P(x), R(x)-S(x), P(x)Q(x), R(x)S(x).

2) Efectuar las siguientes divisiones entre polinomios:

   a. $(x^3 + x^2 - 1) : (x-1)$

   b. $(x^6 + 3x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x + 2) : (x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 1)$

   c. $\left(3x^5 + 2x^4 + 7x^3 + 2x - 3\right) : (x\ ^2)$

3) Determina el polinomio y el resto aplicando la regla de Ruffini de las divisiones:

$$a)\ \left(x^4 - 2x^2 + 3x^3 - 1\right) : (x + 2) \qquad \text{b)}\ \left(4x^3 - 2x + 1\right) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

3) Factorizar los siguientes polinomios

   a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

   b) $x^3 + 2x^2 + x$

   c) $3x^5 + 2x^4 + 7x^3 + 2x - 3$

   d) $x^3 + x^2 - x - 1$

e) $x^3 + 2x^2 + x$

f) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$

g) $2x^3 - 2x^2 + x - 1$

h) $9x^2 - 25$

i) $x^2 - 6x + 9$

j) $9x^4 + 6x^2 + 1$

4) Calcular el valor de m para que el resto de la división del polinomio $x^3 + mx^2 - 2x + m$ entre x-1 sea 1.

<u>Más Ejercicios:</u>

(1) Dados los polinomios:

A: $x^3 + 5x^2 - 8x + 2$
B: $2x^3 - 7x^2 + 1$
C: $4x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$

Calcular:

α) **A + B – 2C**
β) **A – B/5**
χ) **A x B**
δ) **C : A**
ε) **C : B**

Solución:
a) Lo haremos por partes. Primero puede ser la suma de A + B

$(x^3 + 5x^2 - 8x + 2) + (2x^3 - 7x^2 + 1) = x^3 + 2x^3 + 5x^2 - 7x^2 - 8x + 2 + 1 =$
$= 3x^3 - 2x^2 - 8x + 3$

Multiplico el polinomio C por 2

$2 \cdot (4x^4 + x^3 + x^2 - x + 1) = 8x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 2$

Resto al resultado de A + B, el resultado de 2C

$A + B - 2C = 3x^3 - 2x^2 - 8x + 3 - (8x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 2)$

Me fijo que 2C tiene delante un signo menos que me va a cambiar los signos de dentro del paréntesis

$A + B - 2C = 3x^3 - 2x^2 - 8x + 3 - 8x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 =$
$= -8x^4 + x^3 - 4x^2 - 6x + 1$

b) primero dividiremos B por 5

$(2x^3 – 7x^2 + 1) / 5 = (2/5)\, x^3 – (7/5)\, x^2 + 1/5$

se lo restaremos a A

$(x^3 + 5x^2 – 8x + 2) – ((2/5)\, x^3 – (7/5)\, x^2 + 1/5) = (1 –2/5)x^3 + (5+7/5)x^2 – 8x + (2–1/5)=$

$= 3/5\, x^3 + 32/5\, x^2 – 8x + 9/5$

c) A x B tenemos que multiplicar todos los términos

			$+ x^3$	$+ 5x^2$	$- 8x$	$+ 2$
			$+ 2x^3$	$- 7x^2$		$+ 1$
			$+ x^3$	$+ 5x^2$	$- 8x$	$+ 2$
	$- 7x^5$	$- 35\, x^4$	$+ 56x^3$	$- 14\, x^2$		
$+ 2x^6$	$+ 10x^5$	$- 16\, x^4$	$+ 4x^3$			
$+ 2x^6$	$+ 3\, x^5$	$- 51\, x^4$	$+ 61\, x^3$	$- 9\, x^2$	$- 8x$	$+ 2$

d) C : A

Solución:

$4x^4$	$+ x^3$	$+ x^2$	$- x$	$+1$		x^3	$+5x^2$	$-8x$	$+2$
$-4x^4$	$-20\, x^3$	$+32x^2$	$-8x$			$4x$	-19		
	$-19\, x^3$	$+33x^2$	$-9x$	$+1$					
	$+19x^3$	$+95x^2$	$-152x$	$+38$					
		$+128x^2$	$- 161x$	$+39$					

el resultado dará de cociente $4x – 19$ y de resto $+128\, x^2 – 161\, x + 39$

e) C : B

$4x^4$	$+ x^3$	$+ x^2$	$- x$	$+1$		$+2x^3$	$-7x^2$	$+1$

$\cancel{-4x^4}$	$+14\ x^3$		$-2x$		$+2x$	$+(15/2)$
	$\cancel{+15\ x^3}$	$+\ x^2$	$-3x$	$+1$		
	$\cancel{-15x^3}$	$105/2x^2$		$-(15/2)$		
		$107/2x^2$	$-3x$	$-13/2$		

el cociente será igual a $2x + (15/2)$ y el resto igual a $(107/2)x^2 - 3\ x - (13/2)$

(2) Hallar el valor de k para que la división entre ($2x^4 + x^3 + x + k$) y ($2x^2 + x - 2$) sea exacta.

Solución:
Realizamos la división

$\cancel{+\ 2x^4}$	$\cancel{+\ x^3}$	$+\ 0x^2$	$+\ x$	$+\ k$	$+2x^2$	$+\ x$	$-\ 2$
$\cancel{-\ 2x^4}$	$\cancel{-\ x^3}$	$+2x^2$			$+x^2$	$+1$	
		$\cancel{+2x^2}$	$\cancel{+\ x}$	$+\ k$			
		$\cancel{-2x^2}$	$\cancel{-\ x}$	$+\ 2$			

Para que de exacta la suma de $k + 2$ tiene que ser igual a cero
$k + 2 = 0$ luego $k = -2$

(3) Hallar, utilizando la regla de Ruffini, el cociente y el resto en las divisiones siguientes:

a) $(x^5 - 3x^4 - 2x + 7) : (x + 2)$

b) $(x^7 - x^4 + 1) : (x - 1)$

Solución

Para hacer la división por Ruffini, colocamos los coeficientes, y cuando falte algún término ponemos un cero

a) $(x^5 - 3x^4 - 2x + 7) : (x + 2)$

	+ 1	- 3	0	0	-2	+ 7
- 2		- 2	+ 10	- 20	+ 40	- 76
	+ 1	- 5	+ 10	- 20	+ 38	- 69

La solución será colocar los coeficientes a las respectivas x pero con un grado menor y el último termino es el resto

$(x^5 - 3x^4 - 2x + 7) : (x + 2) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 20x + 38$ y de resto -69

b) $(x^7 - x^4 + 1) : (x - 1)$

	+ 1	+ 0	+ 0	- 1	0	0	0	+1
+ 1		+ 1	+ 1	+ 1	0	0	0	0
	+ 1	+ 1	+ 1	0	0	0	0	+1

$(x^7 - x^4 + 1) : (x - 1) = x^6 + x^5 + x^4$ y de resto +1

(4) Obtener el valor de h para que la división entre $(x^3 + 2x^2 + hx)$ y $(x + 3)$ sea exacta.

Solución:

Al ser el divisor del tipo $(x \pm a)$ lo podemos realizar por Ruffini. En este caso hay que darse cuenta de que hay que poner el término independiente que vale 0

	+ 1	+ 2	+ h	+ 0
- 3		- 3	+ 3	-9 - 3h
	+ 1	- 1	+3 + h	-9 – 3h

El resto debe de ser igual a cero luego

$-9 - 3h = 0$; $-3h = 9$; $h = -9/3$; $h = -3$

(5) Resolver las ecuaciones siguientes:

α) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

Solución:

Se trata de una ecuación de segundo grado que se resuelve por medio de la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

para la ecuación que nos dan, los valores serán a=2; b = -3; c= +1
sustituyendo en la fórmula

$$x = \frac{+3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{} ; \quad x_1 = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

para estar seguros, lo que haríamos sería sustituir los valores que hemos hallado en la ecuación inicial

β) $\frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = 3$

Solución:
La manera que encuentro mas sencilla para eliminar los denominadores es multiplicando toda la ecuación por el producto de los denominadores

$$(x-1)(x+1)\frac{x}{x-1} + (x-1)(x+1)\frac{2x}{x+1} = (x-1)(x+1) \cdot 3$$

eliminamos los denominadores

$$(x+1)x + (x-1)2x = (x-1)(x+1) \cdot 3$$

realizamos las multiplicaciones

$$x^2 + x + 2x^2 - 2x = 3x^2 - 3$$

$3x^2 - x = 3x^2 - 3$; eliminamos y cambiamos el signo a toda la ecuación multiplicando por -1

$$x = 3$$

para asegurarnos sustituiremos este valor en al ecuación inicial χ) $\mathbf{2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 0}$

Solución:

esta es una ecuación de tercer grado. Para poder realizarla lo que haremos es dividirla por Ruffini por uno de los divisores del término independiente. El motivo es:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (a_1x^2 + b_1 x + c_1) \cdot (x \pm a_2) = 0$$

Como vemos, una ecuación de 3º grado se puede transformar en una de segundo multiplicada por una de primero. Para que este producto sea cero, uno de los factores tiene que ser igual a cero

$$a_1x^2 + b_1 x + c_1 = 0$$
$$x \pm a_2 = 0$$

Dividimos la primera ecuación por los divisores del término independiente que es 3 y sus divisores son ± 1 y ± 3

	+ 2	- 7	+ 2	+ 3
+1		+ 2	- 5	- 3
	+ 2	- 5	- 3	0

Si no me diera exacto con + 1 probaría con -1 y luego con +3 y – 3 hasta que diera exacto. Como da exacto quiere decir que x – 1 = 0, luego una solución es $x_1 = +1$

lo que me queda es una ecuación de segundo grado que se resuelve por medio de la fórmula conocida

$$\mathbf{2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = (2x^2 - 5x - 3) \cdot (x - 1) = 0}$$

$2x^2 - 5x - 3 = 0;$ $\qquad x = \dfrac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \dfrac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \dfrac{5 \pm 7}{4};$

$$x_2 = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3; \qquad x_3 = \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

δ) $\dfrac{x^2 - 1}{3} + (x - 2)^2 = \dfrac{x^2 + 2}{2}$

Solución:
Lo primero que se me ocurre es quitar los denominadores, multiplicando toda la ecuación por el producto de los denominadores

$3\cdot 2\cdot\frac{x^2-1}{3}+3\cdot 2\cdot(x-2)^2=3\cdot 2\cdot\frac{x^2+2}{2}$; $\quad 2\cdot(x^2-1)+6\cdot(x^2-4x+4)=3\cdot(x^2+2)$

$2x^2-2+6x^2-24x+24=3x^2+6$; $\quad 2x^2 + 6x^2 – 3x^2 - 24x - 2 + 24 – 6 = 0$

$5x^2 – 24x + 16 = 0$; una ecuación de segundo grado

$$x=\frac{24\pm\sqrt{24^2-4\cdot 5\cdot 16}}{2\cdot 5}=\frac{24\pm\sqrt{576-320}}{10}=\frac{24\pm\sqrt{256}}{10}=\frac{24\pm 16}{10}$$

$$x_1=\frac{24+16}{10}=\frac{40}{10}=4; \qquad x_2=\frac{24-16}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

8. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

1) Calcular la suma y la diferencia de los polinomios:

   $P(x)=4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ y $Q(X)= 5x^3 - x^2 + 2x$

2) Calcula el producto de los polinomios:

   $P(x)= - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ y $Q(x)=x + 1$

3) Calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

   1) $(2x^3 +3x -1) : (x+2)$

   2) $(5x^4 +3x^2 –6x^3 –x +5) : (x + x^2 + 1)$

4) Hallar el valor de a para que (-1) sea un cero del polinomio

   $$P(x)= x^4 –2x^3 +3ax –2$$

5) ¿Qué valor ha de tomar a para para que (x-1) sea un factor del polinomio

   $P(x)= x^4 –3ax^3 +2x^2 +3$?.

6) Descomponer factorialmente el polinomio $x^3 –7x + 6$

7) Descomponer factorialmente el polinomio $3x^2 +x–2$

8) Descomponer factorialmente el polinomio $x^2 –5x +6$

9) Descomponer en factores el siguiente polinomio $3x^2 –10x + 3$

9. SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

1) $S(x)= 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 +5$; $D(x)= 4x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 4x + 5$

2) $M(x)= - 2x^4 + x^3+ x^2 +3x + 5$

3) 1) cociente: $2x^2 - 4x +11$ resto -23 ; 2) cociente: $5x^2 - 11x +9$ resto: $x-4$

4) $a = \frac{1}{3}$

5) a= 2

6) (x-1)(x-2)(x+3)

7) (x+1)(3x-2)

8) (x-2)(x-3)

9) (x-3)(3x-1)

6. BIBLIOGRAFÍA

- Emilio Bujalance y otros. Matemáticas especiales. Editorial Sanz y Torres (1998). 2ª Edición
- María E. Ballvé y otros. Problemas de matemáticas especiales. Editorial Sanz y Torres (1996). 2ª Edición.
- José T. Pérez Romero y José A. Jaramillo Sánchez. Matemáticas. Pruebas de acceso a la universidad para mayores de 25 años. Editorial MAD. (2002)
- http://descartes.cnice.mecd.es/

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

UNIDAD DIDÁCTICA 2: ***SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES***

2. ÍNDICE

2. INTRODUCCIÓN GENERAL A LA UNIDAD Y ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO

En esta unidad didáctica vamos a estudiar la resolución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas y de tres ecuaciones con tres incógnitas.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Resolver, por los distintos métodos, sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas y de tres ecuaciones con tres incógnitas.
- Identificar, plantear y resolver problemas de sistemas de ecuaciones lineales y especificar las soluciones.

4. DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

1. Introducción: descripción

Llamamos **sistema de ecuaciones** a un conjunto cualquiera de ecuaciones que deben verificarse para unos mismos valores de las incógnitas. Por ejemplo las ecuaciones:

$3x^2 - 2x + 3y = y - 1$
$2y - 3y^2 = 3x + 4$ formarían un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

El conjunto de ecuaciones:
$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ 3x - 2y - z &= 4 \\ x + 3y - 5z &= -1 \end{aligned}$$
formarían un sistema **de tres ecuaciones con tres incógnitas.**

Se llama **grado del sistema de ecuaciones** al mayor exponente al que se encuentre elevada alguna incógnita del sistema.

El primer ejemplo planteado es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de segundo grado. Sin embargo, el ejemplo anterior es un sistema de tres ecuaciones de grado uno o lineales con tres incógnitas.

El sistema de ecuaciones $\begin{aligned} x + y &= -2 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}$ es de primer grado con dos incógnitas

Cuando el sistema de ecuaciones es de **primer grado** y además **no aparecen términos con las incógnitas multiplicadas entre sí** (tipo x.y) se dice que es un ***sistema de ecuaciones lineales***.

Es con este tipo de sistemas y para el caso de dos y tres incógnitas, con los que vamos a trabajar en este tema.

2. Resolución de sistemas y sistemas equivalentes.

Resolver un sistema de ecuaciones consiste en hallar unos valores que, sustituidos en la incógnitas, transforman las ecuaciones en identidades, es decir, se satisfacen todas y cada una de las ecuaciones que forman el sistema.

Soluciones de un sistema son los grupos de valores de las incógnitas que verifican al mismo tiempo todas las ecuaciones.

Ejemplo: Los sistemas

$$\begin{aligned} 5x - y &= 3 \\ x + y &= 3 \end{aligned} \quad y \quad \begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ 5x - 3y &= -1 \end{aligned}$$

son equivalentes ya que tienen las mismas soluciones: x=1, y=2

3. Clasificación de los sistemas de ecuaciones

Según las soluciones, los sistemas se clasifican en: compatibles e incompatibles.

Un sistema de ecuaciones lineales es

- **compatible** cuando es posible hallar unos valores de las incógnitas que satisfagan al mismo tiempo a todas y cada una de las ecuaciones que componen el sistema. A su vez, los sistemas de ecuaciones lineales compatibles los podemos clasificar en sistema lineal **compatible determinado,** tiene un número determinado de soluciones; **compatible indeterminado** cuando tiene un número infinito de soluciones.
- **Incompatible** cuando no es posible hallar unos valores de las incógnitas que verifiquen al mismo tiempo a todas las ecuaciones que componen el sistema. En este caso se dice también que el sistema es imposible o que no tiene solución.

Ejemplos:

El sistema $\begin{matrix} 3x - y = 7 \\ x + y = 9 \end{matrix}$ es compatible determinado, ya que no admite más soluciones que: x=4; y=5.

Sin embargo, el sistema $\begin{matrix} 2x - 4y = 6 \\ 3x - 6y = 9 \end{matrix}$ es compatible indeterminado, ya que tiene infinitas soluciones x=5 y=1; x=6 y=3/2; x=7 y=2; ...

Por otra parte, el sistema $\begin{matrix} 6x - 2y = 7 \\ 3x - y = 4 \end{matrix}$ es incompatible ya que no existe ninguna solución que satisfaga al mismo tiempo las dos ecuaciones.

4. **Métodos de resolución de sistemas con dos incógnitas.**

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, normalmente, es necesario transformar el sistema dado en otro equivalente, en cuyas ecuaciones no figura más que una incógnita. Existen tres métodos de resolución para estos sistemas: sustitución, igualación y reducción. Vamos a estudiar dichos métodos a partir del siguiente ejemplo: $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$

Método de sustitución:

1. Se despeja una incógnita en una ecuación, por ejemplo la y en la primera: **y = -2x**
2. Se sustituye dicho valor en la segunda: **x - 2x = -1**

3.Se resuelve esta ecuación: -x = -1 ; **x = 1**

4.Con este valor se halla el de la otra incógnita (paso 1)**: y = -2**

♌ **Método de igualación:**

1.Despejamos una incógnita de la primera ecuación: **y=-2x**

2. Despejamos la misma incógnita de la otra ecuación: **y=-1-x**

3. Igualamos las expresiones obtenidas: **-2x=-1-x**

4. Se resuelve esta ecuación **-2x+x=-1; -x=-1; x=1**

5. Ahora se sustituye el valor obtenido en cualquiera de las dos primeras ecuaciones y se obtiene el valor de la otra incógnita: **y=-2**

♍ **Método de reducción**

1. Se consigue que al sumar o restar ambas ecuaciones, miembro a miembro se elimine una incógnita. Para ello se simplifica todo lo posible y se multiplica, si es necesario alguna ecuación por algún número. En este caso se pueden restar directamente una ecuación de la otra y se elimina la y : **1ª - 2ª** : **x = 1**
2. Se resuelve la ecuación resultante. En este caso ya lo está ya que hemos obtenido directamente la solución para la **x**: **x = 1**
3. Se sustituye esta solución en una de las dos ecuaciones y se resuelve hallando la otra incógnita. En este caso, sustituyendo x = 1 en cualquiera de las dos ecuaciones se obtiene fácilmente **y = -2.**

5. **Resolución de sistemas lineales con tres incógnitas**

Para resolver un sistema de ecuaciones con tres incógnitas, al igual que en el apartado anterior, es necesario transformar el sistema dado en otro equivalente, en dos de cuyas ecuaciones no aparezcan más que dos incógnitas. Se calculan éstas y sustituyendo los valores obtenidos en la tercera, se deduce el valor de la incógnita restante.

El método más recomendable de los ya dados es el de reducción.

Ejemplo: sea el sistema $\left.\begin{array}{r} 3x-2y+6z=11 \\ x+y-2z=3 \\ 4x-2y+z=9 \end{array}\right\}$ multiplicamos la segunda ecuación por 3 y la sumamos a la primera

$$\begin{array}{r} 3x-2y+6z=11 \\ \underline{3x+3y-6z=9} \\ 6x\quad +y\qquad\quad =20 \end{array}$$

multiplicamos la tercera por 2 y la sumamos a la segunda

$$\begin{array}{r} x+y-2z=3 \\ \underline{8x-4y+2z=18} \\ 9x\quad -3y\qquad =21 \end{array}$$

Resolvemos el sistema resultante:

$$\left.\begin{array}{r} 6x+y=20 \\ 9x-3y=21 \end{array}\right\}$$

Resultando: x=3; y=2, sustituimos los valores de x e y en cualquiera de las ecuaciones iniciales, por ejemplo la 2ª : 3+2-2z=3 resultando z=1.

6. Casos especiales

a. Sistemas incompatibles

Si intentas resolver el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+1=y-2 \\ y+2=x-3 \end{cases}$.

Por ejemplo por reducción, llegarás a una expresión como **0 = -8** o algo parecido. ¿Qué significa?. Desde luego eso no es cierto. Por consiguiente, eso significa que el sistema de ecuaciones: ***no tiene solución.***

b. Sistemas compatibles indeterminados

Si resuelves ahora el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x-3=y+1 \\ 2x-2y=8 \end{cases}$, por ejemplo por sustitución, ahora habrás llegado a la expresión **0 = 0** u **otro número = el mismo número**. ¿Qué significa ahora?. La igualdad que has obtenido es cierta pero se te han eliminado la **x** y la **y**. ¿Cuál es la solución?. Si la igualdad es cierta seguro ¿lo será para cualquier valor de **x** o de **y**?.

Para calcular en estos casos las soluciones se hallan numéricamente dando valores a ***x*** o ***y*** en cualquiera de las dos ecuaciones (son las dos la misma) y obteniendo los correspondientes de la otra incógnita. Por ejemplo en la primera ecuación:

x - 3 = y + 1, podemos obtener para y = 0, x = 4; para y = 2, x = 6; para y = -3, x = 1; etc, todas ellas soluciones.

7. Problemas de aplicación

Muchos problemas que se resuelven mediante ecuaciones pueden necesitar más de una incógnita y dar lugar por tanto a un sistema de ecuaciones. Por ejemplo:

Problema: Encuentra dos números sabiendo que la mitad de su suma es 5 y el doble de su diferencia es 8.

Planteamiento: Números: x e y.

Ecuaciones: $(x + y) / 2 = 5$

$2(x - y) = 8$

5. RESUMEN

Clasificación de los sistemas en función de las soluciones:

- **Compatibles:** tienen solución
  - **Determinados:** número finito de soluciones
  - **Indeterminados:** infinitas soluciones
- **Incompatibles:** no tienen solución

Métodos de resolución para sistemas con dos incógnitas:

Método de sustitución: se despeja una incógnita de una ecuación y se sustituye en la otra.

Método de igualación: en ambas ecuaciones se despeja la misma incógnita y se igualan las expresiones.

Método de reducción: se multiplica una ecuación por un número y se le suma a la otra de forma que una de las incógnitas desaparezca.

Métodos de resolución para sistemas con tres incógnitas: Se transforma el sistema en otro equivalente, de forma que en dos ecuaciones sólo aparezcan dos incógnitas, para dicha operación se recomienda el método de reducción. Finalmente se sustituyen los valores obtenidos en la tercera obteniendo así el valor de la incógnita restante.

6.ACTIVIDADES

1) En una lucha entre moscas y arañas intervienen 42 cabezas y 276 patas. ¿Cuántos luchadores había de cada clase? (Recuerda que una mosca tiene 6 patas y una araña 8 patas).

2) En la granja se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?.

3) Al comenzar los estudios de Bachillerato se les hace un test a los estudiantes con 30 cuestiones sobre Matemáticas. Por cada cuestión contestada correctamente se le dan 5 puntos y por cada cuestión incorrecta o no contestada se le quitan 2 puntos. Un alumno obtuvo en total 94 puntos. ¿Cuántas cuestiones respondió correctamente?

4) Un número consta de dos cifras cuya suma es 9. Si se invierte el orden de las cifras el resultado es igual al número dado más 9 unidades. Halla dicho número.

5) Al preguntar en mi familia cuántos hijos son, yo respondo que tengo tantas hermanas como hermanos y mi hermana mayor responde que tiene doble número de hermanos que de hermanas. ¿Cuántos hijos e hijas somos?

6) Mi tío le dijo a su hija. "Hoy tu edad es 1/5 de la mía y hace 7 años no era más que 1/7". ¿Qué edad tienen mi tío y su hija?

7) Un rectángulo tiene un perímetro de 392 metros. Calcula sus dimensiones sabiendo que mide 52 metros más de largo que de ancho.

8) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ x-y+3z=2 \\ 2x+y-z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ x-y+3z=1 \end{cases}$$

8. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

1) Hallar dos números tales que su suma sea 90 y su cociente 9.

2) Halla dos números tales que su suma sea 77 y que, al dividir el mayor por el menor, dé 3 de cociente y 5 de resto.

3) Halla una fracción que resulte equivalente a ¼ si se añade una unidad al numerador, y equivalente a 1/5 si se añade una unidad al denominador.

4) Tres ciudades A, B y C, están dispuestas en los vértices de un triángulo. Si se va de A a B pasando por C, se recorren 27 km. Si se va de B a C, pasando por A, 35 km. Y de A a C por B, 32 km. Hallar la distancia entre cada dos ciudades.

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

(6) Resolver, aplicando el método que se desee, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 10(x-2)+2y=4 \\ x+3(x-y)=2 \end{cases}$

Solución:
Quitamos los paréntesis

10x – 20 + 2y = 4
x + 3x – 3y = 2

10 x + 2 y = 24
4 x – 3 y = 2 yo prefiero el sistema de reducción. Para ello multiplico la ecuación superior por 3 y la inferior por 2 con el fin de que los coeficientes de la y sean iguales y al sumarlos ordenadamente se me anulen

30 x + 6 y = 72
8 x – 6 y = 4
38 x = 76; x = 76 / 38 = 2 ; y = 2

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{5}=7 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=-1 \end{cases}$

Solución:

elimino los denominadores multiplicando por el producto

$4\cdot5\cdot\frac{x}{4}+4\cdot5\cdot\frac{y}{5}=4\cdot5\cdot7$; 5x + 4y = 140

$3 \cdot 4 \cdot \frac{x}{3} - 3 \cdot 4 \cdot \frac{y}{4} = 3 \cdot 4 \cdot (-1)$;   4x - 3y = -12

elimino las y multiplicando por los coeficientes respectivos

$$\begin{array}{r} 15x + 12\,y = 420 \\ \underline{16x - 12\,y = -48} \\ 31x \qquad\quad = 372 \end{array}$$

x = 372 / 31 = 12;   y = 20

c) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

Solución:
Voy a eliminar la y entre la primera y la segunda y luego haré lo mismo con la primera y la tercera

$$\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ \underline{x - y + z = 6} \\ 2x \qquad + 2z = 8 \end{array} \qquad (4)$$

$$\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ \underline{x - y - z = 0} \\ 2x \qquad\quad = 2 \end{array}$$

el valor de x será 1

sustituimos en (4) y obtendremos que z = 3;
sustituyendo en cualquiera de las otras obtendremos que el valor de y = -2

d) $\begin{cases} 4x - 2z = 3 \\ 3x + y = 1 \\ 10y - 2z = -21 \end{cases}$

Solución:
despejamos de la segunda ecuación el valor de y

y = -3x +1;   sustituimos este valor en la tercera ecuación

$10\cdot(-3x + 1) - 2z = -21;$ $\quad -30x + 10 - 2z = -21;$ $\quad$ $$\begin{array}{l} -30x - 2z = -31 \\ \underline{\;\;4x - 2z = \;\;3} \quad (1) \end{array}$$

Cambiamos el signo de la ecuación de arriba y sumamos

$$\begin{array}{l} 30x + 2\,z = 31 \\ \underline{\;4\,x - 2\,z = \;3} \\ 34\,x \qquad = 34; \end{array}$$

luego x = 1, el valor de y = -2, y el valor de z = ½ .

Para asegurarnos lo que hacemos es sustituir para ver si se cumplen los valores

(7) Tres amigos suelen ir juntos a una cafetería. Un día tomaron dos cafés y un cortado, por lo que pagaron 4,8 euros; al día siguiente consumieron un café, un cortado y un zumo de naranja y la cuenta fue de 6,3 euros; otro día abonaron 5,1 euros por dos cortados y un café. ¿Cuál es el precio del café, del cortado y del zumo de naranja?

Llamaremos:
x: precio del café
y: precio del cortado
z: precio del zumo de naranja,

Planteamos el problema de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 2x + y = 4{,}8 \\ x + y + z = 6{,}3 \\ x + 2y = 5{,}1 \end{cases}$$

Resolviendo adecuadamente, se tiene que:

x = 1,5 euros
y = 1,8 euros
z = 3 euros.

(8) Repartir 180 euros entre tres personas de forma que la primera de ellas reciba el doble que la segunda y la tercera persona la mitad que las otras dos juntas.

Solución:
Suponemos que la segunda persona ha recibido x euros
la primera recibirá 2x
La tercera recibirá: (x + 2x) / 2

La suma de las tres cantidades será de 180 euros

$2x + x + \frac{(x+2x)}{2} = 180$; 4x + 2x + x + 2x = 360; 9x = 360; x = 40

La segunda recibe 40 euros, la primera 80 y la tercera 60

(9) Una persona dispone de 10.000 euros. Coloca una parte de este dinero en una cuenta bancaria que le proporciona el 6% de beneficio y el resto lo invierte en bolsa logrando ganar el 10%. ¿Cuánto ha ingresado en el banco y cuánto ha invertido en bolsa si sus beneficios han sido de 720 euros?

Solución:
Si tiene 10.000 euros y coloca una parte en el banco que no conocemos la cantidad, los llamaremos x.
El dinero que le queda serán los 10.000 menos los que ha colocado en el banco, es decir 10.000 –x

Ahora vamos a los beneficios.

El beneficio que le ha dejado el dinero del banco serán el 6% de x, es decir $x \cdot \frac{6}{100}$

El beneficio que obtiene en la bolsa serán: $(10.000 - x) \cdot \frac{10}{100}$

La suma de los dos beneficios valdrá 720 euros

$$\frac{6x}{100} + (10.000 - x) \cdot \frac{10}{100} = 720 ;$$

multiplico todo por 100 para quitar los denominadores

$6x + 100.000 - 10x = 72.000$; -4x = - 28.000; x=28.000 / 4 = 7.000

Ha invertido 7000 en el banco y 3.000 en la bolsa

(10) Una persona compra en rebajas un televisor, un ordenador portátil y una cámara digital que cuestan 1860 euros. El televisor y la cámara están rebajados el 20% y el portátil el 10%, con lo que se ahorra 268 euros. ¿Cuál es el precio original del ordenador portátil si su precio es el doble que el del televisor?

Solución:
televisor = x
ordenador = y
cámara = z

la suma de los tres productos es igual a 1860 euros

$$x + y + z = 1860 \qquad (1)$$

el precio del ordenador es el doble que el del televisor

$$y = 2x \qquad (2)$$

la rebaja que nos hacen

$$x \cdot \frac{20}{100} + y \cdot \frac{10}{100} + z \cdot \frac{20}{100} = 268 \qquad (3)$$

tengo un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Si sustituyo el valor de y obtenido en la (2), en la (1) y (3)

$$x + 2x + z = 1860$$

$$x \cdot \frac{20}{100} + 2x \cdot \frac{10}{100} + z \cdot \frac{20}{100} = 268$$

$$\begin{aligned} 3x + \quad z &= 1.860 \\ 40x + 20z &= 26.800 \end{aligned}$$

multiplicamos por 20 la superior y le cambiamos de signo

$$\begin{aligned} 60x + 20z &= +37.200 \\ \underline{-40x - 20z} &\underline{= -26.800} \\ 20x \qquad &= 10.400; \end{aligned} \qquad x = 10400 / 20 = 520 \text{ €} \quad \text{el televisor}$$

El ordenador el doble que el televisor $y = 2x = 2 \cdot 520 = 1040$ € el ordenador
la cámara serán 300 euros

7. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

10) Hallar dos números tales que su suma sea 90 y su cociente 9.

11) Halla dos números tales que su suma sea 77 y que, al dividir el mayor por el menor, dé 3 de cociente y 5 de resto.

12) Halla una fracción que resulte equivalente a ¼ si se añade una unidad al numerador, y equivalente a 1/5 si se añade una unidad al denominador.

13) Tres ciudades A, B y C, están dispuestas en los vértices de un triángulo. Si se va de A a B pasando por C, se recorren 27 km. Si se va de B a C, pasando por A, 35 km. Y de A a C por B, 32 km. Hallar la distancia entre cada dos ciudades.

14) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

$$a)\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -x+2y=3 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x+3y+4z=10 \\ 3x-2y+2z=9 \\ 4x+4y-3z=2 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x-3y-z=3 \\ 3x-2y+z=4 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$$

8. SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

10) X=81; y=9

11) X=59; y=18

12) X=5; y=24

13) Las distancias son: AB=20 km; BC=12 km CA=15 km

14) a) $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ x=-1; y=1 b) $\begin{cases} x=\dfrac{233}{127} \\ y=-\dfrac{12}{127} \\ z=\dfrac{210}{127} \end{cases}$

15) c) $\begin{cases} x = \dfrac{5}{6} - t \\ -\dfrac{1}{5} - t \\ z = t \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

8. BIBLIOGRAFÍA

- Emilio Bujalance y otros. Matemáticas especiales. Editorial Sanz y Torres (1998). 2ª Edición
- María E. Ballvé y otros. Problemas de matemáticas especiales. Editorial Sanz y Torres (1996). 2ª Edición.
- José T. Pérez Romero y José A. Jaramillo Sánchez. Matemáticas. Pruebas de acceso a la universidad para mayores de 25 años. Editorial MAD. (2002).
- http://descartes.cnice.mecd.es/

MATRICES

Y

DETERMINANTE

S

UNIDAD DIDÁCTICA 3: Matrices y determinantes

1. ÍNDICE

2. INTRODUCCIÓN GENERAL A LA UNIDAD Y ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO

En esta unidad didáctica vamos a introducir las matrices, los principales tipos de matrices y las operaciones algebraicas con sus respectivas propiedades. Aunque los conceptos se introducirán para matrices de cualquier tamaño, sólo trabajaremos con matrices en las que ni el número de filas ni el de columnas excedan de tres. También introduciremos el cálculo de determinante para matrices de tamaño 2x2 y 3x3. Finalmente, introduciremos dos aplicaciones del cálculo de matrices.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conocer algunos tipos de matrices.
- Conocer las principales operaciones con matrices
- Conocer algunas aplicaciones del cálculo matricial.

4. DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

1. Introducción

El concepto de matriz alcanza múltiples aplicaciones tanto en la representación y manipulación de datos como en el cálculo numérico y simbólico que se deriva de los modelos matemáticos utilizados para resolver problemas en diferentes disciplinas como, por ejemplo, las ciencias sociales, las ingenierías, economía, física, estadística y las diferentes ramas de las matemáticas entre las que destacamos las ecuaciones diferenciales, el cálculo numérico y, por supuesto, el álgebra.

2. **Definición de matriz**

Se llama **matriz** de orden **m×n** a todo conjunto rectangular de elementos $\boldsymbol{a}_{ij}$ dispuestos en **m** líneas horizontales (filas) y **n** verticales (columnas) de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Abreviadamente suele expresarse en la forma A =(a_{ij}), con i =1, 2, ..., m, j =1, 2, ..., n. Los subíndices indican la posición del elemento dentro de la matriz, el primero denota la fila (i) y el segundo la columna (j). Por ejemplo el elemento a_{25} será el elemento de la fila 2 y columna 5.

Por ejemplo: Sea $M = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ entonces el orden de M es 2×3 (2 filas y 3 columnas) y sus elementos son: $m_{11=8}$, $m_{12}=1$, m_{13} =4, $m_{21=}$5, m_{22}=5, $m_{23}=3$.

Dos matrices A=(a_{ij}) y B=(b_{ij}), de orden n×m, son **iguales** si $b_{ij}=a_{ij}$ para todo $i=1,2,...$ n y j=1,2,…m. Es decir, dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan la misma posición en ambas matrices coinciden.

3. **Algunos tipos de matrices**

Matriz Cuadrada: Es aquella que tiene igual número n de filas que de columnas (n=m). En ese caso se dice que la matriz es de orden n. Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 4 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

es cuadrada de orden 3.
Denotaremos el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n por M_n. Así, en el ejemplo anterior, $A \in M_3$.

Los elementos de la ***diagonal principal*** de una matriz cuadrada son aquellos que están situados en la diagonal que va desde la esquina superior izquierda hasta la inferior derecha. En otras palabras, la diagonal principal de una matriz $A=(a_{ij})$ está compuesta por los elementos $a_{11} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{nn}$. En el ejemplo anterior la diagonal principal está compuesta por los elementos: $a_{11}=1 \quad a_{22}=-3 \quad a_{33}=1$.

Matriz Nula: Una matriz es nula si todos sus elementos son iguales a cero. En el siguiente ejemplo se muestra la matriz nula de orden 3×2.

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Más adelante veremos que la matriz nula, respecto a la adición y multiplicación de matrices, juega un papel similar al número cero respecto a la adición y multiplicación de números reales.

Matriz Diagonal: Una matriz cuadrada, $A=(a_{ij})$ es *diagonal* si $a_{ij}=0$ para $i \neq j$. Es decir, si todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son cero. Por ejemplo, la siguiente matriz es diagonal:

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Matriz Unidad o identidad: Es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son todos 1. A continuación mostramos la matriz unidad de orden 2.

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Más adelante veremos que la matriz unidad, respecto a la multiplicación de matrices, juega un papel similar al número 1 respecto a la multiplicación de números reales.

Matriz triangular: Es una matriz cuadrada en la que todos los elementos situados por debajo (o por encima) de la diagonal principal son cero. Por ejemplo, la siguiente matriz es triangular:

$$T=\begin{pmatrix}2 & -1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 6 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Este tipo de matrices también se conoce como *matriz escalonada*. En algunos casos se hace la distinción entre las matrices *triangulares superiores* o *inferiores* en dependencia de los elementos nulos de la matriz; los que están por debajo o por encima de la diagonal principal.

4. Operaciones de matrices

- **Adición de matrices**

Sean $A,B\in M_{mxn}$. La matriz $S=(s_{ij})\in M_{mxn}$ es la *suma* de las matrices $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ se denota , S=A+B si sus elementos cumplen:

$$s_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\qquad i=1,2,\dots m\qquad j=1,2,\dots,n$$

Ejemplo

Consideremos las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 2 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}\qquad M=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & -3 & 5\end{pmatrix}$$

Las matrices *A* y *B* son de orden 3×2, mientras la matriz *M* es cuadrada de orden 3. Por tanto, no podemos calcular la suma de *A* y *M* y tampoco la suma de *B* y *M*, en cambio, sí podemos sumar *A* y *B* ya que tienen el mismo orden. Esto es,

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 4\\ 2 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+4 & 4+4\\ (-1)+2 & 3+4\\ 0+(-1) & 2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 1 & 7\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Es fácil deducir las siguientes propiedades de la adición de matrices de orden mxn:

Conmutativa: $A+B=B+A\qquad \forall A,B\in M_{mxn}$

Asociativa: $A+(B+C)=(A+B)+C\qquad \forall A,B,C\in M_{mxn}$

Elemento neutro (la matriz nula) $A+O=O+A\qquad \forall A\in M_{mxn}$

Elemento opuesto $\forall A\in M_{mxn}\quad \exists(-A)\in M_{mxn}\quad A+(-A)=(-A)+A=0$

- **Multiplicación de una matriz por un número**

Se denomina *producto de un número λ por una matriz* $A\in M_{mxn}$ a una matriz $C=(c_{ij})\in M_{mxn}$ cuyos elementos son de la forma $c_{ij}=\lambda a_{ij}\;\; i=1,2,\dots,m\qquad j=1,2,\dots,n$.

Es decir, la matriz producto, *C*, es la que se obtiene multiplicando el número λ por cada uno de los elementos de *A*. De aquí en adelante consideraremos que λ es un número real.

Ejemplo

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

y el número -5 entonces, el producto de *A* por -5 es:

$$\lambda \cdot A = (-5)\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & -20 \\ -25 & -35 & 0 \end{pmatrix}$$

El producto de un número por una matriz satisface las siguientes propiedades:

Distributiva mixta del producto respecto a la suma de números reales

$$(\lambda + \delta)A = \lambda A + \delta A \qquad \forall \lambda, \delta \in R, \quad \forall A \in M_{n \times m}$$

Asociativa mixta

$$(\lambda \cdot \delta)A = \lambda(\delta A) \qquad \forall \lambda, \delta \in R, \quad \forall A \in M_{n \times m}$$

Elemento neutro

$$1 \cdot A = A \qquad \forall A \in M_{n \times m} \text{ y } 1 \in R$$

- **Multiplicación de matrices**

Se denomina *matriz producto de la matriz* $A = (a_{ij}) \in M_{mxn}$ *por la matriz* $B = (b_{ij}) \in M_{nxp}$ *a una matriz* $C = (c_{ij}) \in M_{mxp}$ cuyos elementos son de la forma

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Es decir, los elementos que ocupan la posición , *ij* en la matriz producto, se obtienen sumando los productos que resultan de multiplicar los elementos de la fila *i* en la primera matriz por los elementos de la columna *k* de la segunda matriz. Observemos en detalle como se obtiene el elemento de valor 23 en el siguiente ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}2&3&4&4\\1&2&2&1\\0&1&0&6\end{pmatrix}_{3\times4}\qquad B=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\\0&2\\3&2\end{pmatrix}_{4\times2}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&3&4&4\\1&2&2&1\\0&1&0&6\end{pmatrix}_{3\times4}\begin{pmatrix}2&2\\1&1\\0&2\\3&2\end{pmatrix}_{4\times2}=\begin{pmatrix}19&23\\7&10\\19&13\end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$c_{12}=2.2+3.1+4.2+4.2=23$$

Dos matrices se pueden multiplicar sólo cuando el número de columna de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda.
En el siguiente ejemplo podemos ver además cuál es el orden de la matriz producto.

$$A=\begin{pmatrix}2&3&4&4\\1&2&2&1\\0&1&0&6\end{pmatrix}_{3\times4}\qquad B=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\\0&2\\3&2\end{pmatrix}_{4\times2}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&3&4&4\\1&2&2&1\\0&1&0&6\end{pmatrix}_{3\times4}\begin{pmatrix}2&2\\1&1\\0&2\\3&2\end{pmatrix}_{4\times2}=\begin{pmatrix}19&23\\7&10\\19&13\end{pmatrix}_{3\times2}$$

Nótese, además, que no podemos calcular. *BA*

$$\cancel{BA}=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\\0&2\\3&2\end{pmatrix}_{4\times2}\begin{pmatrix}2&3&4&4\\1&2&2&1\\0&1&0&6\end{pmatrix}_{3\times4}$$

Hay casos, como veremos en el siguiente ejemplo, en los que se pueden calcular ambos productos aunque se obtienen resultados diferentes. Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, por un lado,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 17 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}$$

y por otro lado,

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 11 \\ 12 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Según se pudo comprobar a través de los ejemplos anteriores, para la multiplicación de matrices no se cumple la propiedad conmutativa. Veamos algunas propiedades de esta operación:

Asociativa

$$A(B \cdot C) = (A \cdot B)C, \qquad \forall A, B, C : A \in M_{n \times m},\ B \in M_{m \times k},\ C \in M_{k \times p}$$

Elemento neutro (Es la matriz unidad)

$$\exists I \in M_n \quad \forall A \in M_n : \qquad A \cdot I = I \cdot A = A$$

Distributiva (mixta)

$$A(B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \qquad \forall A, B, C : A \in M_{n \times m} \quad B, C \in M_{m \times k}$$

Otras observaciones importantes: existen divisores de cero, es decir, en general, AB=O no implica que A=O o B=O. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

No se cumple la propiedad cancelativa: en general, *AB=AC* no implica C=B. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

No se cumple la fórmula del binomio: en general, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ ya que el producto no es conmutativo.

5. Inversa de una matriz

Una matriz cuadrada A es invertible si existe una matriz, que denotaremos por , A^{-1} que cumple

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I,$$

donde I es la matriz identidad. En ese caso se dice que A^{-1} es la inversa de A .
Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{31} & -\frac{4}{31} & \frac{7}{31} \\ \frac{13}{31} & -\frac{7}{31} & -\frac{11}{31} \\ -\frac{9}{31} & \frac{12}{31} & \frac{10}{31} \end{pmatrix}$$

ya que

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{31} & -\frac{4}{31} & \frac{7}{31} \\ \frac{13}{31} & -\frac{7}{31} & -\frac{11}{31} \\ -\frac{9}{31} & \frac{12}{31} & \frac{10}{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

6. Matriz traspuesta

La traspuesta de una matriz $A = (a_{ij}) \in M_{mxn}$ es la matriz es la matriz $A^T = (a_{ji}) \in M_{nxm}$ que se obtiene a partir de la matriz A al intercambiar las filas por las columnas. La traspuesta de

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ es } A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Propiedades:

- Dada una matriz, siempre existe la traspuesta y además es única
- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, con $\lambda \in R$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

7. **Otros tipos de matrices**

Matriz simétrica: se dice que una matriz es simétrica si es igual a su traspuesta.

$$A \text{ es simétrica } \Leftrightarrow A^T = A$$

Un ejemplo de matriz simétrica es el siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 9 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = A^T.$$

Las matrices simétricas tienen ese nombre debido a que presentan simetría respecto a la diagonal principal. En otras palabras, una matriz $A = (a_{ij}) \in M_{mxn}$ es simétrica si cumple que $a_{ij} = a_{ji} \quad i = 1,2,\ldots,m \quad j = 1,2,\ldots,n$.

Matriz antisimétrica: Es una matriz igual a la opuesta de su traspuesta. En otras palabras,

$$A \text{ es antisimétrica } \Leftrightarrow A^T = -A.$$

La siguiente matriz es antisimétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 3 \\ 9 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz ortogonal: Es aquella cuya traspuesta es igual a su inversa. Es decir, es aquella que multiplicada por su traspuesta da como resultado la matriz unidad. Esto es,

$$A \text{ es ortogonal } \Leftrightarrow A \cdot A^T = I \Leftrightarrow A^T = A^{-1}$$

Las matrices ortogonales de orden 2 son de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},$$

donde *a* y *b* son números reales tales que .
Es evidente que esta matriz también es ortogonal.

Matriz idempotente: Es una matriz igual a su cuadrado. Es decir,

$$A \text{ es idempotente} \Leftrightarrow A^2 = A.$$

La siguiente matriz es idempotente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz nilpotente: Si A es una matriz cuadrada $A^k = O$ para algún número natural, k se dice que A es *nilpotente*. A continuación mostramos una matriz nilpotente.

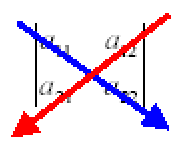
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Determinantes

A toda matriz cuadrada le podemos asignar un *número real* que denominaremos **determinante**

- Determinantes de orden 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$



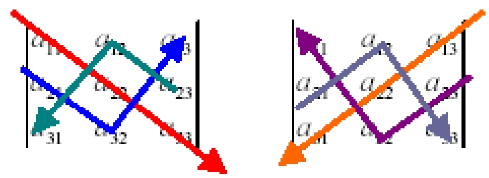
Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2.(-4) - 5.3 = -8 - 15 = -23$$

- Determinantes de orden 3

Si A es una matriz 3x3, su determinante (de orden 3) vendrá dado por:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$



Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1.(-2).5 + 3.(-1).(-3) + 4.4.1 - [(-3).(-2).4 + 1.(-1).1 + 3.4.5] =$$

$$= -10 + 9 + 16 - [24 + (-1) + 60] = 15 - 83 = -68$$

La fórmula anterior para el cálculo del determinante de orden 3 se conoce como Regla de Sarrus.

9. Aplicaciones del cálculo matricial

Matrices input-output

Las matrices input-output (entrada-salida) se aplican al considerar un modelo simplificado de la economía de un país en el que la actividad de cualquier empresa puede considerarse en algunos de los sectores básicos: la industria (I), la agricultura (A), el turismo (T) y los servicios (S). Las empresas compran (inputs), transforman los productos y luego venden (outputs).

Para tener una idea del modelo, supongamos que los datos de la economía de un país ficticio son los de la tabla siguiente, donde las cantidades se dan en algún tipo de unidad monetaria.

	I	A	T	S	Demanda	Output
I	50	23	4	6	200	283
A	12	70	15	9	70	176
T	1	1	50	15	350	417
S	80	90	85	87	43	385

En cada fila se indica el valor de las **ventas** efectuadas por cada sector a cada uno de los sectores restantes así como las ventas internas, la **demanda,** que representa el valor de las ventas efectuadas a los consumidores y a otros países, y el **output** total del sector que se obtiene sumando todas las ventas de ese sector. Por ejemplo, en el caso de la

industria, el valor de las ventas internas fue de 50, el valor de las ventas al sector agrario fue de 23, en el caso del turismo fue de 4, y en los servicios de 6. El valor de las ventas efectuadas a los consumidores y a otros países (demanda) fue de 200. Entonces el output total fue de 283.
A partir de la tabla anterior se definen las siguientes matrices:

Matriz de transacciones **Matriz demanda final** **Matriz de outputs**

$$M := \begin{pmatrix} 50 & 23 & 4 & 6 \\ 12 & 70 & 15 & 9 \\ 1 & 1 & 50 & 15 \\ 80 & 90 & 85 & 87 \end{pmatrix} \qquad D := \begin{pmatrix} 200 \\ 70 \\ 350 \\ 43 \end{pmatrix} \qquad O := \begin{pmatrix} 283 \\ 176 \\ 417 \\ 385 \end{pmatrix}$$

Y a partir de los elementos de las matrices M y O se puede construir una **matriz tecnológica**, T, que representa la proporción de las transacciones intersectoriales respecto al output total de cada sector.

$$T := \begin{pmatrix} \frac{50}{283} & \frac{23}{176} & \frac{4}{417} & \frac{6}{385} \\ \frac{12}{283} & \frac{70}{176} & \frac{15}{417} & \frac{9}{385} \\ \frac{1}{283} & \frac{1}{176} & \frac{50}{417} & \frac{15}{385} \\ \frac{80}{283} & \frac{90}{176} & \frac{85}{417} & \frac{87}{385} \end{pmatrix}$$

Toda la información de la tabla se puede expresar en forma matricial a través de la siguiente relación: O=TO+D, es decir,

$$\begin{pmatrix} \frac{50}{283} & \frac{23}{176} & \frac{4}{417} & \frac{6}{385} \\ \frac{12}{283} & \frac{70}{176} & \frac{15}{417} & \frac{9}{385} \\ \frac{1}{283} & \frac{1}{176} & \frac{50}{417} & \frac{15}{385} \\ \frac{80}{283} & \frac{90}{176} & \frac{85}{417} & \frac{87}{385} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 283 \\ 176 \\ 417 \\ 385 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 70 \\ 350 \\ 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 283 \\ 176 \\ 417 \\ 385 \end{pmatrix}$$

Esta fórmula permite hacer estudios destinados a planificar la economía.

Modelo metalúrgico

Supongamos que una empresa fabrica tres modelos de máquinas herramientas, M1, M2 y M3, y como materia prima fundamental utiliza tres tipos de metales, Hierro (H), Níquel (N) y Cobalto(C). La cantidad de materia prima que necesita para fabricar cada máquina, expresada en toneladas, se muestra en la siguiente tabla a la cual le hacemos corresponder la matriz.

	H	N	C
M1	5	0.4	0.2
M2	4	0.3	0.1
M3	3.5	0.5	0.2

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 0.4 & 0.2 \\ 4 & 0.3 & 0.1 \\ 3.5 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Las mejores ofertas de la materia prima corresponden a los proveedores P1, P2 y P3. Los precios por tonelada (expresados en cierta unidad monetaria) impuestos por cada uno de los proveedores a cada uno de los metales aparecen en la siguiente tabla

	P1	P2	P3
H	160	155	150
N	6000	6250	7200
C	3000	3010	2995

$$B := \begin{pmatrix} 160 & 155 & 150 \\ 6000 & 6250 & 7200 \\ 3000 & 3010 & 2995 \end{pmatrix}$$

Queremos hacer una tabla de doble entrada que muestre el gasto en materia prima por modelo de máquina y proveedor. Dicha tabla se obtiene a través del siguiente producto matricial:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3800 & 3877 & 4229 \\ 2740 & 2796 & 3059.5 \\ 4160 & 4269.5 & 4724 \end{pmatrix}$$

La tabla obtenida es:

	P1	P2	P3
M1	3800	3877	4229
M2	2740	2796	3059.5
M3	4160	4269.5	4724

Para interpretar los datos de esta tabla tomaremos como ejemplo el modelo M3 con el proveedor P1: Si compramos la materia prima al proveedor P1, los gastos por cada máquina del modelo M3 serán de 4160 unidades monetarias. Analizando la tabla podemos concluir que resulta más económico comprar la materia prima al proveedor P1.

5. RESUMEN

Tipos de matrices

Matriz Cuadrada: el número de filas es igual al número de columnas.

Matriz nula: todos sus elementos son ceros

Matriz diagonal: matriz cuadrada, $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Matriz identidad: Es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son todos 1.

Matriz triangular: Es una matriz cuadrada en la que todos los elementos situados por debajo (o por encima) de la diagonal principal son cero.

Operaciones con matrices

Adición o suma de matrices: $A, B \in M_{mxn}$. La matriz $S = (s_{ij}) \in M_{mxn}$ es la *suma* de las matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ se denota , S=A+B si sus elementos cumplen:

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad i = 1,2,\ldots m \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

Multiplicación de una matriz por un número: el *producto de un número* λ *por una matriz* $A \in M_{mxn}$ *es* una matriz $C = (c_{ij}) \in M_{mxn}$ cuyos elementos son de la forma $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ $i = 1,2,\ldots,m \quad j = 1,2,\ldots,n$.

Multiplicación de matrices: se denomina *matriz producto de la matriz* $A = (a_{ij}) \in M_{mxn}$ *por la matriz* $B = (b_{ij}) \in M_{nxp}$ *a una matriz* $C = (c_{ij}) \in M_{mxp}$ cuyos elementos son de la forma $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$

Matriz traspuesta . La traspuesta de una matriz $A = (a_{ij}) \in M_{mxn}$ es la matriz es la matriz $A^T = (a_{ji}) \in M_{nxm}$ que se obtiene a partir de la matriz A al intercambiar las filas por las columnas.

Otros tipos de matrices

Matriz simétrica:

$$A \text{ es simétrica } \Leftrightarrow A^T = A$$

Matriz antisimétrica:

$$A \text{ es antisimétrica } \Leftrightarrow A^T = -A.$$

Matriz ortogonal:

$$A \text{ es ortogonal } \Leftrightarrow A \cdot A^T = I \Leftrightarrow A^T = A^{-1}$$

Matriz idempotente:

$$A \text{ es idempotente } \Leftrightarrow A^2 = A .$$

Matriz nilpotente: Si *A* es una matriz cuadrada $A^k = O$ para algún número natural, *k* se dice que *A* es *nilpotente*.

Determinantes

Determinantes de orden 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinantes de orden 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

6. BIBLIOGRAFÍA

- Emilio Bujalance y otros. Matemáticas especiales. Editorial Sanz y Torres (1998). 2ª Edición
- María E. Ballvé y otros. Problemas de matemáticas especiales. Editorial Sanz y Torres (1996). 2ª Edición.
- José T. Pérez Romero y José A. Jaramillo Sánchez. Matemáticas. Pruebas de acceso a la universidad para mayores de 25 años. Editorial MAD. (2002).
- http://descartes.cnice.mecd.es/
- http:www.uoc.edu

7. ACTIVIDADES

1. **Dadas las matrices**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & \frac{1}{2} \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Determinar las siguientes matrices:

a) 2A-3D   b) AB

c) CD   d) A^2-$2D^2$

2. **Determina el determinante de las siguientes matrices:**

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

   ♋☽ No podemos sumarlas

   ♌☽ Podemos sumarlas sin problemas

   ♍☽ Sólo podemos sumar las dos primeras filas de cada una

4. Dadas A y B dos matrices del mismo tamaño ¿podemos afirmas que A+B=B+A?

   ♋☽ Siempre

   ♌☽ Nunca

   ♍☽ Algunas veces

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

   ♋☽ A+B=B+C

   ♌☽ (A+B)+C=A-(B+C)

   ♍☽ (A+B)+C=A+(B-C)

6. ¿Se puede multiplicar k=7 por A=(1 2)?

♋❩ Si

♌❩ No

♍❩ Sólo si A es la matriz nula

7. Dado k=3, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ ¿tenemos que 7(A+B)=7A+7B?

♋❩ Si

♌❩ No, no es posible

♍❩ Sólo si k fuera igual a 1

8. ¿Cuál es el número k tal que kA=A?

♋❩ el 0

♌❩ el 1

♍❩ Ninguno de los anteriores

9. Dado k=-1 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$, ¿es cierto que A-B=A+kB?

♋❩ Si

♌❩ No

♍❩ Sólo si A y B son iguales

10. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$

♋❩ Se puede calcular AB

♌❩ Se puede calcular BA

♍❩ No se pueden calcular ni AB ni BA

11. Dadas dos matrices A y B se puede calcular AB

♋❩ Si el número de filas de A es igual al número de columnas de B

♌❩ Si el número de columnas de A es igual al número de filas de B

♍❩ En ninguno de los dos casos anteriores

12. Dadas $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$

♋❩ AB=BA

♌❩ AB es distinto de BA

♍☽ A y B no se pueden multiplicar

9. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

1. **Dadas las matrices** $A=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0&3\\1&2&5\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&2\\1&7\\0&2\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}2&5\\2&-1\end{pmatrix}$

Determinar las siguientes matrices:

a) 2A+3D b) AB c) CB d)A^2-3D^2

2. **Sean a y b números reales, entonces**

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad y \quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

¿se puden utilizar estas igualdades en el supuesto que ay b sean reemplazadas por matrices Ay B cuadradas del mismo orden?

3. **Determinar el determinante de cada una de las siguientes matrices:**

$$A=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1&0&3\\1&2&5\\3&5&1\end{pmatrix}$$

4. **Determinar el valor del parámetro a para que la siguiente matriz tenga determinante nulo**

$$A=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&1+a&1\\1&1&1\end{vmatrix}$$

10. SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

1. **a)** $\begin{pmatrix}10&19\\8&3\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}4&4&16\\4&6&18\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}5&4&19\\8&14&38\\2&4&10\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}-36&-5\\-1&-22\end{pmatrix}$

2. **La solución se dará en clase**

3. **a)** 4 **b) -26**

4. **a=1 ó a=-1**

(1) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 6 & -7 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -10 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular: 3(A-B) +5A

Solución:
Primero haremos la resta de las matrices

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 6 & -7 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & -10 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-1 & 3-4 & 1-(-10) \\ 6-(-5) & -7-0 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 11 \\ 11 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

El resultado lo multiplicamos por 3

$$3\cdot\begin{pmatrix} -6 & -1 & 11 \\ 11 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-6) & 3\cdot(-1) & 3\cdot 11 \\ 3\cdot 11 & 3\cdot(-7) & 3\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -3 & 33 \\ 33 & -21 & 0 \end{pmatrix}$$

hacemos el producto de A por 5

$$5\cdot\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 6 & -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot(-5) & 5\cdot 3 & 5\cdot 1 \\ 5\cdot 6 & 5\cdot(-7) & 5\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & 15 & 5 \\ 30 & -35 & 10 \end{pmatrix}$$

Ahora haremos la suma de 3(A-B) + 5A

$$\begin{pmatrix} -18 & -3 & 33 \\ 33 & -21 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -25 & 15 & 5 \\ 30 & -35 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43 & 12 & 38 \\ 63 & -56 & 10 \end{pmatrix}$$

(2) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \qquad \textbf{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular:

a) $A \cdot B$

b) $A \cdot B^t$

Solución:

a) Para calcular el producto de matrices, primero nos tenemos que fijar que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda y luego multiplicaremos filas por columnas

En este caso se cumple que el número de columnas de la primera (2) es igual al número de filas de la segunda (2).

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 7 + 0 \cdot 2 & 8 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 7 + 9 \cdot 2 & (-1) \cdot 0 + 9 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 + 0 & 0 + 0 \\ -7 + 18 & 0 + 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 0 \\ 11 & 27 \end{pmatrix}$$

b) Para hacer esta multiplicación, el valor de B es la traspuesta de B. Es cambiar las filas por columnas

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 7 + 0 \cdot 0 & 8 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 7 + 9 \cdot 0 & (-1) \cdot 2 + 9 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 + 0 & 16 + 0 \\ -7 + 0 & -2 + 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 16 \\ -7 & 25 \end{pmatrix}$$

(3) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular:

a) $A \cdot B$

b) $A - I$, siendo I la matriz identidad.

a) Para calcular el producto de matrices, primero nos tenemos que fijar que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda y luego multiplicaremos filas por columnas

En este caso se cumple que el número de columnas de la primera (3) es igual al número de filas de la segunda (3).

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 3\cdot 1 + 5\cdot 5 & 1\cdot 3 + 3\cdot 0 + 5\cdot 4 & 1\cdot(-1) + 3\cdot 7 + 5\cdot 1 \\ -2\cdot 2 + 4\cdot 1 + 5\cdot 5 & -2\cdot 3 + 4\cdot 0 + 5\cdot 4 & -2\cdot(-1) + 4\cdot 7 + 5\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 5 & 0\cdot 3 + 1\cdot 0 + 2\cdot 4 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 7 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 23 & 31 \\ 25 & 14 & 35 \\ 11 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

es fácil equivocarse por lo que conviene llevar mucho cuidado.

b) A – I

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 3-0 & 5-0 \\ -2-0 & 4-1 & 5-0 \\ 0-0 & 1-0 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

a) **Comprobar que se cumple la propiedad asociativa de la suma de matrices, es decir:**
   A + (B + C) = (A + B) + C
b) **Comprobar que se cumple la propiedad asociativa del producto de matrices, es decir:**
   $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

Soluciones:

a) para sumar las matrices tienen que tener la misma dimensión, en este caso es de 2x2

$$B + C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & -1+7 \\ 1+5 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

El resultado se lo sumamos a la matriz A

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 5+6 \\ 0+6 & 3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Para comprobar la propiedad asociativa hacemos primero la suma de A + B

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 5-1 \\ 0+1 & 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

al resultado le sumamos la matriz C

$$(A + B) + C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 & 4+7 \\ 1+5 & 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

vemos que nos da el mismo resultado

(5) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \textbf{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtener la matriz X que verifica que $A \cdot X = B$

Solución:

Suponemos que la matriz X tiene una dimensión de 2x2

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que en el producto de matrices, el término a_{11} es el resultado de multiplicar y sumar la primera fila por la primera columna

1 · a + 2 · c = 4 (1)
1 · b + 2 · d = -6 (2)
2 · a + 5 · c = 2 (3)
2 · b + 5 · d = 1 (4)

Con las ecuaciones 1 y 3

a + 2 c = 4
2 a + 5 c = 2
multiplicamos la de arriba por 2 y cambiamos el signo
$-\cancel{2a} - 4c = -8$
$\cancel{2a} + 5c = 2$
c = -6 a = 16

Hacemos lo mismo con las ecuaciones 2 y 4

b + 2 d = -6
2 b + 5 d = 1
multiplicamos la superior por -2
$-\cancel{2b} - 4d = +12$
$\cancel{2b} + 5d = 1$
d = 13; b = -32

El valor de X será

$$X = \begin{pmatrix} 16 & -32 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$$

(6) Obtener los determinantes de las matrices A y B de los ejercicios (2) y (3).

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 8 \cdot 9 - (-1) \cdot 0 = 72$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 3 - 2 \cdot 0 = 21$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 0 - 0 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 5 \cdot 1 - (-2) \cdot 3 \cdot 2 =$$

$$= 8 - 10 + 0 - 0 - 5 + 12 = 5$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 \cdot 5 - 5 \cdot 0 \cdot (-1) - 4 \cdot 7 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 1 =$$

$$= 0 - 4 + 105 - 0 - 56 - 3 = 42$$

(7) Obtener el valor de m para que el determinante de la matriz A sea igual a -12.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & m \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & m \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4{\cdot}0{\cdot}4 + 3{\cdot}(-1){\cdot}2 + 1{\cdot}m{\cdot}2 - 2{\cdot}0{\cdot}2 - 3{\cdot}1{\cdot}4 - (-1){\cdot}m{\cdot}4 = -12$$

0 - 6 + 2 m - 0 -12 + 4 m = -12

6 m = -12 + 12 + 6;   6 m = 6;   m = 6 / 6 = 1

5.

LOGARITMOS

UNIDAD DIDÁCTICA 4: LOGARITMOS

3. ÍNDICE

4. INTRODUCCIÓN GENERAL A LA UNIDAD Y ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO

En esta unidad, nuestro objetivo básico es el estudio de los logaritmos, aunque para ello comenzaremos recordando las propiedades básicas de las potencias y de las funciones exponenciales. Seguidamente introduciremos la función logarítmica como la función inversa de la función exponencial. A continuación introducimos las propiedades básicas de los logaritmos y el cambio de base. Finalmente, veremos algunos ejemplos de cómo se resuelven ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conocer la definición de la función logarítmica
- Estudiar sus propiedades y características

4. DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

11. Introducción

La esperanza de vida, aún en los países poco desarrollados, creció después de la Segunda Guerra Mundial aunque a distinto ritmo. Este crecimiento, si bien al principio trajo mayor actividad y progreso, a la larga ha producido graves problemas: falta de viviendas, escuelas, puestos de trabajo.... El aumento de la población por la prolongación de la vida se ha visto compensado en parte por el descenso de la natalidad en los países industrializados. De

todos modos, ha aparecido el problema del envejecimiento de la población (es decir el aumento de la edad promedio). Analizaremos ahora algún modelo matemático que trata de describir la evolución de una población.
En Europa occidental, durante los siglos XVII y XVIII, comenzó a descender el índice de mortalidad, y el incremento poblacional en muchos países se situó entre 0.5 y 1% anual. Para evitar complicaciones con los cálculos consideraremos que el crecimiento poblacional fue del 1% anual durante los primeros 20 años de este siglo.
Supongamos que la cantidad de población europea al comienzo del siglo XVII (año 1.600) sea 10 (en cientos de millones). La función P(t) medirá la cantidad de población en el tiempo t. Como comenzaremos nuestro estudio a partir del año 1.600 este será el tiempo inicial, es decir, t = 0.

Año	Tiempo **t** (años)	Población (en cientos de millones)
1600	$t = 0$	$P(0) = 10$
1601	$t = 1$	$P(1) = 10 + 1\%$ de 10 $= 10 + \frac{1}{100}.10$ $= 10{,}1$
1602	$t = 2$	$P(2) = 10{,}1 + 1\%$ de $10{,}1$ $= 10{,}1 + 0{,}01.\ 10{,}1$ $= 10{,}201$
1603	$t = 3$	$P(3) = \ldots$
...	...	...

¿Podemos hallar una fórmula que nos permita calcular la población para cualquier Valor de **t** ?.Para ello analizaremos lo que hemos hecho hasta el momento en cada paso:

- en **t** = 0, P (0) = 10
- en **t** = 1, P (1) = 10 + 0,01.10 = 10 (1 + 0,01) = 10 .1,01 = P (0) . 1,01
- en **t** = 2, P (2) = P (1) + 0,01. P (1) = 10. 1,01 + 0,01. 10. 1,01 =
  10. 1,01 (1 + 0,01) = 10. 1,01. 1,01 = 10 $(1.01)^2$

¿Podrás realizar el caso t = 3 ? (Ten en cuenta los pasos hechos en los casos t = 1 y t =2)
En general, la población después de **t** períodos será:

$$\mathbf{P(t) = 10\,(1.01)^t}$$

donde 10 es la población inicial P (0). Verifiquemos que la fórmula obtenida nos da, por ejemplo para t = 2, P (2) = 10 . 1,012 = 10,201 que coincide con el valor de la tabla. Si queremos estimar la población en el año 1610, será P (10) = 10. 1,0110 = 11046.
Observemos que en la fórmula P (t) = 10 (1,01) t, el factor 10 es la población inicial y la variable **t** figura en el exponente. A este tipo de funciones se las llama **exponenciales.**

Por otra parte, supongamos que un determinado bien material que hoy cuesta 150 euros se devalúa con el uso, cada año, un 4% de su valor durante el año anterior. Por ejemplo:

- En **t** = 0 (inicio) el valor en 0 V(0) = 150
- En **t** = 1 (1 año después) V(1) = 150 – 4% de 150 = 144
- En **t** = 2 (2 años después) V(2) = 144 – 4% de 144 = 138,24

- En **t** = 3 .....

En general, una fórmula que representa esta situación, puede obtenerse como en el ejemplo anterior

$$\mathbf{V(\mathit{t}) = 150.\ (096)^{t}}$$

Supongamos ahora, que queremos saber después de cuántos años de uso el valor del bien se redujo aproximadamente a 92 euros. Para esto necesitamos resolver la siguiente ecuación

$$92 = 150\ (0{,}96)^{t}$$

¿Cómo despejar t de esta fórmula?.Observemos que el valor de ***t*** que estamos buscando es tal que elevando el número 0,96 a ese valor da por resultado $\frac{92}{150}$.

Es decir, nuestra pregunta es: **¿cómo podemos resolver ecuaciones del tipo $10^x = k$?,** ó en general ¿ $a^x = k$?. Podemos hacerlo si conocemos la función inversa de $y = 10^x$, es decir, **la función logarítmica.**

5. Potencias y funciones exponenciales

1) Potencias

- potencias de exponente natural

$$a^n = \underbrace{a\,.\,a\,.\,a\,....\,a}_{n \text{ veces}} \qquad n \in \mathbb{N},$$

- potencias de exponente nulo

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0),$$

- potencia de exponente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad n \in \mathbb{N}\ ,\ (a \neq 0),$$

- potencia de exponente fraccionario

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \qquad m \in \mathbb{Z}\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

2) Propiedades básicas de las potencias

$$a^n\,.\,a^m = a^{n+m} \qquad\qquad a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n.m} \qquad n\,,\,m \in \mathbb{Q}\,.$$

Ejemplos:

- $4^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$
- $2^{5/2} = \sqrt{2^5}$
- $5^2.5^4 = 5^6 \qquad (3^2)^3 = 3^6$

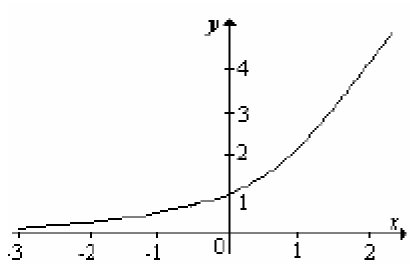
3) Función exponencial

Dado $a > 0$, llamamos ***función exponencial*** de base a a la función $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ definida por $f(x) = a^x$.

El comportamiento de la función exponencial es muy distinto según sea $a > 1$, $a < 1$, $a = 1$.

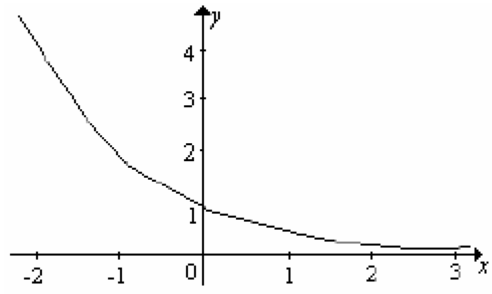
Ejemplo: Analicemos la gráfica de la función exponencial de acuerdo al valor de a.

a) Si $a > 1$, por ejemplo $a = 2$, la función $y = 2^x$ es creciente.



Observemos que cualquiera sea el valor de a > 0, la gráfica de la función exponencial debe pasar por el punto (0,1), ya que es el valor de la ordenada al origen; es decir el valor que toma la función para x = 0. Por otro lado, es claro que a medida que el valor de x aumenta, el valor de a^x también, y si el valor de x decrece (con valores negativos) entonces el valor de a^x tiende a 0.

b) Si $0 < a < 1$, por ejemplo $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ la función es decreciente.



La siguiente tabla de valores nos permite hacer un estudio comparativo de las funciones $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	2^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}$
0	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$
3	8	$\frac{1}{8}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	2
-2	$\frac{1}{4}$	4
-3	$\frac{1}{8}$	8
...	...	...

Como hemos comentado en la introducción, la función exponencial aparece con frecuencia en modelos matemáticos de diferentes procesos evolutivos. Por ejemplo, las amebas son seres unicelulares que se reproducen dividiéndose en dos. Supongamos que las condiciones de un cultivo son tales que las amebas se duplican aproximadamente cada hora, y que inicialmente solo hay una ameba. Proponemos calcular el número de amebas que habrá según pasan las horas:

Tiempo (hs)	1	2	3	4	5	6	7	... x
Nro. de amebas	2	4	8					... 2^x

Observemos que si en el momento inicial hay k amebas, y en la primer hora se duplican, entonces ahora hay $2k$. En la segunda hora se vuelven a duplicar, es decir, $2\,(2k) = 2^2\,k$, en la tercer hora se repite la situación y tenemos $2(22\,k) = 2^3k$, etc. Luego en general se tiene 2^xk. Es decir, si al comienzo del proceso había k amebas, el número total al cabo de x horas será $y = k\,2^x$

4) Ecuaciones exponenciales

> A una ecuación en la que la incógnita aparece en un exponente se la llama ***ecuación exponencial***.

Ejemplos:

a) $5^{3-x} = 125$ Observemos que $5^{3-x} = 5^3$, entonces $3 - x = 3$, luego $x = 0$

b) $3^{1-x^2} = \dfrac{1}{27}$

$$3^{1-x^2} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$$
$$1 - x^2 = -3$$
$$x^2 = 4$$
$$|x| = \sqrt{4} = 2 \text{ entonces}$$
$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -2$$

6. Función logarítmica y logaritmos

1) Función logarítmica

Nuestra pregunta es: ¿cómo podemos resolver ecuaciones del tipo $10^x = k$?, la respuesta es conociendo la función inversa de $y=10^x$.

> A esta nueva función se la llama ***función logarítmica en base 10*** y se denota $y = log_{10}\,x$ ó también, $y = log\,x$.

Ahora, podemos decir que,

si $10^x = k$ entonces $x = log\,k$

es decir, el logaritmo de un número en base 10 es el exponente al que hay que elevar la base 10 para obtener dicho número.

Ejemplo:

- Si $10^x = 100$ entonces $x = log_{10}100 = 2$ pues $10^2 = 100$
- Si $3 = \log_{10} 1000$ entonces $10^3 = 1000$
- $10^x = 1/100$ entonces $x = \log_{10} 100^{-1} = -2$ pues $10^{-2} = 100^{-1}$.

Generalizando:

Sea $a > 0$ y $a \neq 1$, e $y > 0$, llamaremos ***logaritmo en base a de y*** al único número x que verifica $a^x = y$. Es decir,

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Ejemplos:

- **Interpretación de la definición de logaritmo:**
  a) $2^7 = 128$ por tanto $log_2 128 = 7$
  b) $8^{1/3} = 2$ por tanto $log_8 2 = 1/3$

- **Calculamos**
  a) $log_2 16$
  $log_2 16 = y \Leftrightarrow 2^y = 16 = 2^4 \Leftrightarrow y = 4$
  b) $log_2 32$
  $log_2 32 = y \Leftrightarrow 2^y = 32 = 2^y \Leftrightarrow y = 5$
- **Resolvemos una ecuación**

$$10^{1-x} = 30$$
$$10^{1-x} = 30 \Leftrightarrow 1 - x = log_{10} 30 \cong 1{,}47712$$
luego $x \cong -0{,}47712$

2) Propiedades de los logaritmos

- $\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$
- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores

$$Log_a (x \,.\, y) = log_a x + log_a y$$

<u>Ejemplo</u> $log_2 (4.8) = log_2 32 = 5$ y $log_2 4 + log_2 8 = 2 + 3 = 5$

- El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base

$$\boldsymbol{Log_a (x^y) = y \,.\, log_a x}$$

<u>Ejemplo</u> $log_2\ 4 \cdot 3 = log_2\ 64 = 6$ pues $2^6 = 64$ y $3\ log_2\ 4 = 3.2 = 6$

A partir de las dos propiedades anteriores podemos deducir las dos propiedades siguientes:

- El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\boldsymbol{\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$$

Observar que $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a \left(x\frac{1}{y}\right) = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y$

<u>Ejemplo</u> $log_3\ 81/9 = log_3\ 9 = 2$ y por otro lado $log_3 81 - log_3\ 9 = 4 - 2 = 2$.

- El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz.

$$\boldsymbol{\log_a \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y}\log_a x = \frac{\log_a x}{y}}$$

Observar que $\log_a \sqrt[y]{x} = \log_a x^{\frac{1}{y}} = \frac{1}{y}\log_a x$

<u>Ejemplo</u> $\log_3 \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \log_3 \frac{1}{3} = -1$ por otro lado $\frac{1}{4}\log_3 \frac{1}{81} = \frac{1}{4}\cdot(-4) = -1$

3) Cambio de base

Las calculadoras científicas permiten solamente obtener logaritmos decimales y neperianos.

- Los ***logaritmos decimales*** son los logaritmos de base 10, y se acostumbra denotar $log_{10}\, x = log\, x$ omitiendo la base.

- El ***logaritmo neperiano o natural*** es el logaritmo cuya base es el número $e \cong$ 2,7182 y se denota $log_e\, x = ln\, x$.

Si queremos calcular logaritmos en otra base, es conveniente realizar cambios de base. Si, por ejemplo**,** tuviéramos que calcular $\boldsymbol{log_2 3}$**:**

Lo primero que hacemos es llamar $x = \log_2 3 \Leftrightarrow 2^x = 3$ por tanto, tomando logaritmos en ambos lados de la última igualdad tenemos $\log 2^x = \log 3 \Leftrightarrow x \log 2 = \log 3$ de donde tenemos que $\log_2 3 = x = \dfrac{\log 3}{\log 2}$.

En general tenemos que: $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$ **de donde tenemos que**

$$\boldsymbol{y \log_b a = \log_b x \Leftrightarrow y = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

7. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Aplicamos las propiedades de logaritmo y resolvemos la ecuación resultante en forma habitual

a) $3^x \,.\, 5^{2x} = 4$

$$\log\,(3^x \,.\, 5^{2x}) = \log\,4$$
$$\log 3^x + \log 5^{2x} = \log\,4$$
$$x \,.\, \log 3 + 2\,x\, \log 5 = \log\,4$$
$$x \,.\, 0{,}477 + 2x \,.\, 0{,}699 \cong 0{,}602$$
$$x \,.\, 0{,}477 + x \,.\, 1{,}398 \cong 0{,}602$$
$$x \,.\, (0{,}477 + 1{,}398) \cong 0{,}602$$
$$x \,.\, 1{,}875 \cong 0{,}602$$
$$x \cong 0{,}321$$

Recordemos que…
$a^{m+n} = a^m . a^n$
$a^{-1} = 1/a$

Extraemos 3^x factor común, resolvemos y aplicamos a la expresión $3^x = 729{,}3$ logaritmo para luego resolver mediante propiedades.

b) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 2431$

$$3^{x+1} + 3^{x-1} = 2431$$
$$3\,.3^x + 3^{-1}\,.\,3^x = 2431$$
$$3^x\left(3 + \frac{1}{3}\right) = 2431$$
$$3^x \,.\, \frac{10}{3} = 2431$$
$$3^x = 729{,}3$$
$$x\,\log 3 = \log\,729{,}3$$
$$x = \frac{\log\,729{,}3}{\log\,3}$$
$$x \cong 6{,}0003$$

Consideremos $z = 3^x$, reemplazando en la ecuación, obtenemos una ecuación de segundo grado y encontramos las raíces como se mostró en la unidad 5.

c) $3^{2x} - 4 \,.\, 3^{x+1} = -27$

$$(3^x)^2 - 4 \,.\, 3 \,.\, 3^x + 27 = 0$$
$$z^2 - 12\,z + 27 = 0$$

las raíces de esta ecuación son $z_1 = 9$, $z_2 = 3$.
Por lo tanto $3^x = 9 \Rightarrow x = 2$
y $3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

Si reemplazamos $z = 5^x$ obtenemos una ecuación de segundo grado.

Atención!!
Una vez obtenidas las soluciones no olvides verificar si las mismas satisfacen la ecuación.

d) $25^x + 5^x = 20$

$$25^x + 5^x = 20$$
$$(5^x)^2 + 5^x = 20$$

$$z^2 + z - 20 = 0$$

Raíces de la ecuación cuadrática: $z_1 = 4$, $z_2 = -5$.

Luego $5^x = 4 \Rightarrow x \log 5 = \log 4$
$\Rightarrow x \cong 0{,}8613$

Si consideramos $5^x = -5$, vemos que no hay valores de que cumpla la ecuación, pues ninguna potencia de 5 puede se negativa.

Por ejemplo, calculemos el valor de x en las siguientes ecuaciones logarítmicas:

Aplicando la definición de logaritmo.

a) $\log_5 4x = 2$

$$\log_5 4x = 2$$
$$4x = 5^2$$
$$x = \frac{25}{4}$$

b) $\log_9 (x+1) + \log_9 9(x+1) = 2$

$$\log_9 (x+1) + \log_9 9(x+1) = 2$$
$$\log_9 9(x+1)^2 = 2$$
$$9(x+1)^2 = 9^2$$
$$(x+1)^2 = 9$$

Observemos que... con la solución $x_2 = -4$ obtenemos $\log_9(-3) = x \Leftrightarrow 9^x = -3$ igualdad que no se verifica para ningún valor de x.

$$|x+1| = 3 \quad \begin{cases} x + 1 = 3 \Rightarrow x_1 = 2 \\ x + 1 = -3 \Rightarrow x_2 = -4 \end{cases}$$

Hemos considerado $z = log_2 x$.

Atención!!
No olvides verificar las soluciones y descartar alguna si en necesario.

c) $2 \, log_2^2 \, x - 10 \, log_2 \, x + 8 = 0$

$$2z^2 - 10z + 8 = 0$$

cuyas soluciones son $z_1 = 4$, $z_2 = 1$

$$log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 2^4 = 16$$

$$log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2^1 = 2$$

Necesitamos que todos los logaritmos involucrados en esta ecuación estén expresados en la misma base para poder utilizar las propiedades. Expresamos todos los logaritmos en base 2.

d) $3 \, log_2 \, x - 2 \, log_4 x = 2$

$$log_4 x = y \Leftrightarrow x = 4^y$$

$$log_2 x = y \, log_2 4$$

$$log_2 x = y \, . \, 2$$

$$y = \frac{1}{2} log_2 x$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos:

$$3 \, log_2 \, x - log_2 x = 2$$

$$2 \, log_2 x = 2$$

$$log_2 x = 1$$

$$x = 2$$

5. RESUMEN

- **Potencias**

$$a^n = \underbrace{a \, . a \, . a \, ... \, a}_{n \text{ veces}} \qquad n \in \mathrm{N},$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0),$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad n \in \mathrm{N} \ , \ (a \neq 0),$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \qquad m \in \mathrm{Z} \quad , \quad n \in \mathrm{N}$$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\qquad a^n : a^m = a^{n-m}$

$(a^n)^m = a^{n.m} \qquad n, m \in \mathbb{Q}$.

- **Definición de logaritmo**

Sea $a > 0$ y $a \neq 1$, e $y > 0$, llamaremos ***logaritmo en base a de y*** al único número x que verifica a^x = y. Es decir, $\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$

- **Propiedades de los logaritmos**

  - $\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$
  - $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
  - $\log_a (x^y) = y \cdot \log_a x$
  - $\log_a (x^y) = y \cdot \log_a x$
  - $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
  - $\log_a \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y}\log_a x = \frac{\log_a x}{y}$

- **Cambio de base**

$$y = \log_a x \Leftrightarrow y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

6. ACTIVIDADES

1. **Calcular:**

$$\text{a) } \log_2 4^{81} \qquad \text{b) } \log_3 \sqrt[15]{27}\ .$$

2. Mostrar con un ejemplo que en general

a) $\log_a (x + y) \neq \log_a x + \log_a y$ $\qquad$ b) $\log_a (x - y) \neq \log_a x - \log_a y$.

3. Resolver aplicando la definición de logaritmo

a) $\log_5 25 + \log_2 \frac{1}{4}$ $\quad$ b) $\log 1000 - \frac{1}{3} \log_{1/2} 1$

c) $log_{\frac{2}{7}} 49$ - $log_2 16$ d) $log_2 \sqrt{2} + log_3 \sqrt[3]{3^4} - log\ 0{,}001$

e) $log_3 27 + log_{1/2} 4 - 2\ log_{1/3} \frac{1}{9}$

4. Sabiendo que $\log_2 5 \cong 2.3$ calcular, aplicando las propiedades de los logaritmos

a) $log_2 10$ b) $log_2 2{,}5$ c) $log_2 \sqrt{5}$ d) $log_2 25$.

5. Calcular realizando cambio de base

a) $log_2 10$ b) $log_5 2$ c) $log_{1/2} 20$ d) $log_4 0{,}1$.

7. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

1. Sabiendo que log 2=0.301030 y log 3= 0.4771213, calcular:

a. **$\log 8$** **b. $\log \frac{6}{4}$** **c. $\log 3000$**

d. $\log \sqrt[3]{3}$ **e. $\log 0.02$** **f. $\log \frac{1}{4}$**

2. Calcular, utilizando la calculadora, con logaritmos decimales:

a. **$\log_2 5$** **b. $\log_3 10$** **c. $\log_7 8$**

3. Calcular, utilizando la calculadora, con logaritmos neperianos

a. $\log_3 27$ **b. $\log_6 22$** **c. $\log_9 33$**

8. SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

1. a. 0.90309 b. 0.1760912 c. 3.4771213

d. 0.1590404 e. -1.69897 f. -0.60206

2. a. 2.3219281 b. 2.0959033 c. 1.0686216

3. a. 3 b. 1,7251436 c. 1.5913292

MAS EJERCICIOS

(1) Hallar el logaritmo en base 3 de 81

(sol: 4)

¿Que valor debe tener x para que 3 sea igual a 81? $3^x = 81$
Si te fijas, $81 = 3^4$; $3^4 = 3^x$ *luego* $x = 4$
Otra forma de hacerlo es por medio del cambio de base: $\log_a M = \dfrac{\log M}{\log a}$, *ya que los logaritmos decimales si que salen en la calculadora*

$$\log_3 81 = \frac{\log 81}{\log 3} = \frac{1{,}9}{0{,}47} = 4$$

(2).- Hallar el logaritmo en base 8 de 16 **$x = \log_8 16$**
(sol:4/3)
La base, que es 8, elevada a x debe de dar 16. En vez de 8 podemos poner 2^3 *y en vez de 16 podemos poner* 2^4
$8^x = 16$; $2^{3\cdot x} = 2^4$; *para que se cumpla esta igualdad* $3x = 4$ *luego* $x = \dfrac{4}{3} = 1{,}33$
Cambiando de base, para poder hacerlo en la calculadora

$$\log_8 16 = \frac{\log 16}{\log 8} = \frac{1{,}2}{0{,}9} = 1.33 = \frac{4}{3}$$

(3).- Hallar el logaritmo en base 8 de 32 **$x = \log_8 32$**
(sol: 5/3)
La base, que es 8, elevada a x debe de dar 32. En vez de 8 podemos poner 2^3 *y en vez de 32 podemos poner* 2^5
$8^x = 32$; $2^{3\cdot x} = 2^5$; *para que se cumpla esta igualdad* $3x = 5$ *luego* $x = \dfrac{5}{3} = 1{,}66$
Por cambio de base

$$\log_8 32 = \frac{\log 32}{\log 8} = \frac{1{,}5}{0{,}9} = 1{,}66 = \frac{5}{3}$$

(4).- Hallar el valor de x en la expresión **$x = \log(10^4 \cdot 10^2)$**
es el logaritmo de un producto y según el primer párrafo de la página, es igual a la suma de los logaritmos de los factores

$$x = \log(10^4 \cdot 10^2) = \log(10^4) + \log(10^2)$$

el primer logaritmo es 4 ya que $x = \log(10^4)$; $10^x = 10^4$; $x = 4$
Por la misma razón, el segundo logaritmo es igual a 2

$$x = \log(10^4 \cdot 10^2) = \log(10^4) + \log(10^2) = 4 + 2 = 6$$

(5).- Hallar el logaritmo en base 4 de 8 **$x = \log_4 8$**
(sol: 3/2)

La base, que es 4, elevada a x debe de dar 8. En vez de 4 podemos poner 2^2 y en vez de 8 podemos poner 2^3

$4^x = 8$; $2^{2\cdot x} = 2^3$;   para que se cumpla esta igualdad $2x = 3$ luego $x = \frac{3}{2}$

Por cambio de base

$$\log_4 8 = \frac{\log 8}{\log 4} = \frac{0{,}9}{0{,}6} = 1{,}5 = \frac{3}{2}$$

(6).- Hallar el logaritmo en base 2 de 4   **$x = \log_2 4$**

(sol: 2)

La base, que es 2, elevada a x debe de dar 4. En vez de 2 podemos poner 2^1 y en vez de 4 podemos poner 2^2

$2^x = 4$; $2^{1\cdot x} = 2^2$;   para que se cumpla esta igualdad $x = 2$ luego $x = 2$

Por cambio de base

$$\log_2 4 = \frac{\log 4}{\log 2} = \frac{0{,}6}{0{,}3} = 2$$

(7).- Hallar el logaritmo en base 10 de 10^4   **$x = \log\ 10^4$**

(sol: 4)

La base, que es 10, elevada a x debe de dar 10^4.

$10^x = 10^4$; $10^x = 10^4$;   para que se cumpla esta igualdad $x = 4$
luego $x = 4$

(8).- Hallar el logaritmo en base 27 de 81   **$x = \log_{27} 81$**

(sol:4/3)

La base, que es 27, elevada a x debe de dar 81. En vez de 27 podemos poner 3^3 y en vez de 81 podemos poner 3^4

$27^x = 81$; $3^{3x} = 3^4$;   para que se cumpla esta igualdad $3x = 4$ luego $x = 4/3 = 1{,}33$

Por cambio de base

$$\log_{27} 81 = \frac{\log 81}{\log 27} = \frac{1{,}90}{1{,}43} = 1{,}33$$

(9).- Hallar el logaritmo en base 2 del producto de 32 por 8   **$x = \log_2 (32 \cdot 8)$**

(sol:8)

el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores

$$x = \log_2 (32 \cdot 8) = \log_2 32 + \log_2 8$$

$\log_2 32 = x$; $32 = 2^x$; $32 = 2^5 = 2^x$; luego $x = 5$
$\log_2 8 = y$; $8 = 2^y$; $8 = 2^3 = 2^y$; luego $y = 3$

$$x = \log_2 (32 \cdot 8) = \log_2 32 + \log_2 8 = 5 + 3 = 8$$

Por cambio de base

$$\log_2 (32 \cdot 8) = \frac{\log(32 \cdot 8)}{\log 2} = \frac{\log 32 + \log 8}{\log 2} = \frac{1{,}5 + 0{,}9}{0{,}3} = 8$$

(10).- ¿A quién es igual el logaritmo log (m·n)?
(sol: log m + log n)
Es el logaritmo de un producto, luego por la definición es igual a la suma de los logaritmos de los factores

$$\log (m \cdot n) = \log m + \log n$$

(11).- Expresa en función de un solo logaritmo: log c + log d
(sol: log (c·d))
Sabemos que el logaritmo de un producto es una suma de logaritmos de los factores. En este caso es el contrario, lo que nos dan es la suma de dos logaritmos, luego el resultado será el logaritmo de una multiplicación

$$\log c + \log d = \log (c \cdot d)$$

(12).- Desarrolla el logaritmo $\log_a \left(\frac{x}{6y}\right)$

$$\log_a \left(\frac{x}{6y}\right) = \log_a x - (\log_a 6y) = \log_a x - \log_a 6 - \log_a y$$

(13).- Desarrolla el logaritmo $\log_a \left(\frac{4x}{y}\right)$

(sol: $\log_a 4 + \log_a x - \log_a y$)
Es el logaritmo de un cociente que es igual a la diferencia de los logaritmos del numerador y denominador

$$\log_a \left(\frac{4x}{y}\right) = \log_a (4x) - \log_a y$$

El primer término es el logaritmo de un producto que podemos desarrollar

$$\log_a \left(\frac{4x}{y}\right) = \log_a (4x) - \log_a y = \log_a 4 + \log_a x - \log_a y$$

(14).- Hallar el valor del logaritmo de $\log 10^4$
(sol: 4)

$$log_{10}\ 10^4 = 4 \cdot log_{10}\ 10 = 4 \cdot 1 = 4$$

(15).- Hallar el valor del logaritmo de log 0,1

(sol: -1)

$log_{10}\ 0{,}1 = log_{10} \frac{1}{10}$ *sabemos que* $\frac{1}{10} = \frac{10^0}{10^1} = 10^{0-1} = 10^{-1}$

he puesto 10^0 porque cualquier número elevado a cero es igual a la unidad y la unidad es igual a cualquier número elevado a cero. Lo que nos da es un cociente de potencias, que es igual a la base elevada a la diferencia de exponentes

$$log\ 0{,}1 = log\ 10^{-1} = -1 \cdot log\ 10 = -1$$

(16).- Hallar el valor del logaritmo de log 0,01

(sol: -2)*lo mismo que en el problema anterior,* $log_{10}\ 0{,}01 = log_{10} \frac{1}{100} = \frac{10^0}{10^2} = 10^{0-2} = 10^{-2}$

$$log_{10}\ 0{,}01 = log_{10}\ 10^{-2} = -2 \cdot log_{10}\ 10 = -2 \cdot 1 = -2$$

(17).- Hallar el valor del logaritmo de $\log \frac{x^4 y^3}{2z}$

(sol: 4·log x+3·log y-log 2-log z)

el logaritmo que nos han dado podemos colocarlo como

$$\log \frac{x^4 y^3}{2z} = \log \frac{x^4 y^3 2^0 z^0}{2^1 z^1} = \log x^4 y^3 2^{-1} z^{-1}$$

Esto es el logaritmo de un producto que es igual a la suma de los logaritmos de los factores

$$log \frac{x^4 y^3}{2z} = log\ x^4 + log\ y^3 + log\ 2^{-1} + log\ z^{-1} = 4\ log\ x + 3\ log\ y - 1 \cdot log\ 2 - 1 \cdot log\ z$$

(18).- Desarrolla el siguiente logaritmo $\log \frac{m \cdot n}{p}$

(sol: log m + log n – log p)

es el logaritmo de un cociente y de un producto

$$log\ (m \cdot n) - log\ p = logm + log\ n - log\ p$$

(19).- Desarrolla el siguiente logaritmo $\log \frac{c \cdot d^2}{m^2 \cdot n}$

(sol: log c + 2·log d –2·log m –log n)
Igual que en el caso anterior, es el logaritmo de un cociente y de una multiplicación, además de ser unas potencias

log $\frac{c \cdot d^2}{m^2 \cdot n}$ *= log (c·d²) – log (m² · n) = log c + log d² – log m² – log n = log c + 2·log d – 2·log m – log n*

(20).- Desarrolla el siguiente logaritmo $\quad \log \frac{1}{x^3 \cdot y^2}$

(sol: -3 log x-2 log y)
es el logaritmo de un cociente y una potencia. Hay que tener en cuenta que el logaritmo de 1 es cero, ya que la base del logaritmo elevada a cero es igual a 1: $10^0 = 1$

$$\log \frac{1}{x^3 \cdot y^2} = \log 1 - \log (x^3 \cdot y^2) = 0 - \log x^3 - \log y^2 = -3 \cdot \log x - 2 \cdot \log y$$

(21).- Desarrolla el siguiente logaritmo $\quad \log \left(\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{(x+y)}\right)$

(sol: $\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{4}\log(x+y)$*)*
sabemos que una raíz la podemos poner como la inversa de una potencia

$$\log \left(\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{(x+y)}\right) = \log \left((x)^{\frac{1}{2}} \cdot (x+y)^{\frac{1}{4}} \right) = \log x^{\frac{1}{2}} + \log(x+y)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{4}\log(x+y)$$

el logaritmo de una suma no lo podemos realizar por lo que la solución queda como está en la parte superior

(22).- Desarrolla el siguiente logaritmo $\quad \log \frac{\sqrt{b \cdot c^2}}{x^3}$

(sol:1/2 log b+log c –3log x)
Lo primero que haremos es hacer el cociente de los logaritmos como diferencia

$$\log \frac{\sqrt{b \cdot c^2}}{x^3} = \log \sqrt{b \cdot c^2} - \log x^3$$

Colocamos las potencias como productos

$$\log \frac{\sqrt{b \cdot c^2}}{x^3} = \log \sqrt{b \cdot c^2} - \log x^3 =$$

$$= \log\left(b \cdot c^2\right)^{\frac{1}{2}} - 3 \cdot \log x = \frac{1}{2}\log\left(b \cdot c^2\right) - 3 \cdot \log x = \frac{1}{2}(\log b + \log c^2) - 3 \cdot \log x =$$

$$\frac{1}{2}\log b + \frac{1}{2} 2 \cdot \log c - 3 \cdot \log x =$$

$$= \frac{1}{2}\log b + \log c - 3 \cdot \log x$$

(23).- Desarrolla el logaritmo de $\log \frac{\sqrt{b^3 c}}{x^2}$

(sol: $\frac{1}{2}\cdot(3\log b + \log c) - 2\log x$*)*

lo primero que nos encontramos es logaritmo de un cociente

$$\log \frac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} = \log \sqrt{b^3 \cdot c} - \log x^2$$

A continuación podemos colocar la raíz como la inversa de una potencia

$$\log \frac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} = \log \sqrt{b^3 \cdot c} - \log x^2 = \log (b^3 \cdot c)^{\frac{1}{2}} - \log x^2 = \frac{1}{2}\log(b^3 \cdot c) - 2\cdot \log x$$

la primera parte es el logaritmo de un producto que es la suma de los logaritmos de los factores

$$\frac{1}{2}\log(b^3 \cdot c) - 2\cdot\log x = \frac{1}{2}(\log b^3 + \log c) - 2\cdot\log x = \frac{1}{2}(3\cdot\log b + \log c) - 2\cdot\log x$$

9. BIBLIOGRAFÍA

- Emilio Bujalance y otros. Matemáticas especiales. Editorial Sanz y Torres (1998). 2ª Edición
- María E. Ballvé y otros. Problemas de matemáticas especiales. Editorial Sanz y Torres (1996). 2ª Edición.
- José T. Pérez Romero y José A. Jaramillo Sánchez. Matemáticas. Pruebas de acceso a la universidad para mayores de 25 años. Editorial MAD. (2002).
- http://descartes.cnice.mecd.es/
- http:www.uoc.edu

GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL PLANO

UNIDAD DIDÁCTICA 5: Geometría analítica del plano

1. ÍNDICE

1. **Sistemas de referencia y coordenadas puntuales**
2. **Distancia entre dos puntos del plano**
3. **Coordenadas del punto medio de un segmento**
4. **La recta en el plano**
5. **Pendiente de la recta**
6. **Distintas formas de la ecuación de la recta**
7. **Ecuación de la recta conocidos un punto y la pendiente**
8. **Ecuación de la recta conocidos dos puntos**
9. **Posiciones relativas de dos rectas en el plano**
10. **Distancia de un punto a una recta**
11. **Distancia entre dos rectas paralelas**

2. INTRODUCCIÓN GENERAL A LA UNIDAD Y ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO

En esta unidad didáctica vamos a introducir la representación gráfica de puntos y rectas en el plano, utilizando como sistema de referencia los ejes cartesianos. Conoceremos las distintas formas de expresar algebraicamente una recta, el concepto de pendiente de una recta, así como, calcular la ecuación de la recta conocido un punto y la pendiente ó conocidos dos puntos. Dadas dos rectas, aprenderemos a conocer sus posiciones relativas, es decir, si son parelelas, coincidentes, si se cortan y en este caso saber si son ó no perpendiculares. Finalmente, también introducimos las fórmulas para calcular la distancia entre dos puntos, un punto y una recta y dos rectas paralelas.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Saber representar puntos en el plano
- Saber representar rectas en el plano
- Entender el concepto de pendiente de una recta
- Conocer las distintas formas de representar una recta
- Saber calcular la ecuación algebraica de la recta a partir de la representación gráfica, dados dos puntos ó un punto y la pendiente
- Saber calcular la distancia entre dos puntos, entre un punto y una recta y, entre dos rectas paralelas.

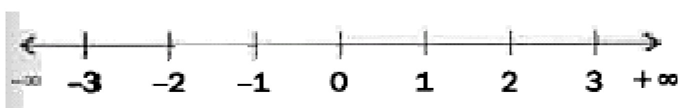
4. DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

1. Sistemas de referencia y coordenadas puntuales

Los ejes coordenados son dos rectas perpendiculares donde se representan conjuntos numéricos (en general representaremos números reales).

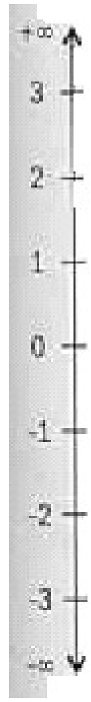
El **eje horizontal** se denomina **eje de abscisas** (eje de las x) y es una recta que tiene un origen en el punto O, el cual determina dos semirrectas, de las que una es positiva (a la derecha de O) y otra negativa (a la izquierda de O).

A cada punto de la recta le corresponde un número



El **eje vertical** se denomina **eje de ordenadas** (eje de las y) y es una recta que tiene un origen en el punto O, el cual determina dos semirrectas; una positiva (del origen hacia arriba) y otra negativa (del origen hacia abajo).

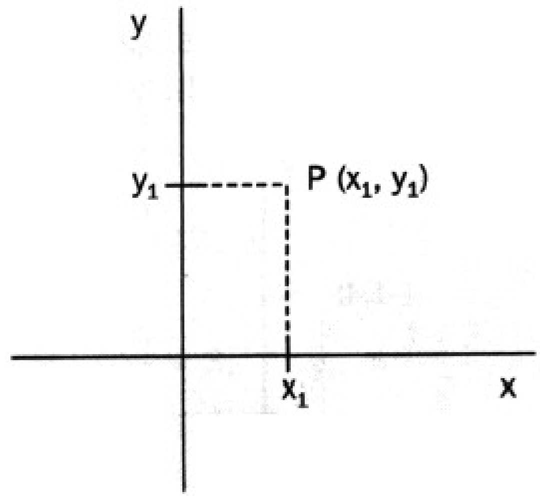
A cada punto de la recta le corresponde un número.



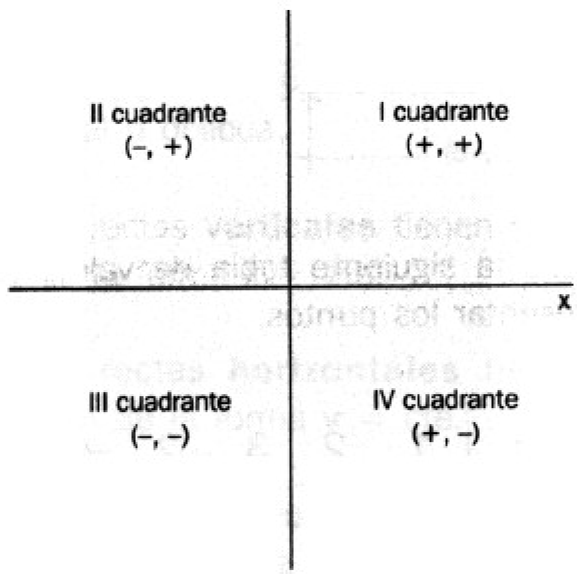
Cuando se consideran los dos ejes conjuntamente estamos ante un sistema de coordenadas cartesianas. Dicho sistema permite representar puntos en el plano.
Cada punto del plano viene determinado por un par de valores ordenados (el primero de abscisas y el segundo de ordenadas).
Para representar un punto en el plano tomamos el valor de la abscisas y levantamos un segmento perpendicular con la medida de la ordenada.

El **plano cartesiano** es el conjunto formado por todos los pares ordenados de números reales. Dicho plano se representa por el símbolo RxR, o por su equivalente R^2.

$$R^2 = \{(x, y) \ / x, y \in R\}$$



Un sistema de ejes cartesianos determina cuatro cuadrantes (ángulos en el plano).



Como se puede observar en la figura, según en qué cuadrante esté situado el punto, los signos de los valores de abscisas y ordenadas serán distintos.

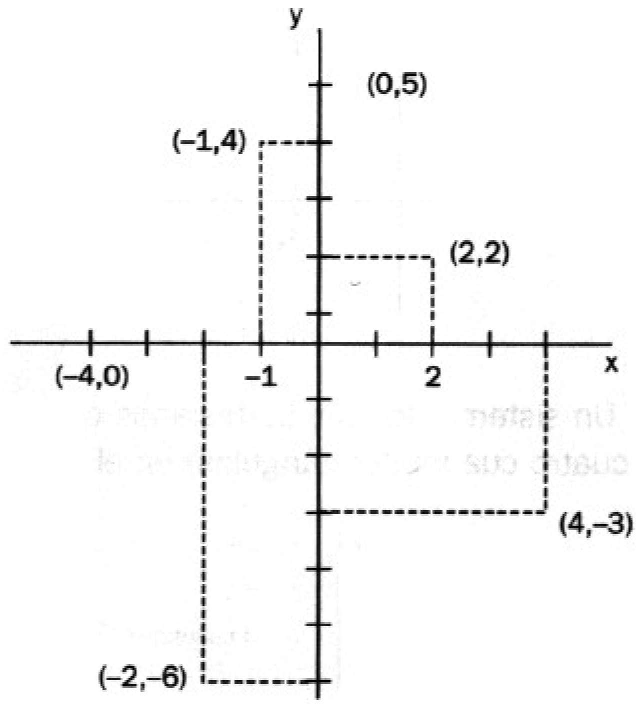
Un sistema de ejes cartesianos permite, por tanto:

a) Dada una serie de pares de valores ordenados, representar los puntos correspondientes en el plano.

b) Dada una serie de puntos representados en el plano determinar una serie de pares de valores correspondientes.

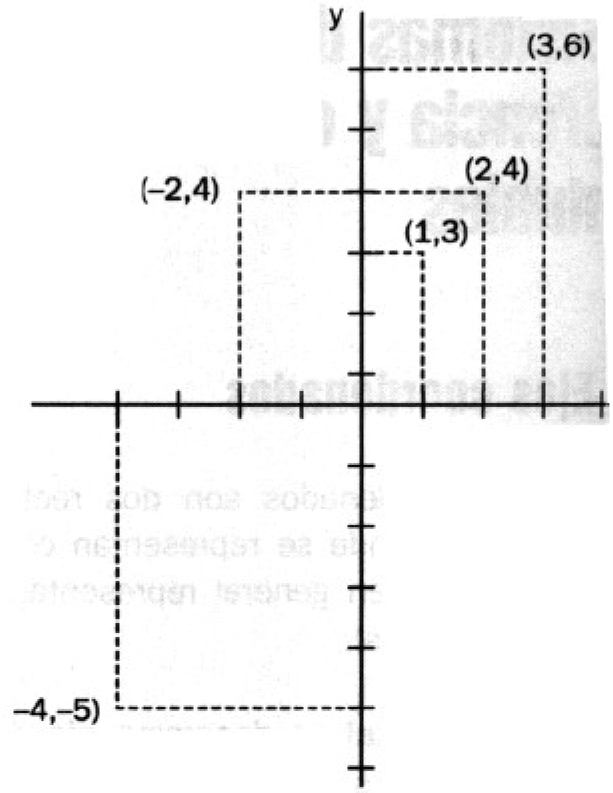
Ejemplos:

1. Representar los puntos: (2,2), (-1,4), (-4,0), (0,5), (4,-3), (-2,-6)

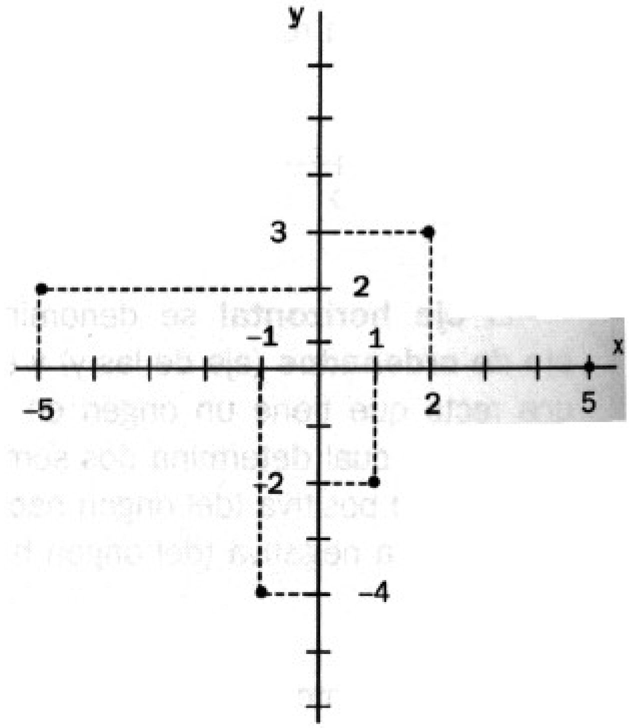


2. Dada la siguiente tabla de valores, representar los puntos.

x	1	2	3	-2	-4
y	3	4	6	4	-5



3. Dada la siguiente gráfica, escribir los pares de valores correspondientes y formar una tabla con ellos.



(–5, 2), (–1, –4), (1, –2), (2, 3),

2. Distancia entre dos puntos del plano

Sean (x_1, y_1), (x_2, y_2) dos puntos del plano cartesiano. Su distancia viene determnada por la expresión:

$$dist[(x_1,y_1),(x_2,y_2)] = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ejemplo:

Hallar la distancia entre los puntos (2,3) y (6,7).

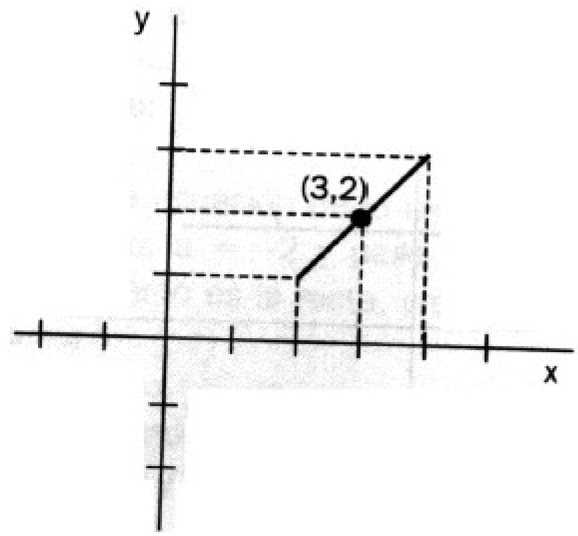
$$dist[(2,3),(6,7)] = \sqrt{(2-6)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$$

3. Coordenadas del punto medio de un segmento

Las coordenadas del punto medio de un segmento (x_m, y_m) cuyos extremos vienen dados por los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) son:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejemplo: Hallar las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son: (2,1) y (4,3)

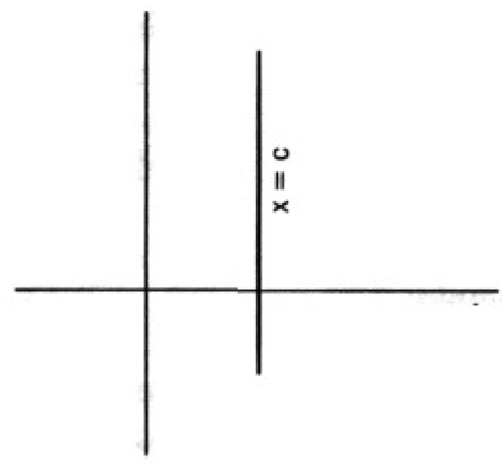


$$x_m = \frac{2+4}{2} = 3 \qquad y_m = \frac{1+3}{2} = 2$$

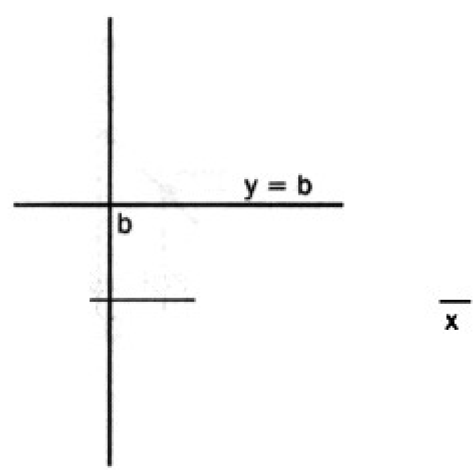
es decir, el punto medio tiene de coordenadas (3,2).

4. La recta en el plano

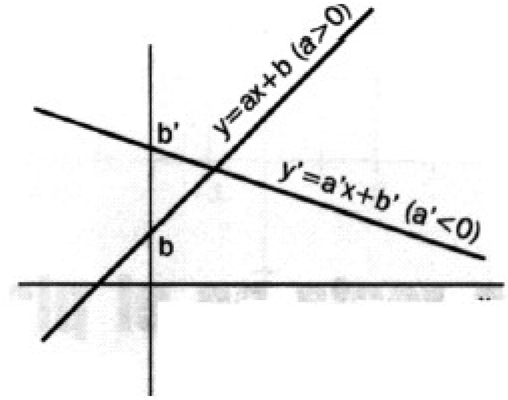
Una recta en el plano puede ser vertical, horizontal u oblicua. Las rectas **verticales** tienen una ecuación de la forma x=cte.



Las rectas **horizontales** tienen una ecuación de la forma y=cte.

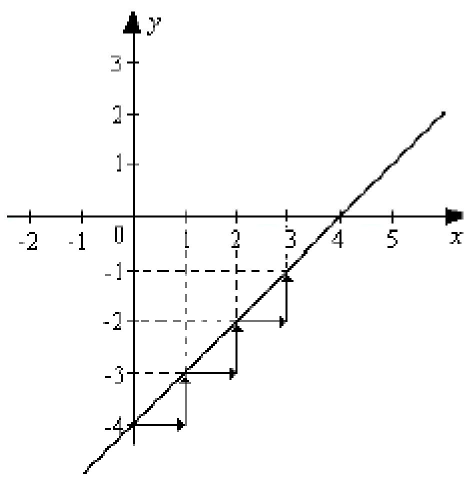


Las rectas oblicuas tienen como ecuación: y=ax+b ($a \neq 0$).



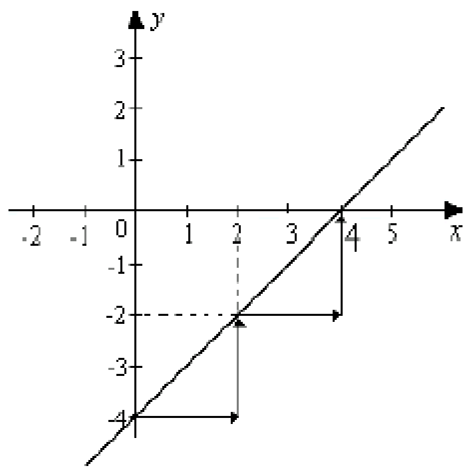
5. Pendiente de la recta

a) y=x-4



Cuando la abscisa aumenta 1 unidad, la ordenada también aumenta 1 unidad.

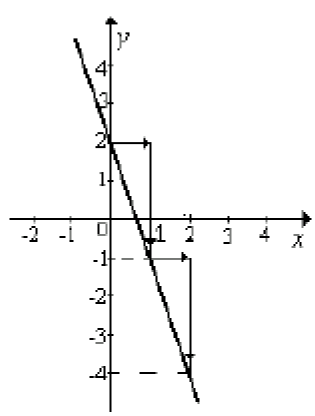
Si la abscisa aumenta 2 unidades, la ordenada aumenta 2 unidades.



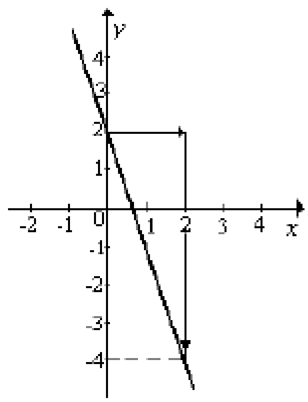
Observemos que los cocientes entre la *variación* de la ordenada y la *variación* de la abscisa son constantes e iguales al valor de la pendiente.

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = 1 = m$$

b) $y = -3x + 2$



Cuando la abscisa aumenta 1 unidad, la ordenada disminuye 3 unidades.

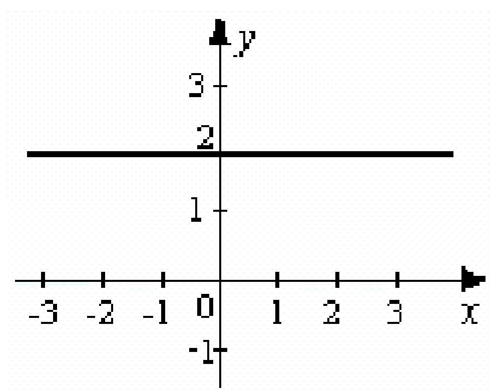


Si la abscisa aumenta 2 unidades, la ordenada disminuye 6 unidades.

$$\frac{-3}{1}=\frac{-6}{2}=\frac{-9}{3}=....=-3=m$$

Nuevamente observamos que los cocientes entre la *variación* de la ordenada y la *variación* de la abscisa son constantes e iguales al valor de la pendiente.

c) ***y*** **= 2**



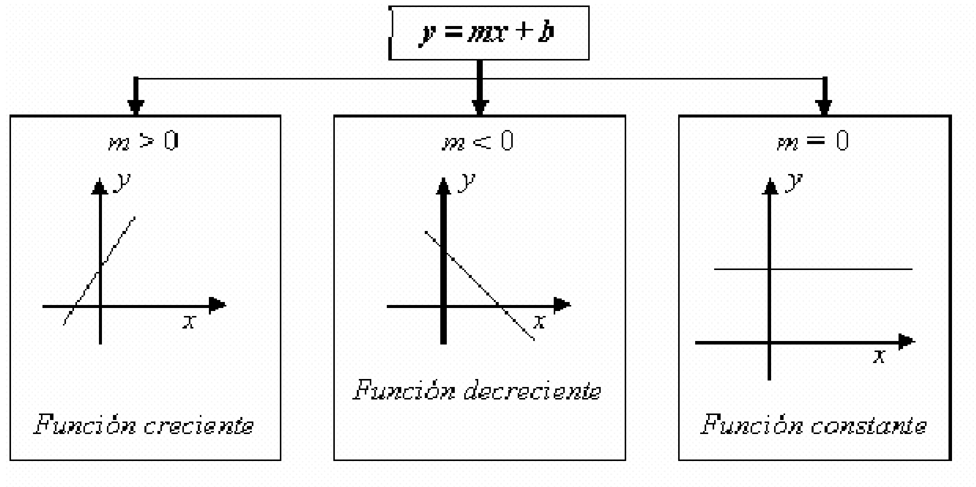
Cuando la abscisa aumenta 1 unidad, la ordenada no aumenta ni disminuye.

Lo mismo ocurre cuando la abscisa aumenta 2, 3, o más unidades.

$$\frac{0}{1}=\frac{0}{2}=\frac{0}{3}=0=m$$

En este ejemplo resulta que los cocientes entre la *variación* de la ordenada y la *variación* de la abscisa son constantes e iguales a 0, el valor de la pendiente es *m*.

En el siguiente cuadro se clasifican las rectas según el valor de la pendiente:



Resumiendo

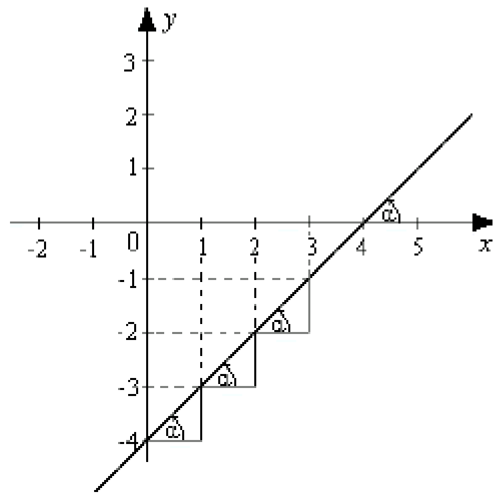
- ✓ La ***pendiente*** está determinada por el cociente entre la *variación* de *y* y la *variación* de *x*.
- ✓ La ***pendiente*** *m* mide la inclinación de la recta respecto del eje *x*. Podemos hallar entonces, a partir de la pendiente, el ángulo α que forma dicha recta con el eje *x* teniendo en cuenta que:

el ángulo de inclinación α*, se mide en sentido contrario a las agujas del reloj, a partir de la dirección positiva del eje x.*

Nota: La función tangente, utilizada en la expresión: $m = tg\alpha$, se estudiará junto con las demás funciones trigonométricas, con más detalle en un próximo capítulo.

Retomando los ejemplos anteriores:

a) $\boldsymbol{y = x - 4}$



$$y = x - 4$$

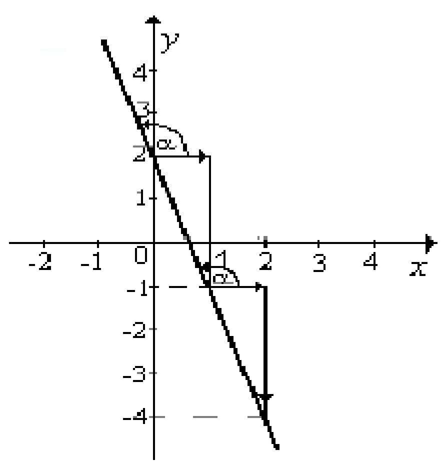
En este ejemplo

$$m = \frac{1}{1} = \operatorname{tg} \alpha$$

Entonces

$$\alpha = 45^{o}$$

b) ***y* = -3 *x* + 2**



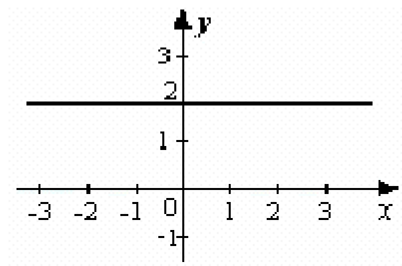
$$m = \frac{-3}{1} = \operatorname{tg} \alpha$$

Entonces

$$\alpha = 108^{\circ}\ 26'\ 5{,}82''$$

Nota: La función tangente, utilizada en la expresión: *m = tg a*, se estudiará junto con las demás funciones trigonométricas, con más detalle en la unidad 6.

c) $\boldsymbol{y = 2}$



$$m = \frac{0}{2} = \operatorname{tg}\alpha$$

entonces

$$\alpha = 0^{\circ}$$

Retomando los ejemplos anteriores:

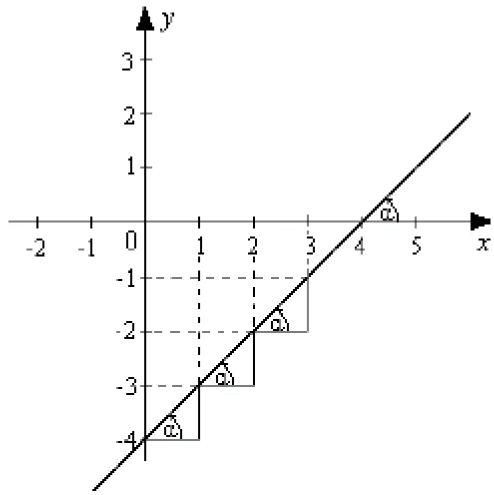
Recuerda: el ángulo de inclinación α , se mide en sentido contrario a las agujas del reloj, a partir de la dirección positiva del eje x.

a) $y = x - 4$ en este ejemplo

$$m = \frac{1}{1} = \operatorname{tg}\alpha$$

entonces

$$\alpha = 45^{\circ}$$



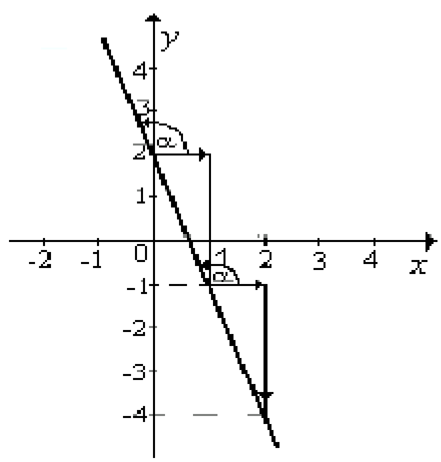
$$y = x - 4$$

b) $y = -3x + 2$

$$m = \frac{-3}{1} = \text{tg } \alpha$$

entonces

$$\alpha = 108^{\circ}\ 26'\ 5{,}82''$$

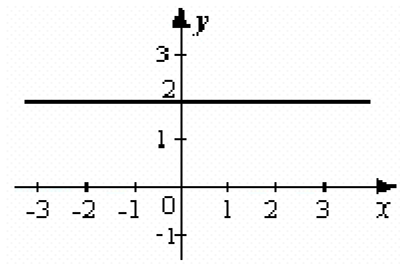


c) $y = 2$

$$m = \frac{0}{2} = \text{tg } \alpha$$

entonces

$$\alpha = 0^{o}$$



6. Distintas formas de la ecuación de la recta

La ecuación de una recta en el plano se puede expresar de distintas formas, entre las cuales consideramos las siguientes:

a) Forma explícita de la recta.

$$y = mx + n \, ,$$

donde $m, n \in \mathrm{R}$ son constantes.

Ejemplo:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

b) Forma implícita de la recta

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

$a\,,\, b\,,\, c \in \mathrm{R}$ constantes.

Ejemplo: la misma recta del ejemplo anterior se puede escribir como

$$2\,x - 3\,y + 8 = 0.$$

Observemos que si

$$b = 0 \;\; \text{y}\, a \neq 0,$$

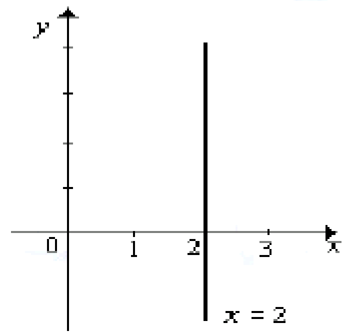
la ecuación implícita de la recta se reduce a

$$a\,x + c = 0,$$

que representa a la recta paralela al eje y.

$$x = -\,\frac{c}{a}$$

por ejemplo: x = 2 es la ecuación de la recta vertical cuyo gráfico es:



7. Ecuación de la recta conocidos un punto y la pendiente

Si conocemos la pendiente (m) y un punto de la recta (x_1,y_1), la ecuación de la recta (también llamada ecuación punto pendiente de la recta) es la siguiente:

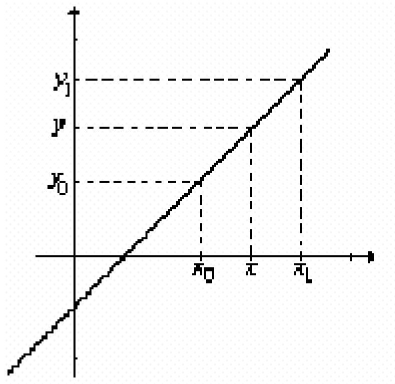
$$y-y_1=m(x-x_1)$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que tiene de pendiente m=-2 y pase por el punto (-3,1). ¿Cómo es la recta creciente o decreciente?.

Sustituyendo los valores en $y-y_1=m(x-x_1)$ tenemos y-1=-2(x+3); y=1-2(x+3)=1-2x-6; es decir, Y=-2x-5. Como la pendiente m=-2 es menor que cero, la recta es decreciente.

8. Ecuación de la recta conocidos dos puntos

Si tenemos como datos dos puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) pertenecientes a una recta, podemos construir la ecuación de la misma.
Observemos que su pendiente es:



$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Sabemos que la ecuación punto pendiente del apartado anterior es $y-y_1=m(x-x_1)$
Sustituyendo tenemos:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

que es la expresión de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2,3) y (1,5). Determinar si es creciente o decreciente.

$x_0 = 2 \quad y_0 = 3$
$x_1 = 1 \quad y_1 = 5$

$$y - 3 = \frac{5-3}{1-2}(x-2) \qquad y - 3 = \frac{2}{-1}(x-2)$$

$$y - 3 = -2(x-2) \quad y = -2x + 7$$

La recta es decreciente ya que la pendiente m=-2 es negativa.

9. Posiciones de dos rectas en el plano

Dos rectas en el plano pueden: ser coincidentes, ser paralelas o cortarse en un punto. En este último caso pueden ser perpendiculares.

a) Condiciones de paralelismo y perpendicularidad a partir de la ecuación implícita de la recta

Dadas dos rectas en forma implícita

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{array}\right\}$$

- **Son paralelas si**

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = -4 \\ 6x + 9y = 2 \end{array}\right\} \frac{2}{6} = \frac{3}{9} \neq -\frac{4}{2}$$

- **Son coincidentes si**

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ 4x + 4y = 8 \end{array}\right\} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$$

- **Se cortan en un punto si**

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x + 5y = 19 \end{array}\right\} \frac{1}{2} \neq \frac{1}{5}$$

En este caso pueden ser perpendiculares si

$$-A \cdot A' = B \cdot B'$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y=7 \\ -3x+2y=1 \end{array}\right\} -(2)(-3)=(2)\cdot(3)$$

b) Condiciones de paralelismo y perpendicularidad utilizando las pendientes

- **Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente**

$$\left.\begin{array}{l} y=ax+b \\ y'=a'x+b' \end{array}\right\} \text{son paralelas si } a=a'$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} y=4x-5 \\ y=4x+7 \end{array}\right\} 4=4$$

- **Dos rectas son perpendiculares si** $a=-\frac{1}{a}$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} y=3x+9 \\ y=-\frac{1}{3}x+7 \end{array}\right\} 3=-\left(\frac{1}{-\frac{1}{3}}\right)$$

10. Distancia de un punto a una recta

Sea un punto del plano **P(x_0, y_0)** y una recta dada en forma implícita

$$r \equiv Ax+By+C=0$$

La distancia del punto **P** a la recta **r** viene dada por la expresión

$$d\,(P,r) = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

Recuerda: que siempre hay que considerar el valor absoluto

Ejemplo:

Hallar la distancia del punto $P(2_1\ -1)$ a la recta $2x - 3y + 1 = 0$

$$d\,(P,r) = \left|\frac{2(2) - 3(-1) + 1}{\sqrt{2^2 + 3^2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{8}{\sqrt{13}}\right| = \frac{8}{\sqrt{13}} \text{ Unidades}$$

11. Distancia entre dos rectas paralelas

Para hallar la distancia entre dos rectas paralelas se considera un punto cualquiera **P ,** de una de ellas y se calcula la distancia a la otra recta.

$$d(r,r') = d(P,r'),\ \forall\ P \in r$$

Ejemplo: calcular la distancia entre las rectas

$$r \equiv 3x - 4y + 4 = 0$$
$$y$$
$$r' \equiv 9x - 12y - 4 = 0$$

En primer lugar comprobamos si r y r' son paralelas. Como sabemos la condición de paralelismo cuando tenemos las rectas expresadas con su ecuación implícita viene dada por

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \qquad \frac{3}{9} = \frac{4}{12} \neq \frac{-4}{4}$$

Tomamos un punto cualquiera de r

$$x = 0 \Rightarrow 3(0) - 4y = -4;$$
$$-4y = -4;\ y = 1$$

El punto elegido es, por tanto (0,1). Ahora aplicamos la fórmula d(r,r')

$$d\,(r,r') = d\,(P,r') =$$

$$= \left|\frac{9(0) - 12(1) - 4}{\sqrt{9^2 + 12^2}}\right| = \left|\frac{-16}{15}\right| = \frac{16}{15} \text{ unidades}$$

7. ACTIVIDADES

1. **Representa gráficamente las siguientes rectas**

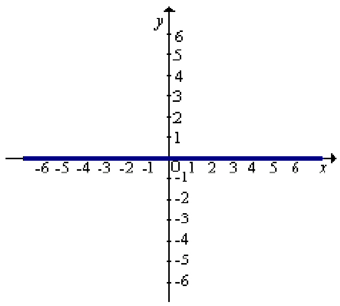
a) $y = -4x + 1$ b) $y = -5$ c) $x + y = 0$

d) $\dfrac{x}{\frac{2}{3}} + \dfrac{y}{\frac{3}{4}} = 1$ e) $3x - 2y + 1 = 0$ f) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-3} = 1$

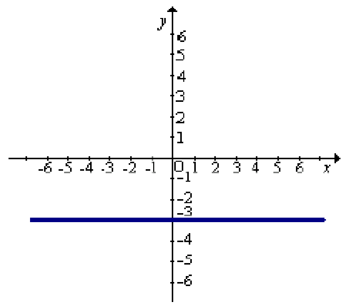
g) $x = -3$

2. **Dar la expresión en forma punto pendiente las rectas graficadas a continuación**

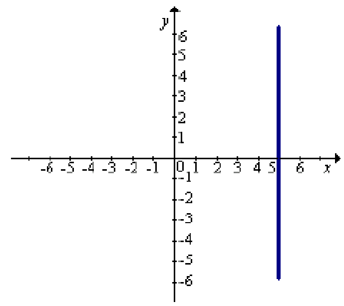
a)



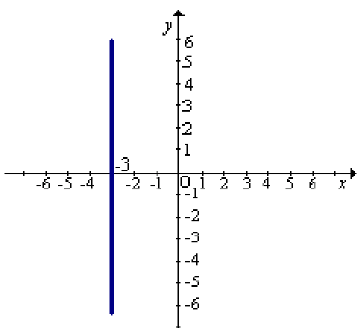
b)



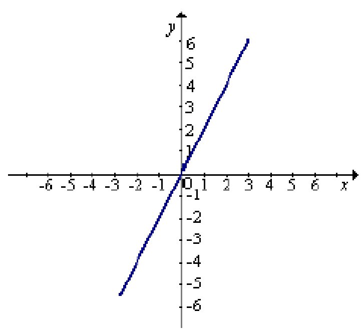
c)



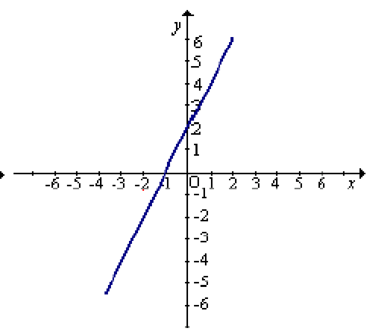
d)



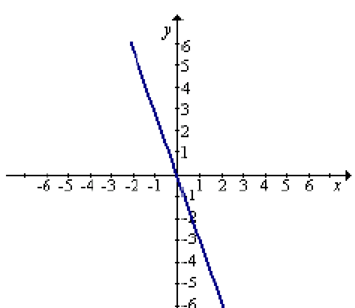
e)



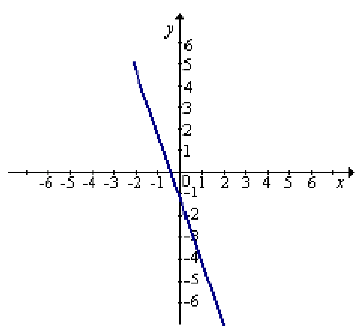
f)



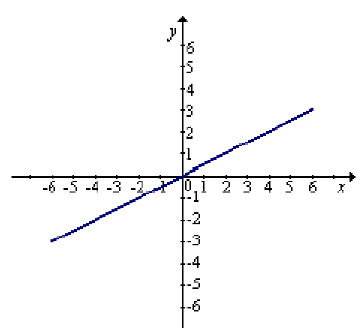
g)



h)



i)



3. **Hallar el valor de k en las siguientes ecuaciones a fin de que cada recta pase por el punto indicado:**

a) $4x + 3y - k = 0$ A (1 , -2)   b) $- k\,x + \dfrac{y}{2} - 1 = 0$ B (3 , 0)

4. **¿Cuánto debe valer un número real k para que el punto (-1 , 2) se encuentre en la recta k *x* +7 *y* - 7 = 0 ?. Graficar.**

5. **Escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos:**

a) (-2 , -1) y (-4 , -3) b) (3 , 5) y (7 , -2)

c) (6 , -1) y (-2 , 4) d) (1 , -5) y (10 , 11)

6. **Averiguar si los puntos (0 , 2) , (1 , -1) y (-1 , 5) están alineados.**
7. **Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente 5 y pasa por el punto P (-1 , -2).**
8. **Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente** $-\frac{1}{2}$ **y pasa por el punto P (-4 , 7).**
9. **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (-1,1) y es paralela a la recta que tiene de ecuación y=x+1.**
10. **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (0,1) y es perpendicular a la recta -3x+2x+1=0.**
11. **Hallar la distancia entre los puntos (1,0) y (-3,4).**
12. **Hallar la distancia entre las rectas 2x-3y=3 y 6x-9y=4.**

MAS EJERCICIOS

(1).- Representa en una gráfica los puntos P1 (2,3), P2 (5,2), P3 (-2,-3), P4 (1,-3), P5 (-4, 2) , P6 (0,1),P7 (-3,0), P8 (0,0)

(2).- Halla la tabla de valores y dibuja la gráfica de la ecuación de la recta x = 2y

(3).- Halla la tabla de valores y dibuja la gráfica de la ecuación de la recta 2x – y = 1

(4).- Halla la tabla de valores y dibuja la gráfica de la ecuación de la recta - x – y = -1

(5).- Halla la tabla de valores y dibuja en una misma gráfica las ecuaciones de las rectas. Saca alguna conclusión una vez dibujadas
x + y = 2
x + y = 4
x + y = 5

(6).- Halla la tabla de valores y dibuja en una misma gráfica las ecuaciones de las rectas. Saca alguna conclusión una vez dibujadas
x - y = 2
x - 2y = 2
x - 6y = 2

(7).- Halla gráficamente el valor de la x e y en el sistema de ecuaciones

x + 2y = 16
x - y = 1

(8).- Halla gráficamente el valor de la x e y en el sistema de ecuaciones
2x + 3y = 35
2x - y = 15

(9).- Halla gráficamente el valor de la x e y en el sistema de ecuaciones
x + y = 5
2x - 3y = 5

(10).- Hallar la distancia entre los puntos (3,5) y (1,4)

(11).- Hallar la distancia entre el punto (-3,4) y la recta 2x + 3y =4

(12).- Calcula el valor de a para que la distancia del punto P(a,2) a la recta 3x + 4y – 2 =0 sea igual a 1

8. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

- **Representar la recta y=4. ¿Qué pendiente tiene?**
- **Dada la ecuación de la recta y=5x+4, ponerla en forma implícita.**
- **Dada la ecuación de la recta 2x+3y=5, ponerla en forma explícita.**
- **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,-5) y tiene pendiente m=3**
- **Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-1,2) y (2,-3). ¿Es creciente o decreciente?.**
- **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,-3) y es paralela a la recta que tiene de ecuación y=2x+1.**
- **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-1,4) y es perpendicular a la recta -3x+y-2=0.**
- **Hallar la distancia entre los puntos (4,2) y (1,3).**
- **Hallar la distancia entre las rectas 2x-3y=3 y 6x-9y=4**

9. SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

1. m=0
2. y-5x-4=0
3. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

4. y=3x-4

5. $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$

6. y=2x-7

7. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$

8. $\sqrt{10}$

9. 0.46

BIBLIOGRAFÍA

- Emilio Bujalance y otros. Matemáticas especiales. Editorial Sanz y Torres (1998). 2ª Edición
- María E. Ballvé y otros. Problemas de matemáticas especiales. Editorial Sanz y Torres (1996). 2ª Edición.
- José T. Pérez Romero y José A. Jaramillo Sánchez. Matemáticas. Pruebas de acceso a la universidad para mayores de 25 años. Editorial MAD. (2002).
- http://descartes.cnice.mecd.es/
- http:www.uoc.edu

TRIGONOMETRÍA

MATEMÁTICAS

ACCESO A LA UNIVERSIDAD MAYORES 25 AÑOS

UNIDAD DIDÁCTICA 6: Trigonometría

1. ÍNDICE

2. INTRODUCCIÓN GENERAL A LA UNIDAD Y ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO

En esta unidad vamos a introducir las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo. Centraremos nuestros cálculos a las razones trigonométricas de ángulos agudos. Para ello comenzaremos la unidad introduciendo los conceptos básicos relacionados con los ángulos, así como, los dos sistemas básicos de medición de ángulos. Finalmente, introduciremos el teorema de Pitágoras y problemas de aplicación de dicho teorema.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Saber calcular las razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- Conocer el enunciado del teorema de Pitágoras.
- Saber resolver problemas de triángulos rectángulos.
- Saber aplicar el teorema de Pitágoras a problemas aplicados.

4. DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

1. Introducción

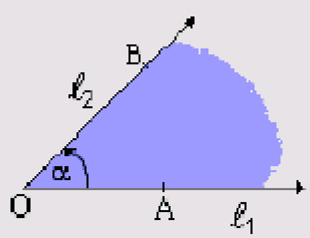
La palabra **trigonometría** proviene del griego **trí** = tres, **gonon** = ángulo y **metria** = medida. Es la parte de la Matemática que nos ayuda a resolver problemas relacionando y haciendo cálculos con las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo. En esta Unidad estudiaremos básicamente sólo un sistemas de medición de ángulos, aunque mencionaremos un segundo sistema, para luego introducir las principales funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente, observando su relación en los distintos cuadrantes.

Estos recursos nos ayudarán a resolver problemas como el siguiente: ¿Cómo medir el ancho de un río sin cruzarlo?. Supongamos que se tienen aparatos para medir distancias y para medir ángulos pero no se puede cruzar el río. Además la orilla es escarpada y sólo es posible moverse perpendicularmente al río, donde hay un camino. ¿Cómo medir el ancho del río?.

Este y otros problemas similares han podido ser resueltos desde la antigüedad utilizando las relaciones trigonométricas entre los ángulos y los lados de los triángulos. En esta Unidad también recordaremos algunas de ellas.

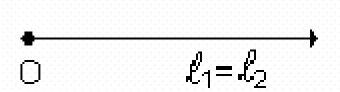
2. Ángulos

Un ***ángulo*** α en el plano es la región determinada por dos semirrectas ℓ_1 y ℓ_2 con origen común O, cuando se hace girar el lado inicial ℓ_1 hasta el lado final ℓ_2 en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Este sentido también es llamado ***antihorario***. ℓ_1 se denomina ***lado inicial*** y ℓ_2 ***lado final*** de α y lo denotamos por $\alpha = A\hat{O}B$.

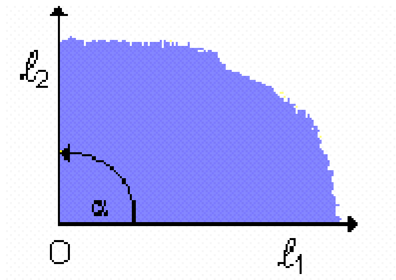


Ejemplo:

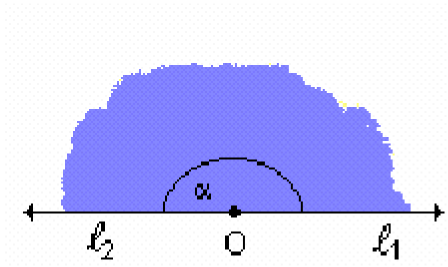
- **Ángulo nulo**



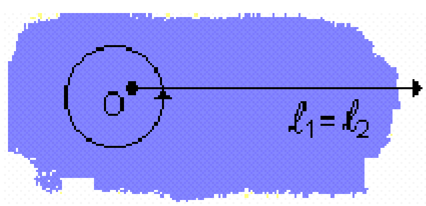
- **Ángulo recto**



- **Ángulo llano**

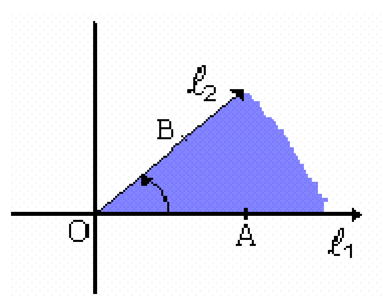


- **Ángulo de 1 giro**

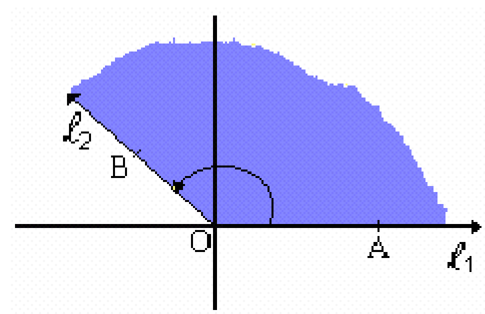


Si colocamos el origen de un ángulo $\alpha = A\hat{O}B$ en el origen de coordenadas y hacemos coincidir el lado inicial l_1 con el semieje positivo de las x, entonces el lado terminal l_2 quedará en algún cuadrante.

l_2 está en el primer cuadrante



l_2 está en el segundo cuadrante



De esta manera, podemos hablar del cuadrante al que pertenece un ángulo α. Por definición, los ángulos ***agudos*** son los que pertenecen al primer cuadrante.

3. Sistemas de medición de ángulos

Para medir la amplitud de un ángulo tenemos diferentes sistemas de medición.

3.1. Sistema Sexagesimal

El ***sistema sexagesimal*** consiste en tomar como unidad de medida la 90-ava parte de un ángulo recto. Se denomina a dicha unidad ***grado sexagesimal*** y se la denota 1º.
A la 60-ava parte de un grado se la llama ***minuto*** y se la denota 1' ; y la 60-ava parte de un minuto se la denomina ***segundo*** y se denota 1''.
Si se requiere más precisión se consideran décimas, centésimas, etc. de segundo.

Ejemplos:
1) Un ángulo recto mide 90º.
2) Un ángulo llano mide 180º.
3) Expresemos en grados, minutos y segundos el ángulo que mide 30,28º.
En principio separamos la parte entera y la parte decimal de 30,28º

30,28º = 30º + 0,28º

Ahora, usando proporcionalidad directa calculamos cuántos minutos son 0,28º.

$$\begin{array}{ccc} 1^\circ & \to & 60' \\ 0.28^\circ & \to & x \\ x & = & 60 \cdot 0.28 = 16.80' \end{array}$$

Separando luego la parte entera y la parte decimal de los minutos
16.80'= 16' + 0,80'
Con la regla de tres simple calculamos ahora cuántos segundos son 0,80'

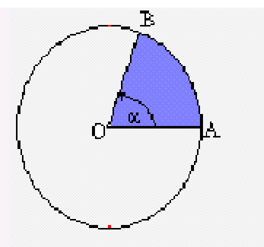
$$\begin{array}{ccc} 1' & \rightarrow & 60'' \\ 0.80' & \rightarrow & x \\ x & = & 60 \cdot 0.80 = 48'' \end{array}$$

Así obtenemos **30,28º = 30º 16' 48''**

3.2. Sistema radial

Un ***radián*** representa la medida de un ángulo central de una circunferencia, de modo tal que la longitud del arco comprendido sea igual al radio de la circunferencia y se denota por 1 rad.

El siguiente cuadro muestra la correspondencia entre las longitudes de distintos arcos de circunferencia y sus correspondientes ángulos centrales medidos en radianes.

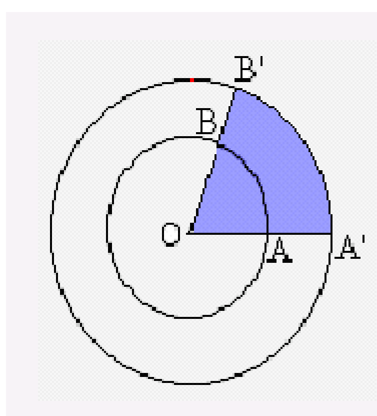


longitud del arco AB = longitud del radio 0A

Longitud del arco	↔	Ángulo central
1 radio	↔	1 rad.
2 radios	↔	2 rad.
2π radios	↔	2π rad.

Se podría llegar a pensar que el valor de un radián depende de la circunferencia elegida para formular la definición. Observemos sin embargo que si el radio de una circunferencia se duplica, su longitud también se duplica.

$$2\,\pi\,(2\,r) = 2\,(2\,\pi\,r)$$

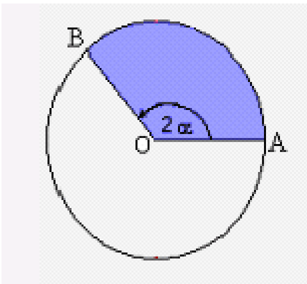


En consecuencia, el arco correspondiente a un ángulo central también se duplica.

Siguiendo este razonamiento, podemos afirmar que nuestra definición no depende de la circunferencia elegida.

3.3. Paso de radianes a grados y de grados a radianes

En símbolos



$$\boxed{360^{\circ} = 2\,\pi \text{ rad}}$$

Siguiendo la definición, a un ángulo de 2 radianes le corresponderá un arco de circunferencia que mide dos veces el radio.

$$\begin{array}{ccc} \text{Longitud del arco} & \leftrightarrow & \text{Ángulo central} \\ 2 \text{ radios} & \leftrightarrow & 2 \text{ rad.} \end{array}$$

Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, el número de radianes de un ángulo de un giro es 2π, ya que es el número de veces que el radio está contenido en la longitud de la circunferencia, es decir,

$$\frac{2\pi\, r}{r} = 2\pi\ .$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Longitud del arco} & \leftrightarrow & \text{Ángulo central} \\ 2\pi \text{ radios} & \leftrightarrow & 2\pi \text{ radios} \end{array}$$

Otras equivalencias entre los dos sistemas son:

$$\boxed{1^{\circ} = \frac{2\ \pi}{360}\text{rad}} \qquad \boxed{1 \text{ rad} = \frac{360}{2\,\pi}}$$

Ejemplos:

♋☽ Veamos cuántos radianes son 225º

$$360^{o} \rightarrow 2\,\pi \text{ rad}$$

$$225^{o} \rightarrow \frac{2\,\pi \text{ rad x } 225^{o}}{360^{o}} = \frac{5}{4}\,\pi \text{ rad}$$

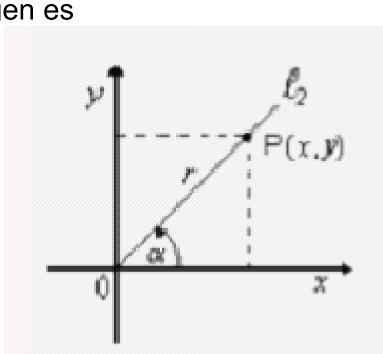
♌☽ Veamos cuántos grados son $\frac{\pi}{6}$ radianes

$$2\,\pi \text{ rad} \rightarrow 360^{o}$$

$$\frac{\pi}{6} \text{ rad} \rightarrow \frac{360^{o}\,\frac{\pi}{6}}{2\,\pi} = 30^{o}$$

4. Funciones trigonométricas de un ángulo

Si tomamos un ángulo a con lado terminal l_2 y P(x , y) un punto sobre l_2 , la distancia de P al origen es



$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

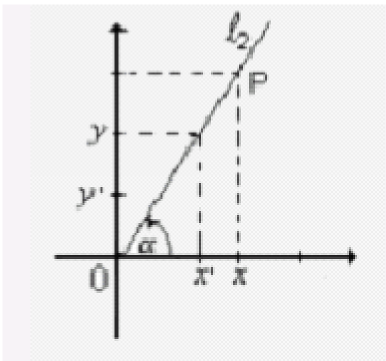
El cociente $\frac{y}{r}$ se llama ***seno de*** α y se denota:

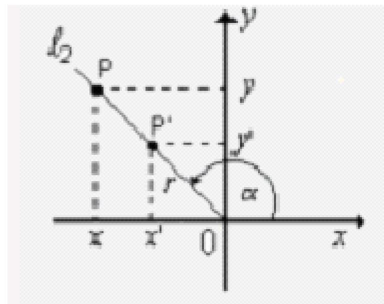
$$\boxed{\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{ordenada de P}}{\text{distancia de P al origen}}}$$

y el cociente $\frac{x}{r}$ se llama ***coseno de*** α y se denota

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{abscisa de P}}{\text{distancia de P al origen}}}$$

Estos cocientes aparentemente dependen del punto P(x , y) elegido sobre l_2 , pero no es así, pues dependen únicamente del ángulo α. En efecto, si P'(x' , y') es otro punto sobre l_2, observemos las siguientes figuras





$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\qquad$ $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$

Como los triángulos rectángulos $X\hat{O}P$ y $X'\hat{O}P'$ donde X = (x , 0) y X' = (x' , 0) son semejantes, los lados son proporcionales, luego:

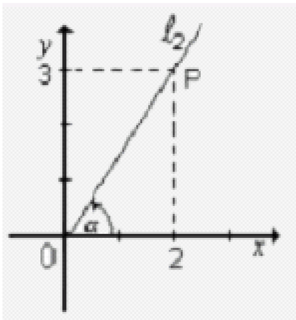
$$\frac{x}{r} = \frac{x'}{r'} \qquad \text{y} \qquad \frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}$$

Como cos $\alpha = \dfrac{x}{r}$ y sen $\alpha = \dfrac{y}{r}$, las igualdades anteriores muestran que cos α y sen α son independientes del punto elegido sobre la recta.

Las funciones trigonométricas cos α y sen α satisfacen las siguientes relaciones:

$$-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1 \quad , \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

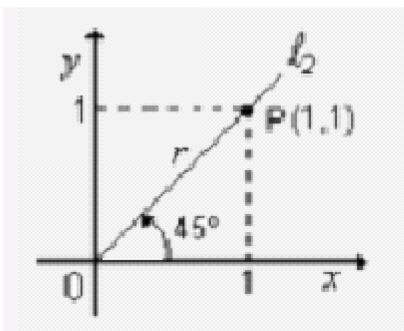


Ejemplo: Sea a el ángulo cuyo lado terminal l_2 pasa por P(2 , 3). Entonces:

$$r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \qquad , \qquad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

En este ejemplo se han calculado las funciones trigonométricas de un ángulo cuya medida no se conoce. Ahora veremos cómo se pueden calcular los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos de 45º y 60º.



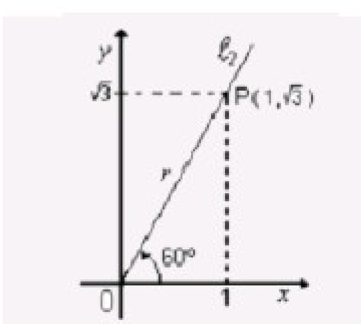
Ángulo de 45º.
Como

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

entonces

$$\text{sen}\,45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Ángulo de 60º
Como

$$r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2,$$

entonces

$$\text{sen}\,60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^o = \frac{1}{2}$$

A partir de las funciones seno y coseno es posible obtener una nueva función llamada la **tangente**

$$\boxed{\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}$$

O sea

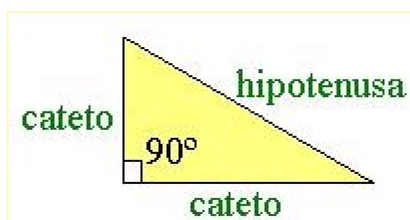
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \frac{\text{ordenada de P}}{\text{abscisa de P}}$$

Observa: como no se puede dividir por cero, debemos excluir la tangente de los ángulos de 90º y 270º.

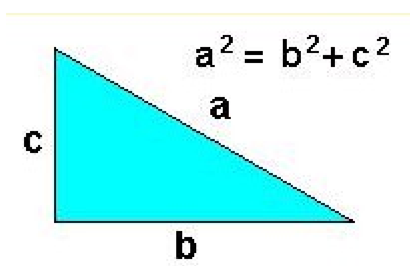
5. Teorema de Pitágoras

En primer lugar deberíamos recordar un par de ideas:

- La suma de los tres ángulos internos de un triángulo suman 180º.
- Un ***triángulo rectángulo*** es un triángulo que tiene un ángulo recto, es decir de 90º.
- En un triángulo rectángulo, el lado más grande recibe el nombre de ***hipotenusa*** y los otros dos lados se llaman ***catetos.***



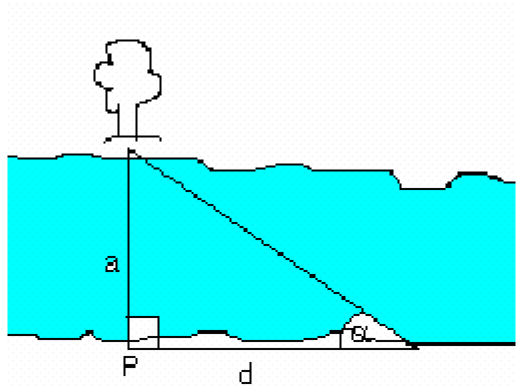
Teorema de Pitágoras.-*En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*



6. Problemas sobre resolución de triángulos rectángulos

Ejemplo 1*:* *¿Cómo podremos medir el ancho de un río sin cruzarlo?*

Tenemos aparatos para medir distancias y para medir ángulos pero no podemos cruzar el río.
Además la orilla es escarpada y sólo es posible moverse perpendicularmente al río, donde hay un camino. ¿Cómo medir el ancho del río?

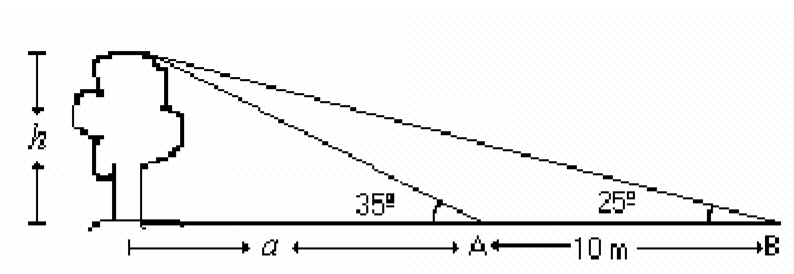


En primer lugar, debemos situarnos frente a algún objeto ubicado en la orilla opuesta que nos sirva de referencia. Desde allí nos movemos a lo largo de la orilla y en dirección perpendicular al árbol una distancia *d*, como muestra la figura. Desde este punto *P* medimos el ángulo a que forma la dirección al árbol con el camino que acabamos de recorrer. Para fijar ideas, supongamos que *d* = 100m. y α = 24º. Como

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{d} = \frac{a}{100}$$

entonces a = 100 tg 24º ≅ 44,52 m.

Ejemplo: *Un árbol y un observador se encuentran en orillas opuestas de un río. El observador mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del árbol y obtiene 35 º; retrocede 10 m. y mide el nuevo ángulo, obteniendo un valor de 25 º . ¿Qué altura tiene el árbol?, y ¿ cuál es el ancho del río?*
Llamando *h* a la altura del árbol y *a* el ancho del río, el gráfico muestra los datos del problema



$$\operatorname{tg} 35^{\circ} = \frac{h}{a}$$

$$\operatorname{tg} 25^{\circ} = \frac{h}{a+100}$$

Despejando la variable *h*

$$h = a \operatorname{tg} 35^{\circ}$$

$$h = (a + 100) \operatorname{tg} 25^{\circ}$$

Igualando ambas ecuaciones

$$a \text{ tg}35^\circ = a \text{ tg}25^\circ + 100 \text{ tg}25^\circ$$

$$a (\text{tg}35^\circ - \text{tg}25^\circ) = 100 \text{ tg}25^\circ$$

$$a = \frac{100 \text{ tg}25^\circ}{\text{tg}35^\circ - \text{tg}25^\circ} \approx 199{,}36 \text{ m.}$$

Reemplazando en alguna de las ecuaciones anteriores

$$h = a \text{ tg}35^\circ \approx 139{,}59 \text{ m.}$$

5. RESUMEN

$$\boxed{360^\circ = 2\ \pi \text{ rad}}$$

$$\boxed{1^\circ = \frac{2\ \pi}{360} \text{rad}} \qquad \boxed{1 \text{ rad} = \frac{360}{2\ \pi}}$$

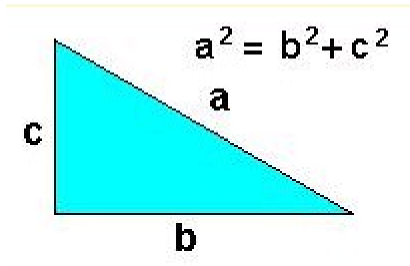
$$\boxed{\text{sen } \alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{ordenada de P}}{\text{distancia de P al origen}}}$$

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{abscisa de P}}{\text{distancia de P al origen}}}$$

$-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1 \quad , \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1$	$\boxed{\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$
	Observa: como no se puede dividir por cero, debemos excluir la tangente

$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$	de los ángulos de 90º y 270º.

Teorema de Pitágoras.-*En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*



7. ACTIVIDADES

1. ¿A qué cuadrante pertenecen los siguientes ángulos?

   300º, 192º, 93º, 180º 1', 150º, 35º

2. Suponiendo que a es la hipotenusa, b y c los catetos de un triángulo rectángulo. Encontrar lo que se pide:

   1).- a = ? si b = 5 c = 8

   2).- b = ? si a =3 c = 10

   3).- c = ? si a = 10 b = 15

   4).- a = ? si b = 7 c = 9

   5).- b = ? si a = 6 c = 10

3. Expresar en grados, minutos y segundos los ángulos que miden 23,18º , 107,03º
4. Calcular sen a, cos α y tg α en los siguientes casos.
   a) b = 5 ; c = 3.
   b) a = 10 ; b = 6.
5. Hallar el área de un triángulo rectángulo en el cual un ángulo mide 30º y la hipotenusa mide 4.
6. Hallar los ángulos del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 30 y 35.
7. En un triángulo sabemos que la hipotenusa mide 4 cm y la tangente del ángulo que esta determina con la base es igual a 0,2. Calcular el área de dicho triángulo.
8. Un poste de teléfono está sujeto por medio de varios cables que parten del extremo superior. Uno de estos cables está atado a una estaca situada a 5 m del

pie del poste y forma con la horizontal un ángulo de 60º. Calcular la altura del poste y la longitud del cable.

9. En un triángulo isósceles la altura correspondiente a la base mide el doble que esta. Hallar el valor de sus ángulos.

10. Un árbol y un observador se encuentran en orillas opuestas de un río. El observador mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del árbol y obtiene 35º; retrocede 10 metros y mide el nuevo ángulo, obteniendo un resultado de 25º. ¿Qué altura tiene el árbol?.

11. Si los dos catetos de un triángulo rectángulo valen 20 cm. y 25 cm., respectivamente, calcular el valor de la hipotenusa y de los ángulos del triángulo.

12. Si en un triángulo rectángulo un ángulo vale 60º y su lado opuesto 15 cm., obtenerlos demás elementos del triángulo.

13. Hallar el área de un triángulo rectángulo en el que uno de los catetos vale 10 cm. y su ángulo opuesto 50º.

14. El ángulo que forma la visual de un observador desde un punto determinado con el punto más alto de un poste es de 40º. Si se aleja del poste en línea recta 5 m. el ángulo pasa a ser de 25º. ¿A qué distancia del poste se encontraba el observador al principio?

15. Calcular los lados iguales de un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 20 cm. y su ángulo opuesto 30º. Hallar el área del triángulo.

8. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

1. Suponiendo que a es la hipotenusa, b y c los catetos de un triángulo rectángulo. Encontrar lo que se pide
   - c = ? si a = 13 b = 10
   - a = ? si b =2 c = 10
   - b = ? si a = 5 c = 15
2. En un triángulo rectángulo, un ángulo mide 60º y el cateto opuesto mide 3. Hallar su perímetro.
3. Calcular la altura de un triángulo isósceles cuyo lado desigual es de 4 metros y el ángulo opuesto es de 60º.

9. SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

1. c= $\sqrt{69}$, a= $\sqrt{96}$, b= $\sqrt{200}$
2. $3\left(1+\sqrt{3}\right)$
3. $2\sqrt{3}$

BIBLIOGRAFÍA

- Emilio Bujalance y otros. Matemáticas especiales. Editorial Sanz y Torres (1998). 2ª Edición
- María E. Ballvé y otros. Problemas de matemáticas especiales. Editorial Sanz y Torres (1996). 2ª Edición.
- José T. Pérez Romero y José A. Jaramillo Sánchez. Matemáticas. Pruebas de acceso a la universidad para mayores de 25 años. Editorial MAD. (2002).
- http://descartes.cnice.mecd.es/
- http:www.uoc.edu

UNIDAD DIDÁCTICA 8: Funciones II

c) ÍNDICE

2. INTRODUCCIÓN GENERAL A LA UNIDAD Y ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO

En esta unidad introducimos la representación de las funciones polinómicas de grado menor o igual que tres, de las funciones trigonométricas básicas, es decir, la función seno, coseno y tangente. Así como, la representación gráfica de las funciones exponencial y logarítmica.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudiar en general las propiedades y características de las funciones polinómicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.
- Llegar a reconocer las gráficas de las funciones polinómicas de grado menor o igual que 3, se pretende que observando el polinomio y sus coeficientes se determine que forma tiene la gráfica, sin necesidad de acudir a la tabla de valores.
- Identificar, construir y representar las funciones trigonométricas
- Conocer la definición de las funciones exponenciales y logarítmicas

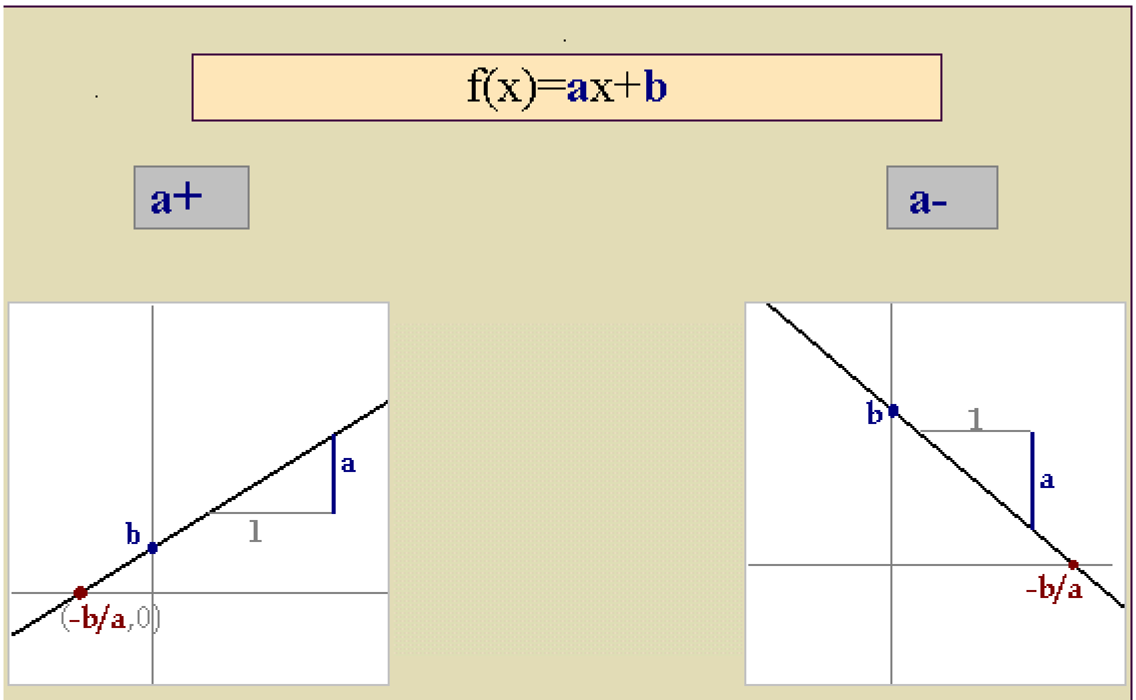
4. DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

- **Funciones polinómicas**

Las funciones polinómicas son funciones reales de variable real, cuyo dominio es el conjunto de todos lo números reales y cuya imagen es un subconjunto de los números reales ó el conjunto de los números reales, dependiendo del grado del polinomio y del valor de los coeficientes. A continuación detallamos, en el caso de funciones polinómicas de grado menor o igual que tres, las características fundamentales para su representación,

1. **Representación de funciones polinómicas de grado uno**

Las gráficas de las funciones polinómicas de grado uno son de la forma **f(x)=ax+b,** como estudiamos en la unidad didáctica 5, son **rectas**, si la pendiente a>0 son crecientes y si a<0, son decrecientes. El coeficiente **b** nos da un punto de la recta: el punto de **corte con el eje y**. Por tanto, el coeficiente de x, **a,** determina, salvo traslación, la gráfica de **f(x)=ax+b.**



En general los pasos que podemos seguir para representar una una función de grado 1 **f(x)=ax+b** son los siguientes:

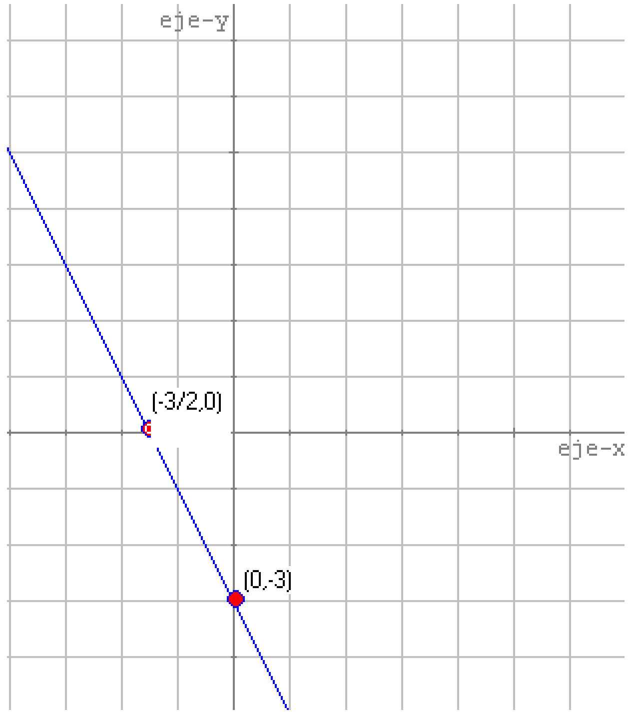
3Determinar el punto de corte con el eje de ordenadas y. Punto de coordenadas (0,b).

4Determinar el punto de corte con el eje de abscisas x. Punto de coordenadas $(-\frac{b}{a},0)$.

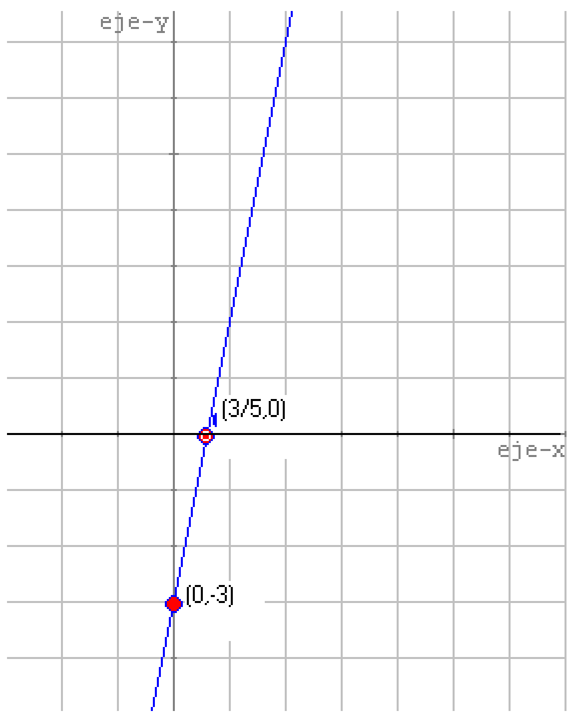
5Trazar la recta que pasa por los dos puntos anteriores.

Ejemplo:

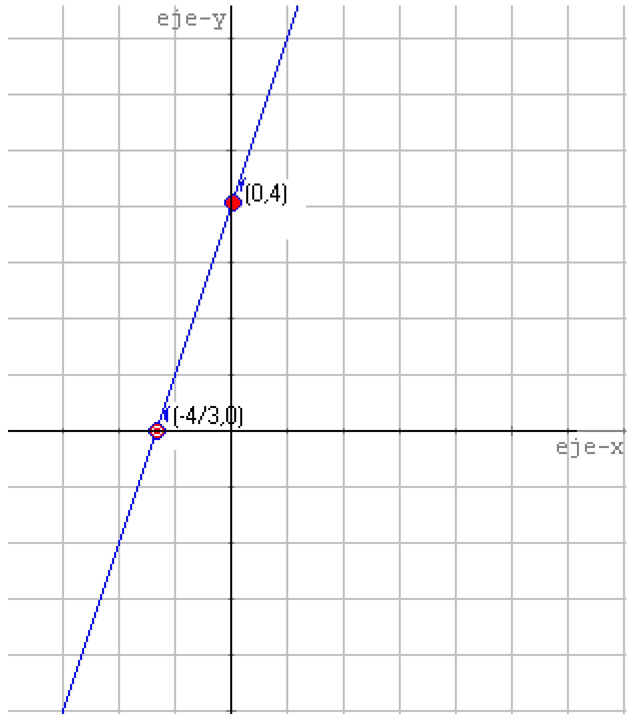
1. **F(x)=-2x-3**



2. **F(x)=5x-3**

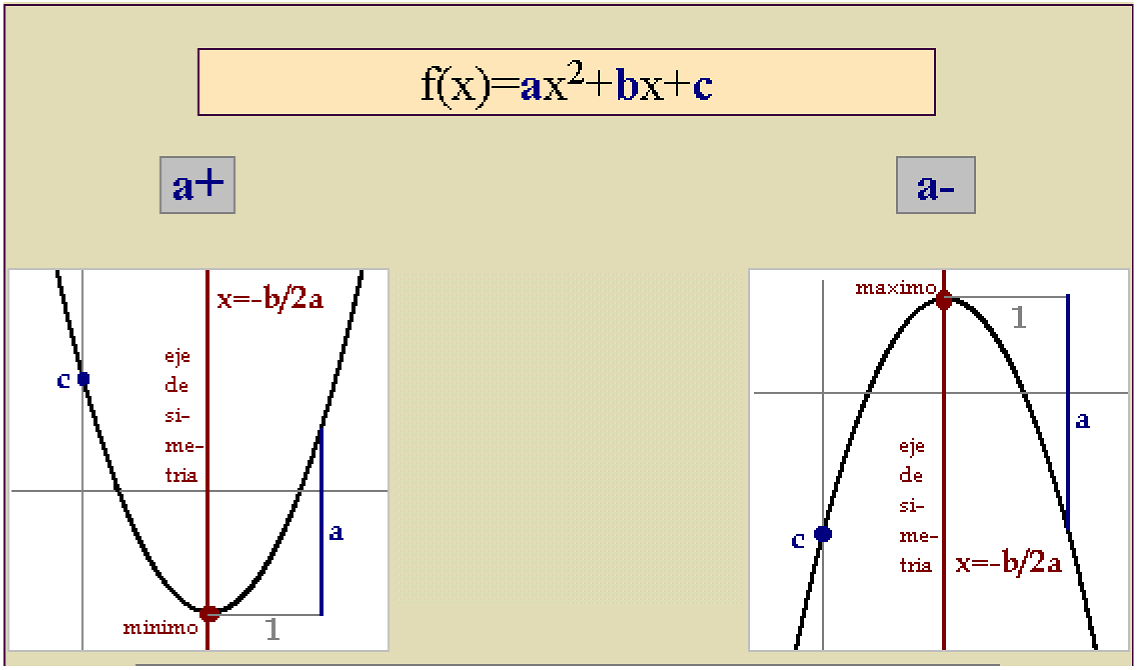


3. **F(x)=3x+4**

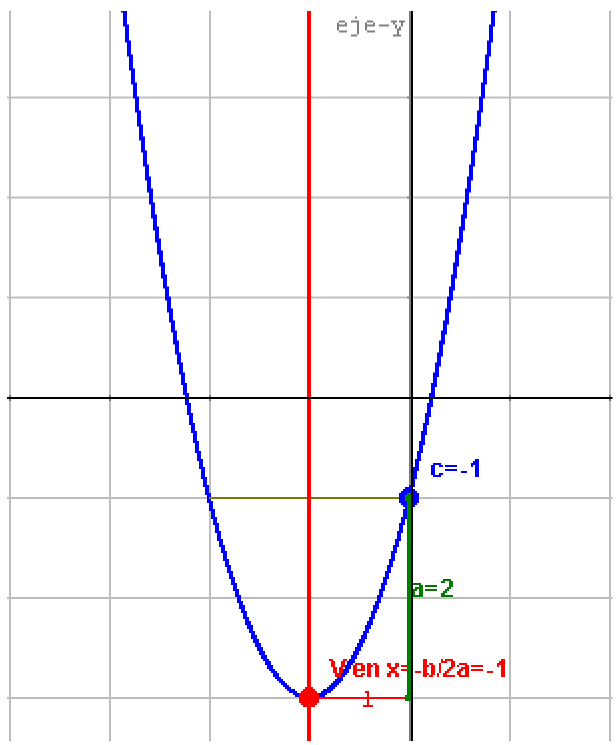


2. Representación de funciones polinómicas de grado 2

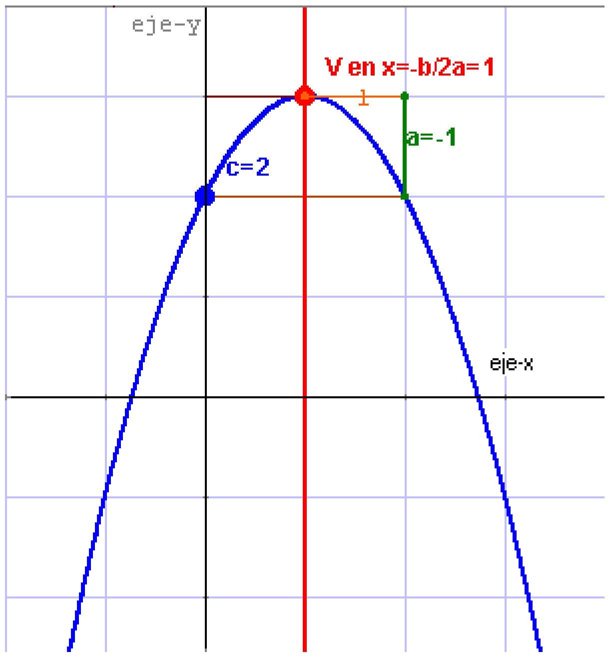
Las funciones polinómicas de 2º grado $\mathbf{f(x)=ax^2+bx+c}$ representan parábolas cuyo eje de simetría es paralelo al eje y. Son valles, si a>0, y montañas, si a<0; **a** determina **la concavidad de la parábola**. Entre **b** y **a** se halla el eje de simetría:
$\mathbf{x= -b/2a}$ y **c** nos da el punto de **corte con el eje y**.
Al igual que en las funciones de grado uno, el coeficiente **a** determina, salvo traslación, la gráfica de $\mathbf{f(x)=ax^2+bx+c}$, es decir, la gráfica de $\mathbf{f(x)=ax^2+bx+c}$ se obtiene trasladando la gráfica de $\mathbf{f(x)=ax^2}$



Ejemplo: $f(x)= 2x^2+4x-1$



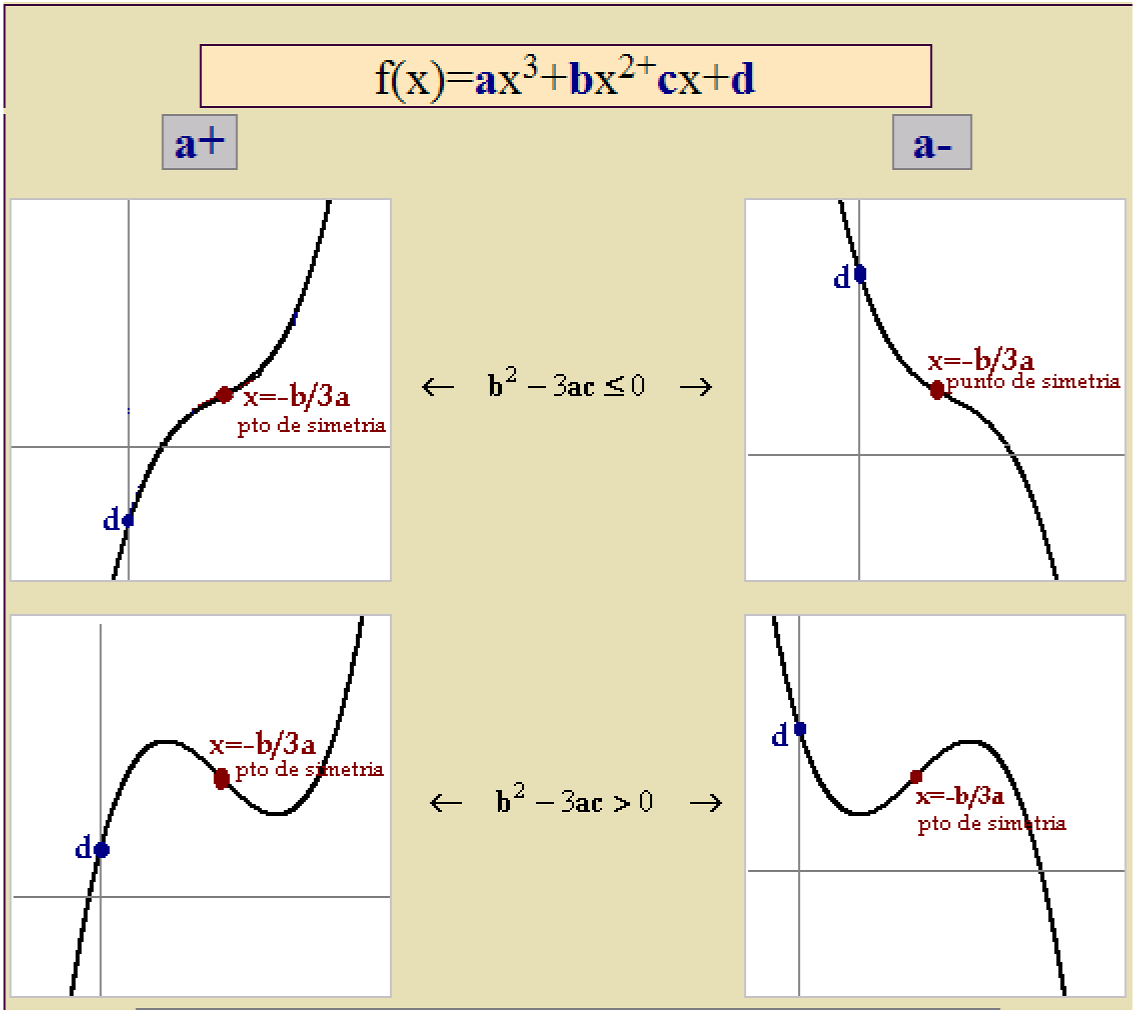
Ejemplo: $f(x)= -x^2+2x+2$



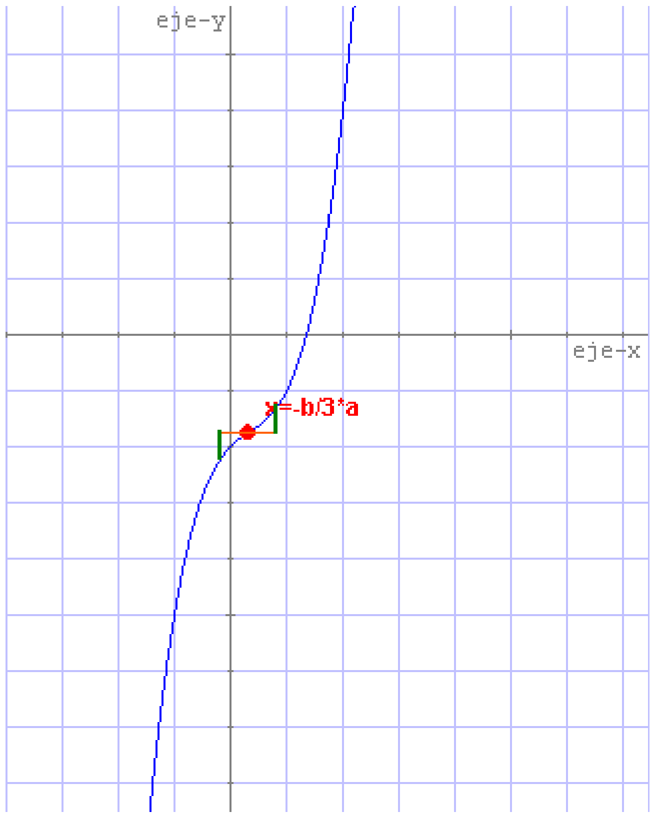
3. Representación de funciones polinómicas de grado 3

Las cúbicas: **f(x)=ax^3+bx^2+cx+d** son como sillas, unas con el asiento hundido y otras sin hundir, podemos observar que el signo de **a** decide si el respaldo de la silla está a la derecha o a la izquierda y todas son simétricas respecto del punto en el que la x vale **-b/3a**, punto de inflexión.

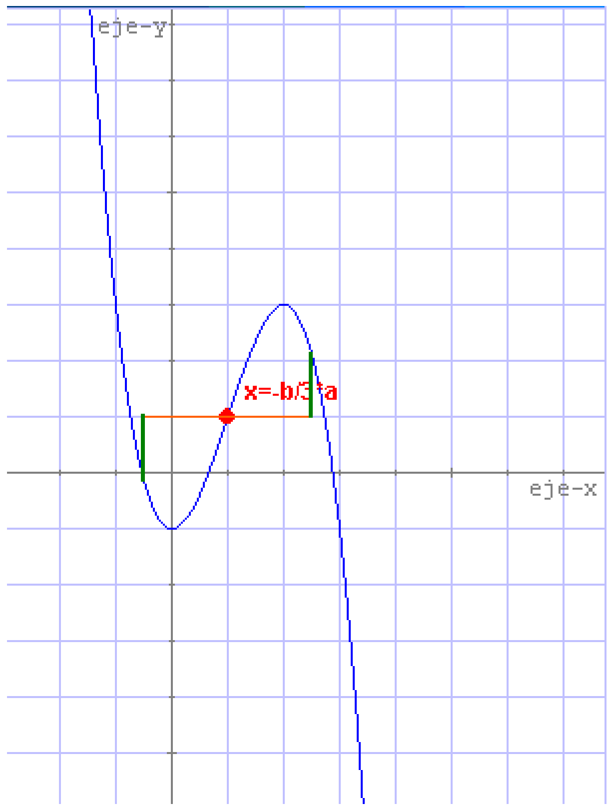
En este caso, no basta con el coeficiente **a** del máximo grado para saber la forma de la función, tal y como ocurre con las gráficas de las funciones polinómicas de menor grado.



Ejemplo: $f(x)=x^3-x^2+x-2$ Observa que $a > 0$ $\quad b^2 - 3ac < 0$, d=-2 y x=1/3, por tanto, su gráfica es aproximadamente



Ejemplo: f(x)=-x^3+3x^2-1. En este caso a=-1<0 y $b^2 - 3ac = 9 > 0$, d=-1 y x=1. Es decir, la gráfica de esta función es aproximadamente

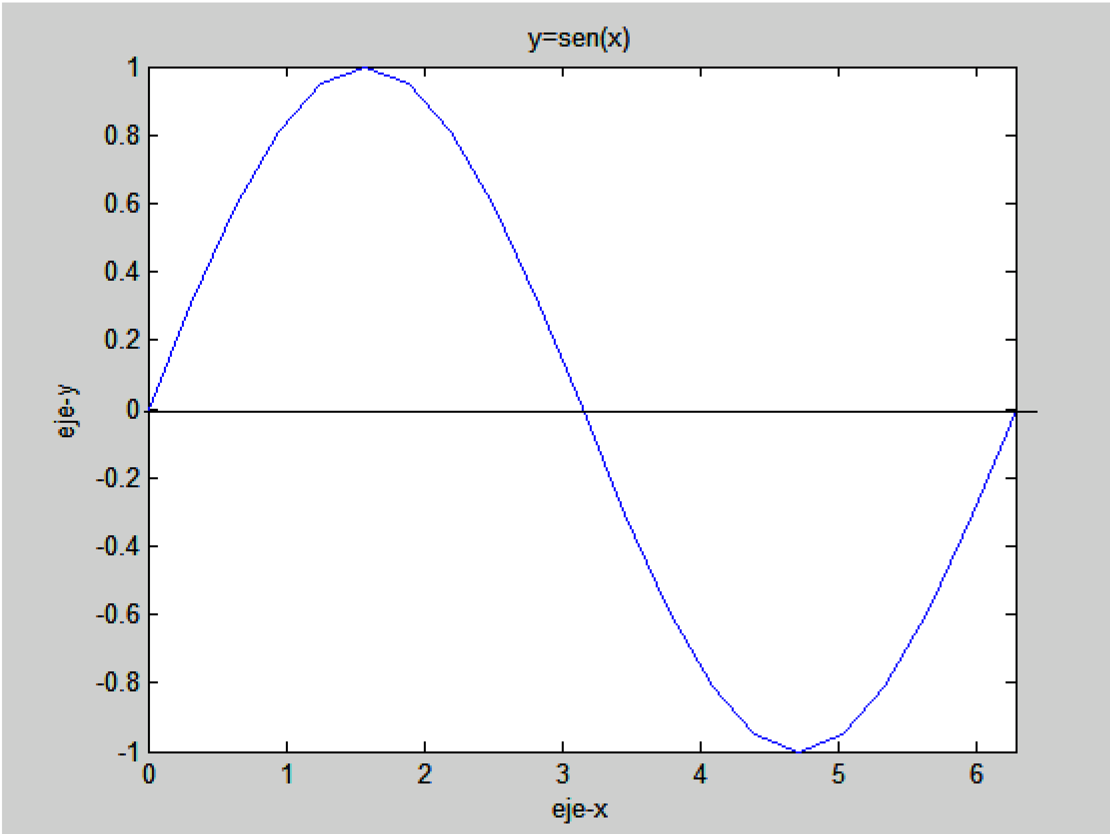


- **Funciones trigonométricas**

En la unidad didáctica 6 estudiamos cómo obtener el seno, el coseno y la tangente de un ángulo. En esta unidad vamos a estudiar las representaciones gráficas de las funciones seno, coseno y tangente.

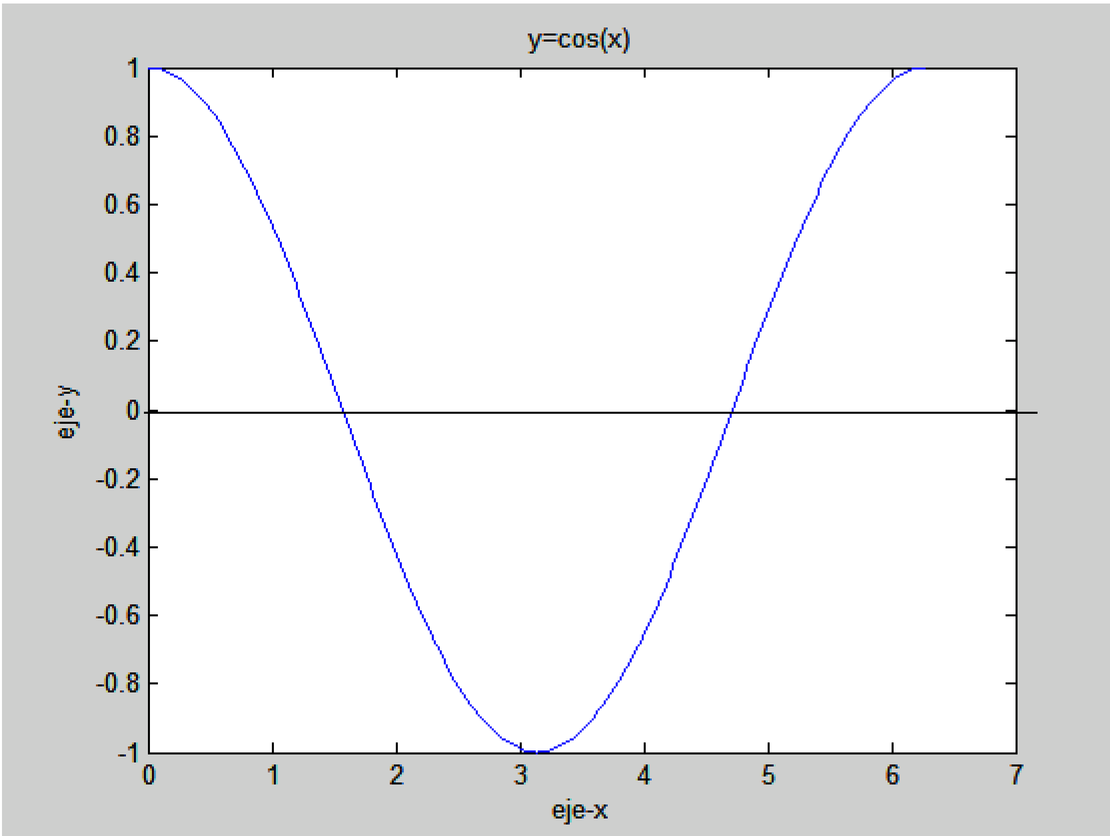
1. **Función seno**

Se llama función seno a la aplicación que asigna al número real x, el número real seno de x. El dominio de la función seno es el conjunto de todos los números reales y su imagen o recorrido es el intervalo [-1,1]. Puesto que una vez que hemos dado una vuelta completa a la circunferencia, el valor del seno de un ángulo se repite, se dice que la función seno es una función periódica de período 2π (función periódica con período de ángulo completo).



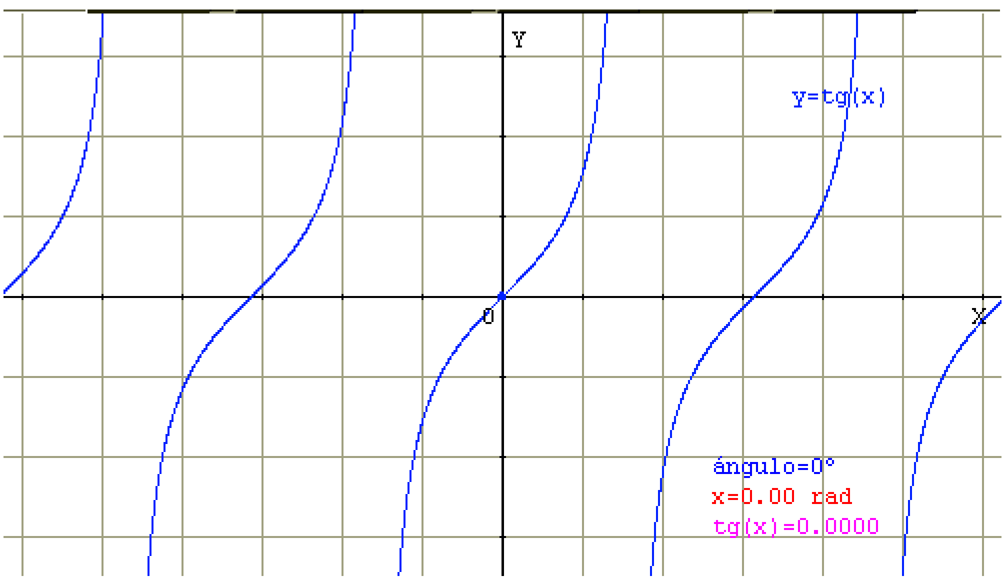
2. Función coseno

Se llama función coseno a la aplicación que a cada número real real x le asigna el número real coseno de x. La función coseno, al igual que la función seno, tiene como dominio el conjunto de los números reales y como imagen el intervalo [-1,1]. Análogamente, es una función periódica de período 2π (es decir, también es función periódica de período de ángulo completo).



3. Función tangente

Se llama función tangente a la aplicación que asigna a cada número real x, el número real tangente de x. En este caso, recuerda que la tangente de un ángulo se puede definir como el cociente $\frac{sen(x)}{\cos(x)}$, por tanto, el dominio de la función tangente no es todo el conjunto de los números reales, pues no está definida para aquellos valores en los que el coseno del ángulo vale cero. Es decir, el domino de la función tangente es $dom(\tan(x)) = R - \{(2t+1)*90 \quad t \in Z\}$ si trabajamos en grados y $dom(\tan(x)) = R - \left\{(2t+1)*\frac{\pi}{2} \quad t \in Z\right\}$. Sin embargo la imagen o recorrido de la función tangente es todo el conjunto de los números reales. Observa, utilizando la definición de tangente, así como la siguiente gráfica, que los valores que toma valores de la tangente vuelven a repetirse. Por ello se dice que esta función es ***periódica***, de periodo 180 grados o π radianes.



- **Función exponencial**

La función exponencial es muy importante en matemáticas. Es la función con más presencia en los fenómenos observables. Así presentan comportamiento exponencial: la reproducción de una colonia de bacterias, la desintegración de una sustancia radiactiva, algunos crecimientos demográficos, la inflación, la capitalización de un dinero colocado a interés compuesto, etc.

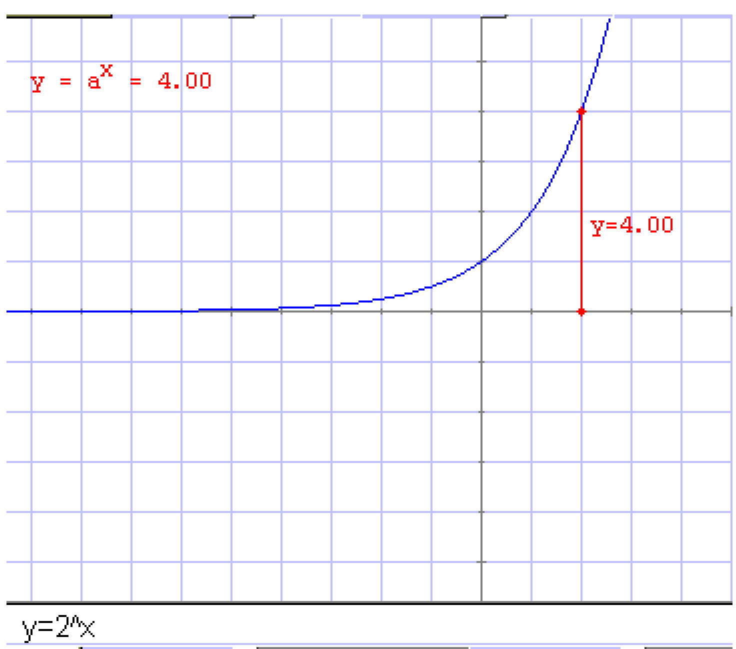
Se llaman funciones exponenciales a las funciones de la forma **$f(x) = a^x$** o **$y = a^x$**, donde la base de la potencia **"a"** es constante (un número) y el exponente la variable **x**. Además la base de la potencia **"a>0"** y distinto de uno.

Ejemplo: Algunos tipos de **bacterias** se reproducen por **"mitosis"**, dividiéndose la célula en dos cada espacio de tiempo muy pequeño, en algunos casos cada 15 minutos. ¿Cuántas bacterias se producen en estos casos, a partir de una, en un día?

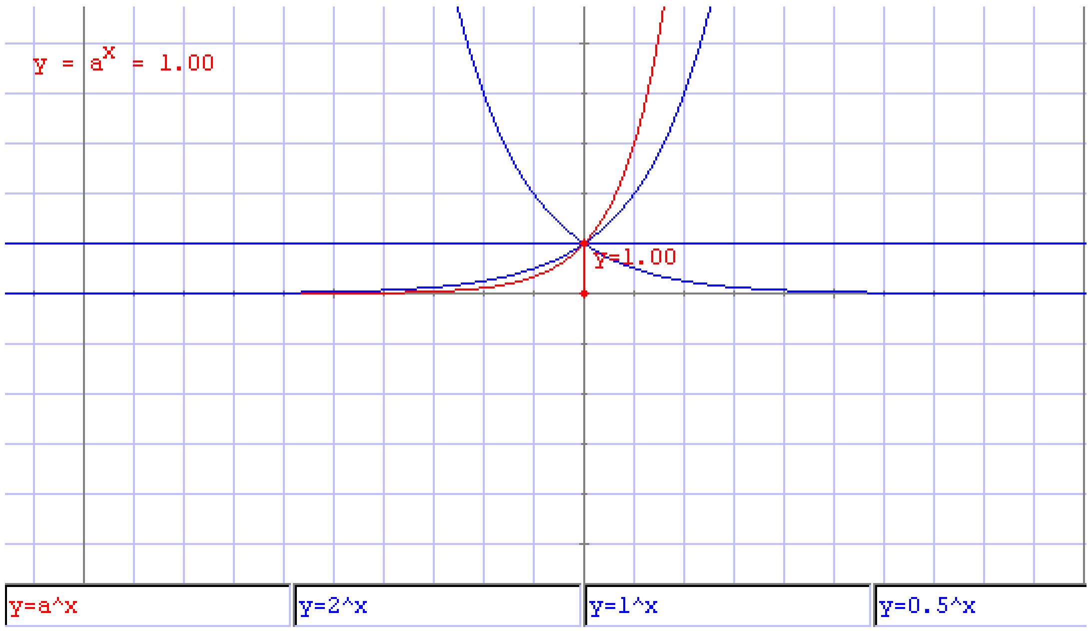
Minutos	15	30	45	60	....
NºBacterias	2	4	8	16	2^x

siendo **x** los intervalos de 15 minutos:..$2^4 = 16$ en una hora, $2^8 = 256$ en dos horas,... $2^{24\cdot 4} = 2^{96} = 7{,}9\cdot 10^{28}$. ¡en un día!. Esto nos da idea del llamado **¡crecimiento exponencial!**, expresión que se utiliza cuando algo crece muy deprisa.

La gráfica de la función exponencial de base 2 es la siguiente:



A continuación representamos las funciones exponenciales de base 2 y de base 0.5 en un mismo gráfico.



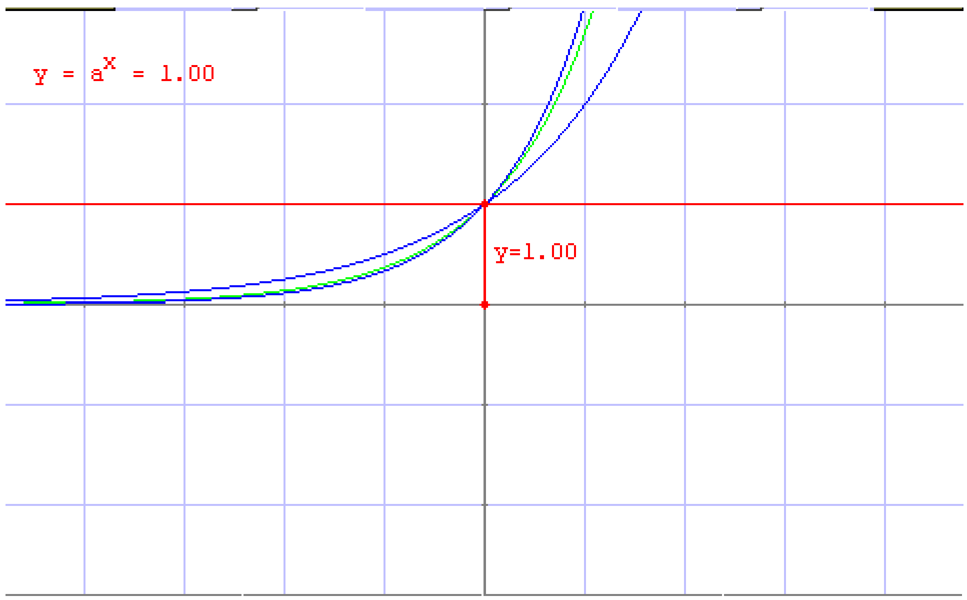
Del gráfico anterior podemos observar que la función exponencial satisface las siguientes propiedades:

4. El dominio de la función exponencial es todo el conjunto de los números reales.
5. En todos los casos, es decir, independientemente del valor de la base, siempre pasa por un punto fijo, que es el punto de coordenadas (0,1).
6. Su imagen o recorrido son los números reales positivos.
7. La función exponencial es creciente si a>0 y decreciente si 0<a<1.

En la siguiente gráfica se representan las funciones **2^x** y **3^x** en azul y la función **$y = e^x$** en verde. Quizás ya conozcas el número **"e"**. Si no lo conocías, se trata de un número irracional, por tanto con infinitas cifras decimales y no periódico, cuyo valor es **2,718281**... en sus seis primeras cifras decimales.

La función exponencial que tiene por base el número **e** tiene un especial interés que conocerás mejor cuando se estudien los límites y los logaritmos. Evidentemente **e**>1, luego la función ya es conocida.

Además de escribirse como **$y = e^x$** , también se escribe como **y=exp(x)**, por tratarse de la función exponencial más utilizada.



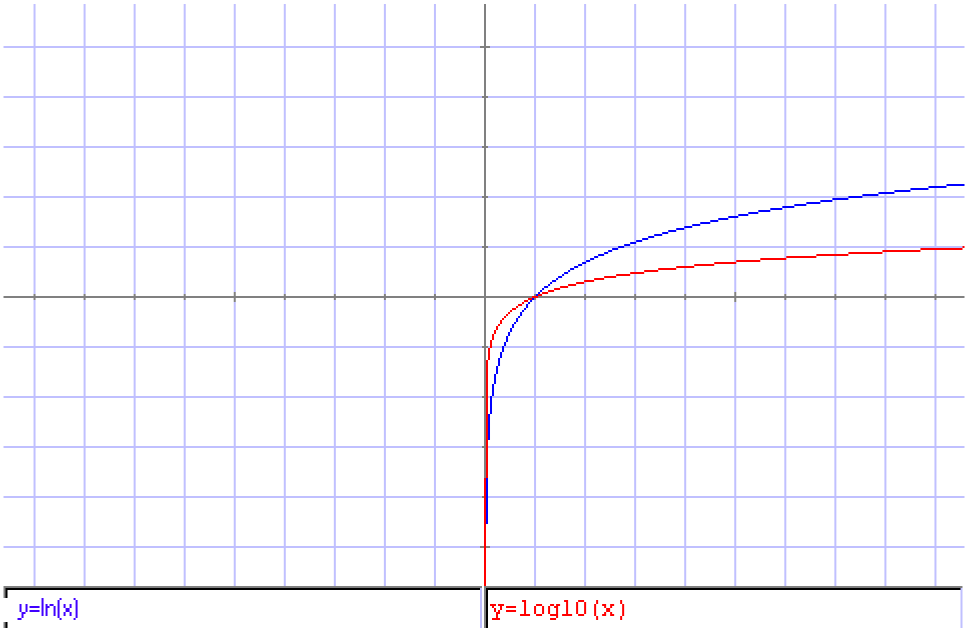
- **Función logarítmica**

La función logarítmica es muy importante en matemáticas. Constituye un poderoso instrumento en la práctica del cálculo numérico. Por ser la recíproca de la exponencial, esta función es una de las de más presencia en los fenómenos observables .Así aparece en la reproducción de una colonia de bacterias, la desintegración de una sustancia radiactiva, algunos crecimientos demográficos, la inflación, la capitalización de un dinero colocado a interés compuesto, etc.

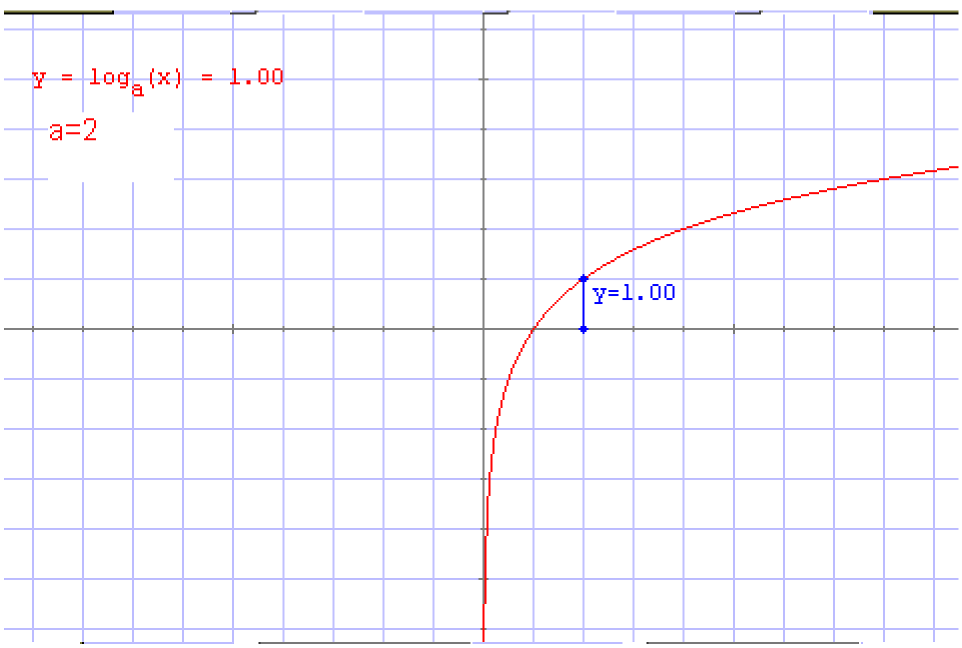
Se llaman funciones logarítmicas a las funciones de la forma **$f(x) = \log_a(x)$** donde **"a"** es constante (un número) y se denomina **la base del logaritmo**.

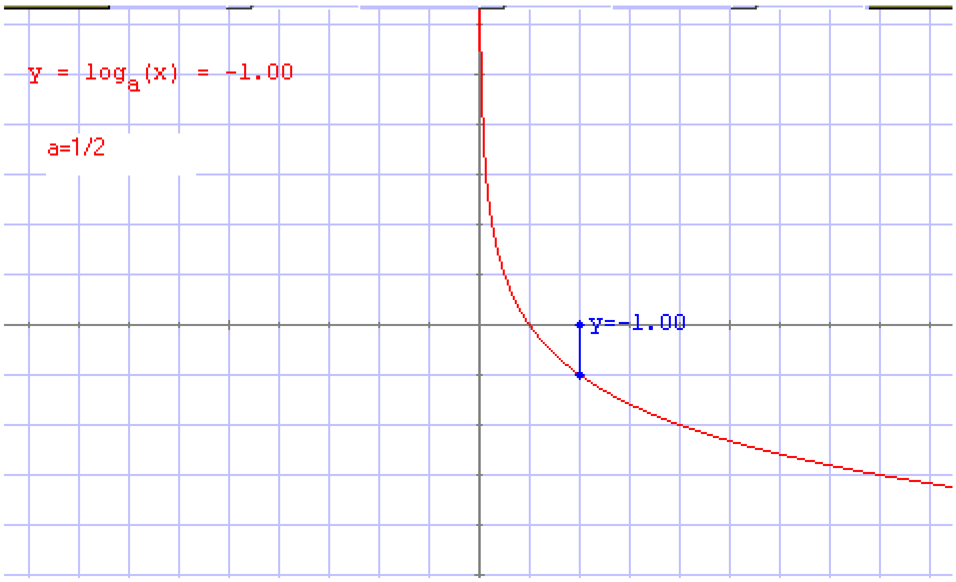
La función logarítmica que más se utiliza en matemáticas es la función "logaritmo neperiano" y se simboliza normalmente como **ln (x),** (la función logaritmo en base 10 se simboliza normalmente como **log(x))**.

En la siguiente gráfica están representadas las dos funciones logarítmicas mencionadas.



A continuación presentamos la gráfica de la función logarítmica de base a=2>1 y la de base 0<a=1/2<1 para que observes las similitudes y las diferencias.





De las gráficas anteriores se puede observar las siguientes propiedades de la función logarítmica:

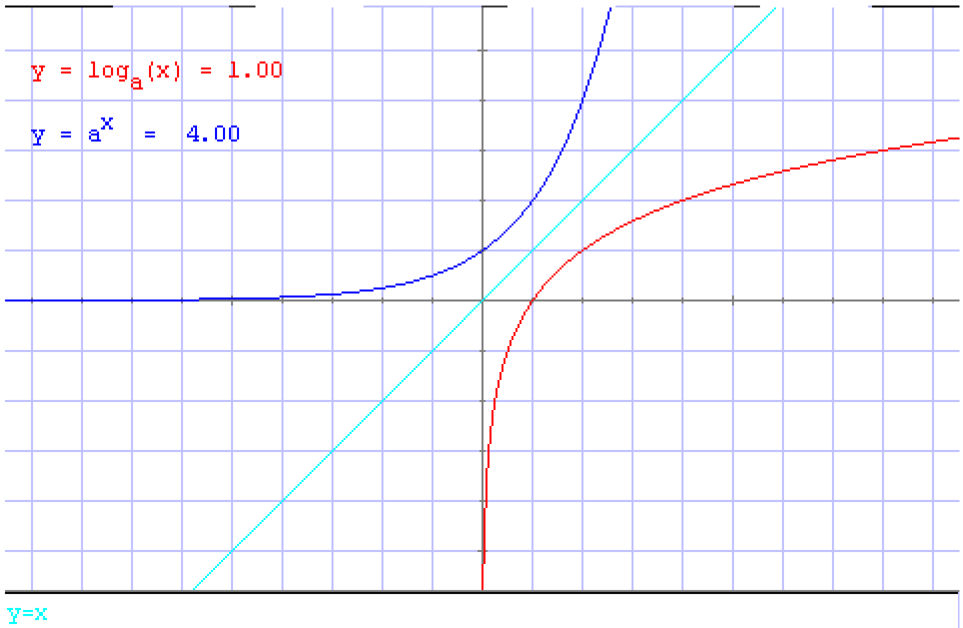
- Observa que la función existe sólo para valores de ***x*** mayores que 0, a diferencia de la exponencial que existe para cualquier valor de **x**. (puedes utilizar la definición de logarítmo para ver que el logarítmo de un número negativo o de 0 no existen). Decimos por tanto que: dominio ***de la función logarítmica es R^+ o el intervalo (0, infinito)***

- Observa que en todos los casos la función pasa por un punto fijo: el ***(1,0)***

- Observa que se acerca al eje ***Y*** tanto como se desee, sin llegar a cortarlo, hacia abajo en el caso en que **a**>1 y hacia arriba en caso de **a**<1 ("SIEMPRE POR LA DERECHA").

- **Función logarítmica y su inversa la exponencial**

En la siguiente gráfica se te presenta la función logarítmica de base **"a"** y la función exponencial de la misma base. (concretamente a=2)



Las funciones exponencial y logarítmica se dice que son una inversa de la otra, aunque quizás aun no conocerás el concepto de función inversa. Gráficamente se observa viendo que ***son simétricas respecto a la recta y = x***, como se ve en la escena.

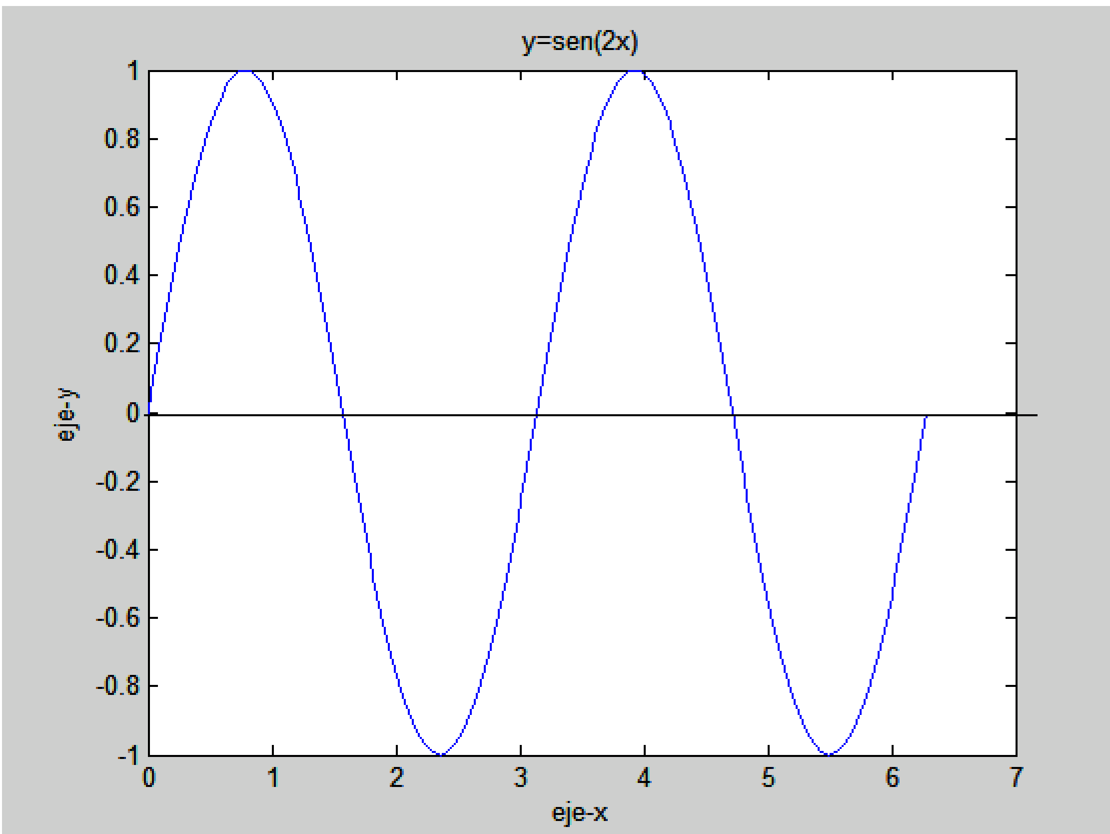
5. BIBLIOGRAFÍA

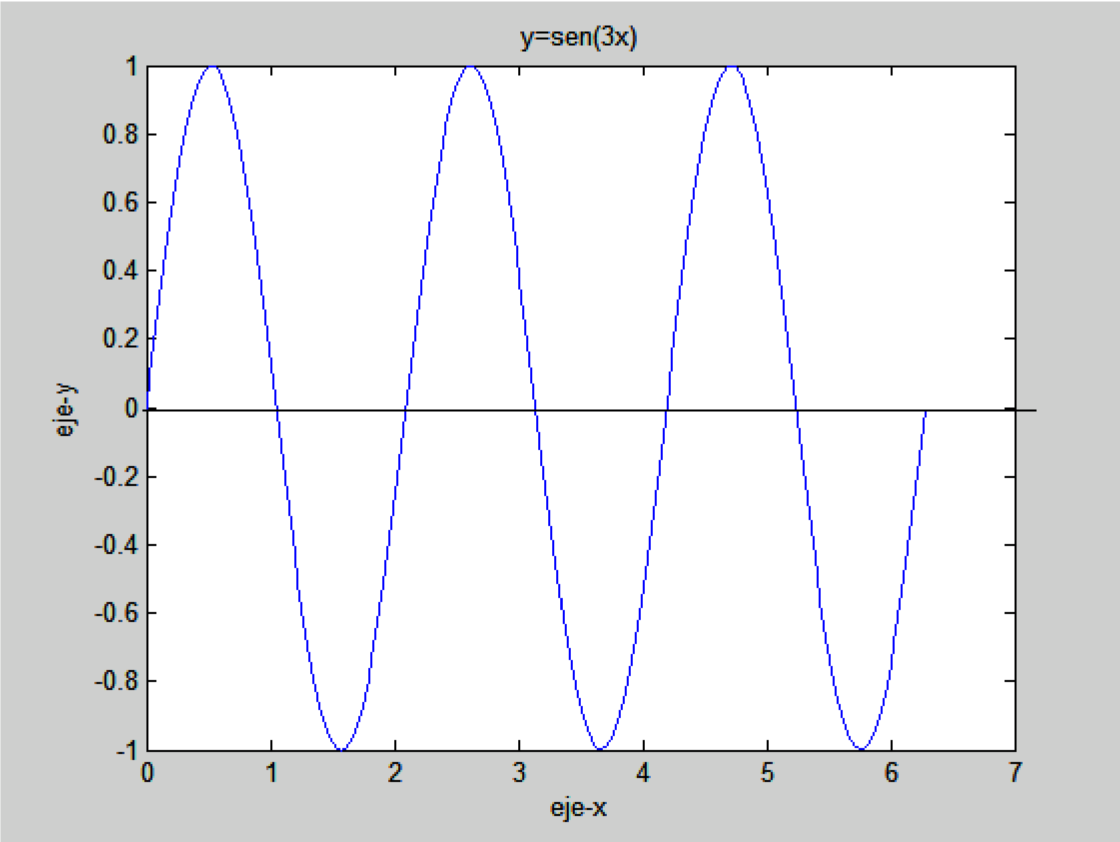
- Emilio Bujalance y otros. Matemáticas especiales. Editorial Sanz y Torres (1998). 2ª Edición
- María E. Ballvé y otros. Problemas de matemáticas especiales. Editorial Sanz y Torres (1996). 2ª Edición.
- José T. Pérez Romero y José A. Jaramillo Sánchez. Matemáticas. Pruebas de acceso a la universidad para mayores de 25 años. Editorial MAD. (2002).
- http://descartes.cnice.mecd.es/
- http:www.uoc.edu

- **ACTIVIDADES**

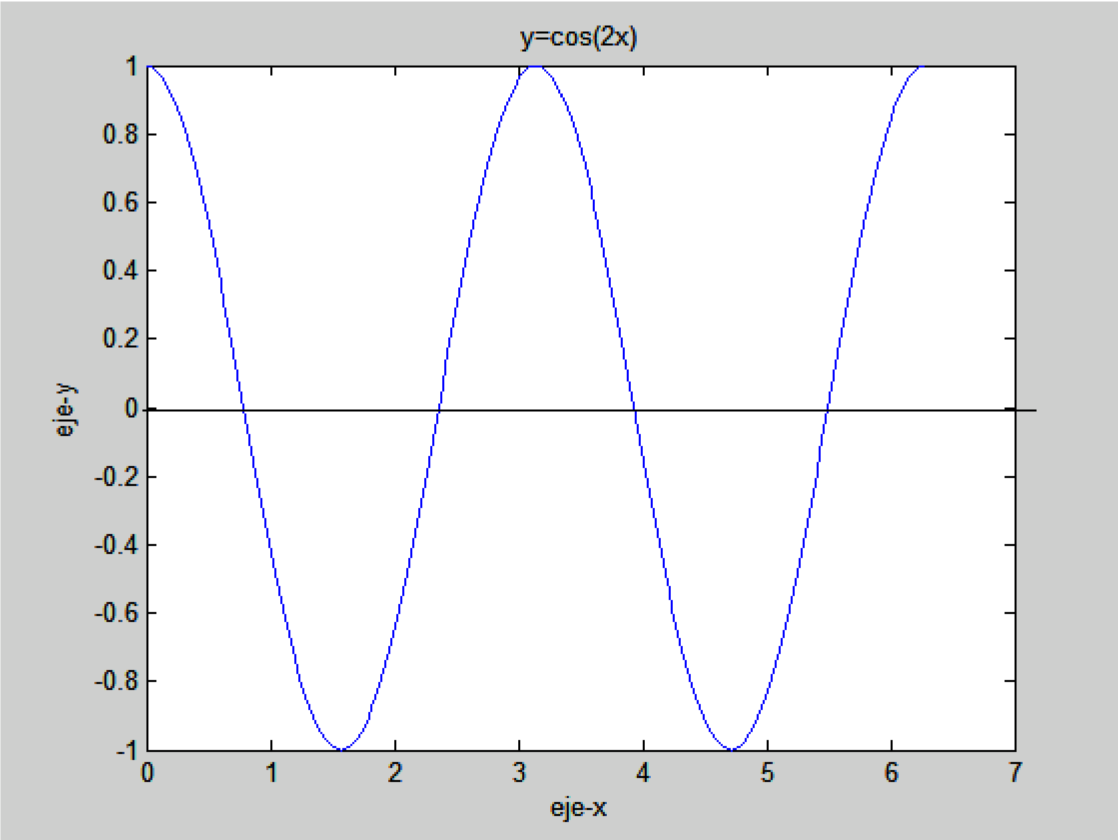
1. **Dadas las siguientes funciones polinómicas: $f(x)=2x-3$; $g(x)=3x^2+6x-2$ y $h(x)=-x^3+x^2-4$. Determina el dominio y la imagen y esboza la gráfica de cada una de ellas.**

2. **Dadas las siguientes funciones trigonométricas:**

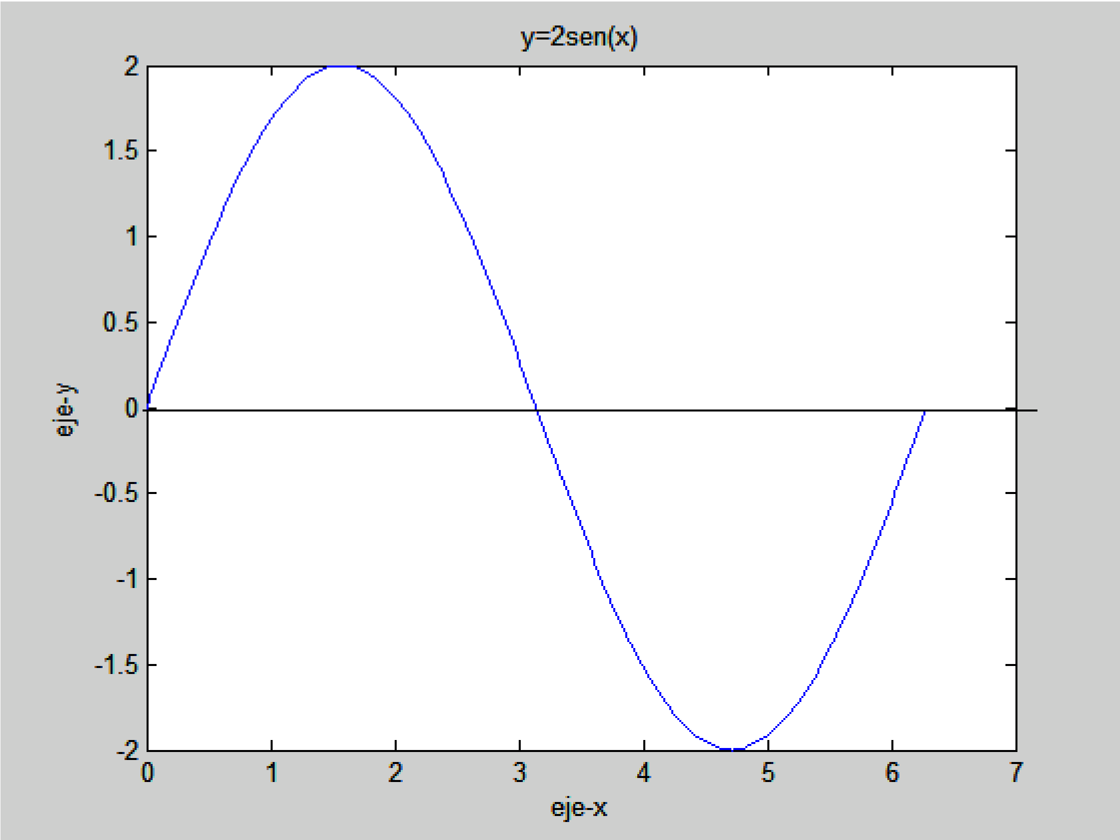




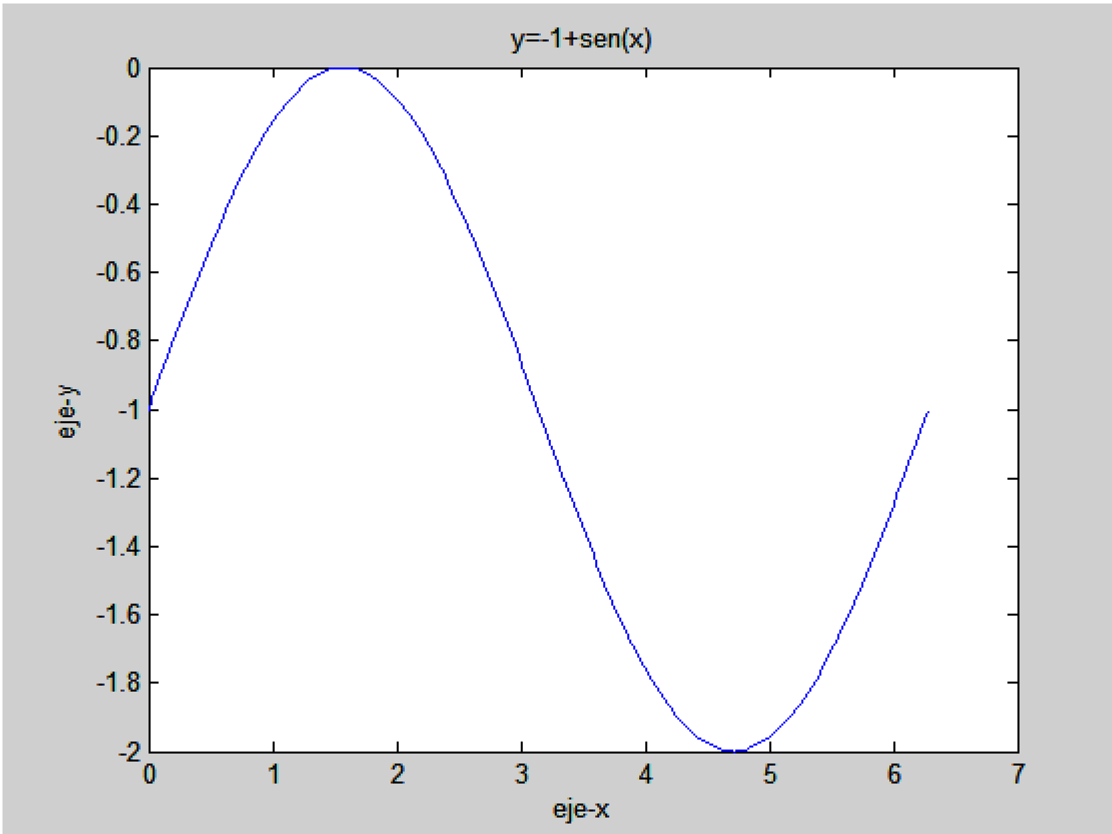
y=sen(3x)
eje-y
eje-x
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
7



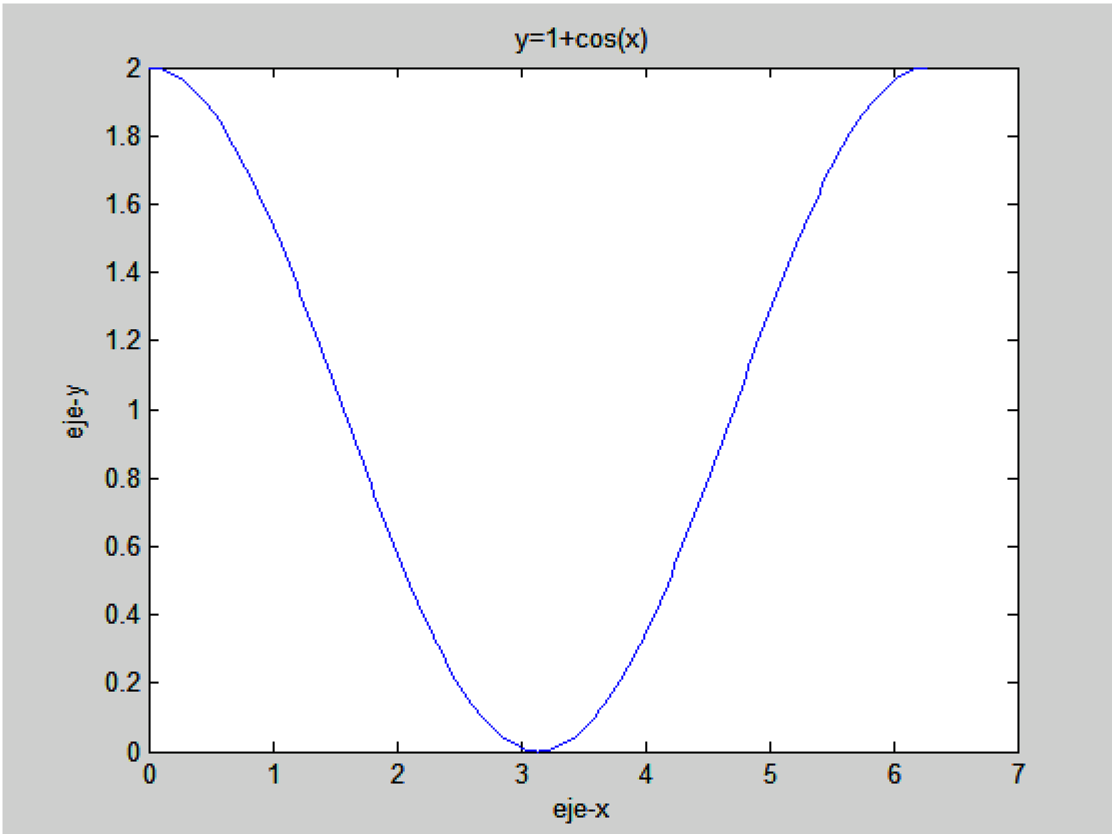
y=cos(2x)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
eje-y
eje-x



y=2sen(x)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
1
2
3
4
5
6
7
eje-y
eje-x



y=-1+sen(x)
eje-y
eje-x
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
-1.4
-1.6
-1.8
-2
0
1
2
3
4
5
6
7



Determina para cada una de ellas:

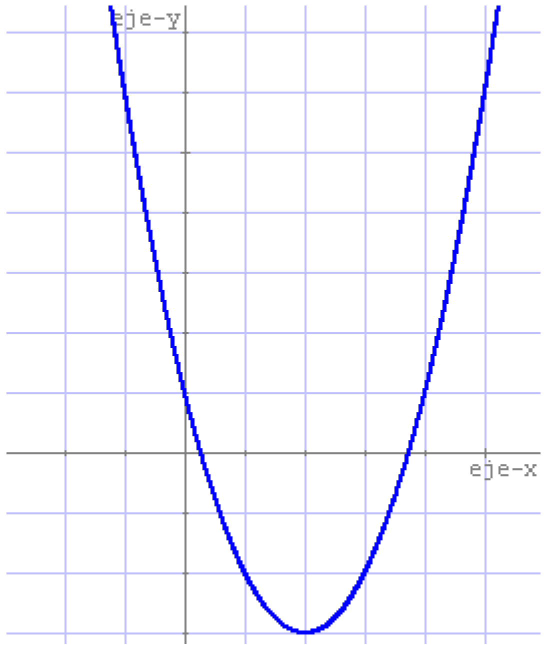
a) Dominio e imagen

b) Período

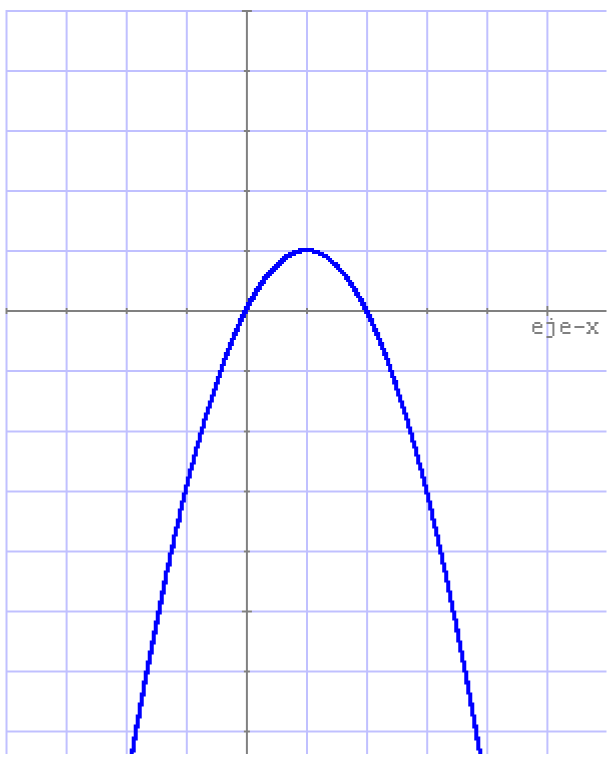
c) El valor que toman dichas funciones para los siguientes valores de x (ayúdate con la calculadora)

X	0º	45º	90º	180º	270º	360º
Y						

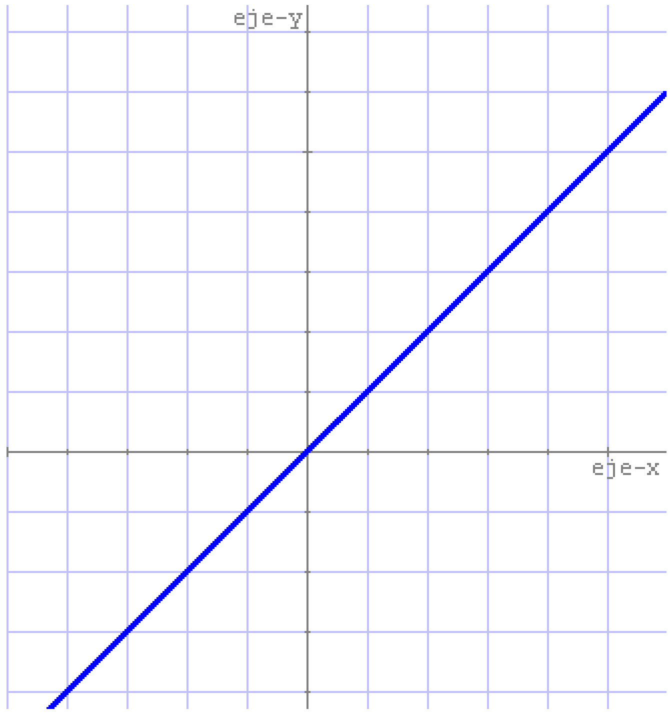
3. ¿La gráfica siguiente corresponde con la función cuya expresión algebraica es $f(x)=(x-2)^2-3$?



6**¿La gráfica siguiente corresponde con la función cuya expresión algebraica es $f(x)=2x-x^2$?**

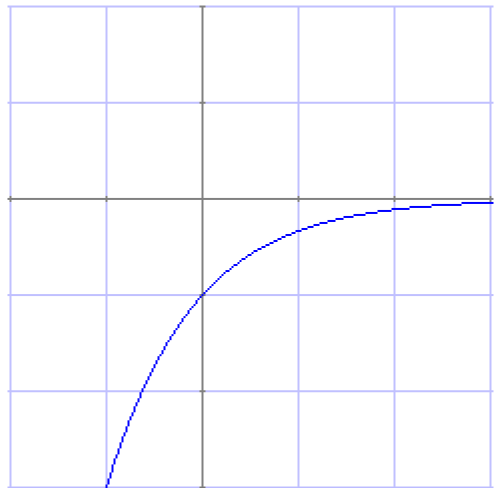


5. ¿La gráfica siguiente corresponde con la función cuya expresión algebraica es $f(x)=2x-x^2$?



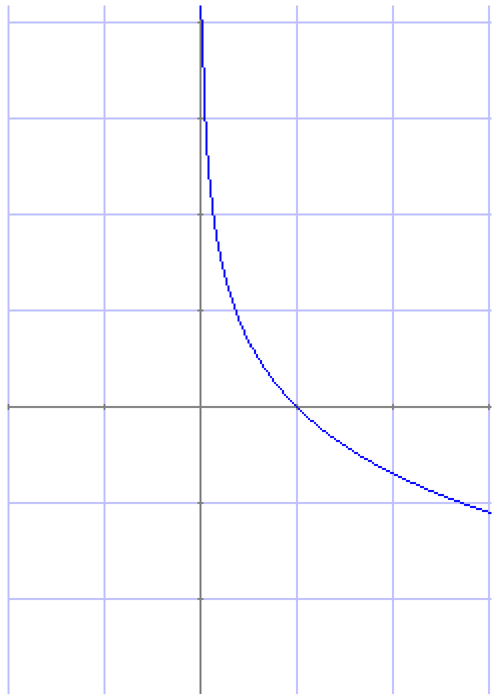
7¿La expresión f(x)=-(x-1)x(x+1) se corresponde con la gráfica siguiente?

8¿Se corresponde la expresión $y=3^{-x}$ con la gráfica siguiente?

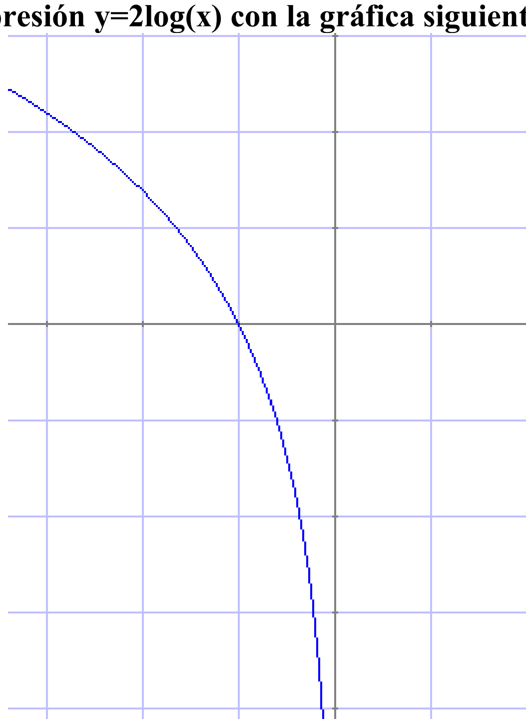


9¿Se corresponde la expresión y=-(2^x) con la gráfica siguiente?

10¿Se corresponde la expresión y=-ln(x) con la gráfica siguiente?



11¿Se corresponde la expresión y=2log(x) con la gráfica siguiente?



- **EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN**

1. **Representa las gráficas de las siguientes funciones**

4. $f(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x>2 \\ 2x-3 & si \quad x\le 2 \end{cases}$

5. $g(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x\le 1 \\ 2x-1 & si \quad x>1 \end{cases}$

6. $h(x)=x^2-6x+9$

2. **Encuentra los ángulos que satisfagan las siguientes igualdades:**

a) $sen\alpha=-\dfrac{1}{2}$

b) $\cos\beta=\dfrac{1}{2}$

c) $tg\gamma=1$

3. **Un empresario incrementa el precio de sus productos en un 5% anual. Actualmente uno de sus productos vale 18 euros. Encuentra la función que de el precio del producto en función de los años transcurridos. A partir de ésta, contesta a las siguientes cuestiones:**

α) **¿Cuánto costará el producto dentro de 4 años?**

β) **¿Cuánto costaba hace 4 años?**

χ) **¿Cuántos años han de pasar para que el precio actual del producto se duplique?**

- **SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN**

1.

2. a) $\dfrac{7\pi}{6}+2\pi\cdot k \qquad k\in Z$

b) $\dfrac{\pi}{3}+2\pi\cdot k \qquad k\in Z$

c) $\dfrac{\pi}{4}+\pi\cdot k \qquad k\in Z$

3. a) $18\cdot(1.05)^4\approx 21.879$

b) $18\cdot(1.05)^{-4}\approx 14.809$

c) $18\cdot(1.05)^x=36 \Leftrightarrow x=\dfrac{\log(2)}{\log(1.05)}$

MATEMÁTICAS

ACCESO A LA UNIVERSIDAD MAYORES 25 AÑOS

UNIDAD DIDÁCTICA 9: Límites y continuidad

1. ÍNDICE

2. INTRODUCCIÓN GENERAL A LA UNIDAD Y ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO

El concepto de límite de una función en un punto, junto con el concepto de continuidad, son de los conceptos matemáticos más difíciles de entender, ya que trata de procesos infinitos.

Por ello nos centraremos en presentar los conceptos, y calcular solamente límites de polinomios.

El concepto de continuidad va ligado al concepto de límite, uno lleva al otro. Aparece la idea de límite lateral y estudiaremos los diferentes tipos de discontinuidades.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Concepto de límite de una función en un punto

Concepto de continuidad de una función en un punto

Cálculo de límites polinómicos

Cálculo de límites laterales

Clasificación de discontinuidades

4. DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

1 Concepto de límite de una función en un punto.

Idea:
La idea de límite de una función en un punto es el valor al que se acerca la función cuando vamos tomando valores cada vez más próximos al punto.

Notación:
$\lim_{x \to a} f(x)$, límite de la función f(x) en el punto a

Ejemplo:
Sea la (recta) función $f(x) = x + 2$, y veamos cual es su límite cuando nos acercamos al punto cero.
(Vamos tomando valores cada vez más cercanos al punto cero)
$f(0{,}1) = 2{,}1$, $f(0{,}01) = 2{,}01$, $f(0{,}001) = 2{,}001$
Cuando nos vamos acercando al punto cero el valor de la función es 2, por tanto
$\lim_{x \to 0} f(x) = 2$

Generalmente:
Cuando tenemos una función a la que le queremos calcular el límite solo tenemos que sustituir el valor del punto en la función.
$\lim_{x \to 0} f(x) =$ con $f(x) = x + 2$, $f(0) = 0 + 2 = 2$ $\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 2$

Ejercicios:

$\lim_{x \to 0} (x + 2) =$ $\quad$ $\lim_{x \to 1} (x + 2) =$ $\quad$ $\lim_{x \to 0} (x^2) =$ $\quad$ $\lim_{x \to 2} (x^2) =$

$\lim_{x \to 2} (x^2 + 3) =$ $\quad$ $\lim_{x \to 0} (x^2 + 3x) =$ $\quad$ $\lim_{x \to 1} (x^2 + 3x + 1) =$ $\quad$ $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \right) =$

Pero

Como hemos observado cuando intentamos resolver el $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \right) =$, nos damos cuenta que al sustituir el punto cero en la función $\frac{1}{x} = \frac{1}{0}$, no nos aparece un número real, no nos aparece el límite que buscábamos.

Si vamos tomando valores para la función $f(x) = \frac{1}{x}$, cada vez más cercanos a cero

$f(0{,}1)=\frac{1}{0{,}1}=10$, $f(0{,}01)=\frac{1}{0{,}01}=100$, $f(\frac{1}{0{,}001})=1000$. Vemos que va aumentando luego la función va hacia el infinito cuando x tiende a cero.

Podemos expresarlo como $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)=\infty$

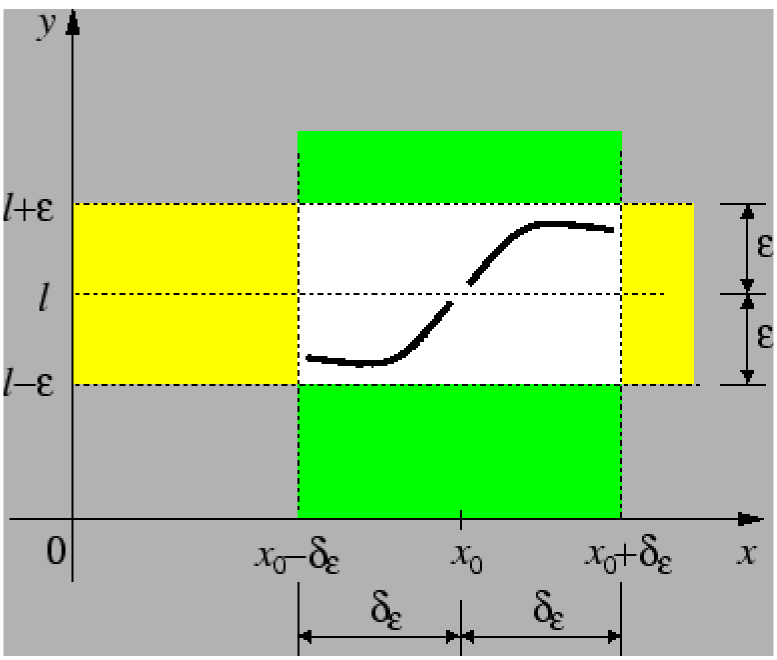
2 Indeterminaciones.

Cuando intentamos resolver un límite sustituyendo, nos pueden aparecer situaciones que son fáciles de resolver $\frac{1}{0}=\infty$, $\frac{1}{\infty}=0$

O expresiones que denominamos indeterminaciones, por ejemplo: $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$,

3 Definición de límite

Vemos la necesidad de una definición más precisa del concepto de límite:



Definición de límite de una función en un punto

Diremos que f(x) tiene límite L en el punto x_0 si

para todo $\varepsilon>0$ $\exists$ $\delta>0$ tal que si $|x-x_0|<\delta$ entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$

(Notas sobre la definición)

Es una definición local (para cada punto), y es una definición dinámica, dado un epsilon tiene que existir un delta, si tomamos otro epsilon tiene que existir otro delta, siguiendo con ese proceso por pequeño que cojamos el epsilon, siempre exista el delta correspondiente.

4 Cálculo de límites de una función en un punto:

Vamos a centrarnos en calcular límites de funciones polinómicas

Calculemos varios límites sobre el siguiente polinomio $f(x)=x^2+2x+3$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2+2x+3)=0+0+3=3$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2+2x+3)=1+2+3=6$$

$\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty}(x^2+2x+3)$, si vamos sustituyendo por números cada vez más grande vemos que el valor de la función también va creciendo rápidamente.

$$f(10)=x^2+2x+3=100+20+3=123$$
$$f(100)=x^2+2x+3=10.000+200+3=10.203$$
$$f(1000)=x^2+2x+3=1.000.000+2.000+3=1.002.003$$
$$f(10.000)=x^2+2x+3=100.000.000+20.000+3=100.020.003$$

Como observamos va creciendo rápidamente, y por tanto, podríamos decir que tiene hacia el infinito. $\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty}(x^2+2x+3)=\infty$

Observa como se comporta comparándolo al tomar solamente la potencia de mayor grado.

$f(10)=x^2+2x+3=123$	$f(10)=x^2=100$
$f(100)=x^2+2x+3=10.203$	$f(100)=x^2=10000$
$f(1000)=x^2+2x+3=1.002.003$	$f(1000)=x^2=1.000.000$
$f(10.000)=x^2+2x+3=100.020.003$	$f(10.000)=x^2=100.000.000$

5 Infinitos equivalentes

$$\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty}(x^2+2x+3)=\lim_{x\to \infty}(x^2)=\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty}(2x^3-x^2+3x-4)=\lim_{x\to \infty}(2x^3)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^4 - x^3 + 3x - 4) = \lim_{x\to\infty}(x^4) = \infty$$

Ejercicio 1: escribe los infinitos equivalentes de los siguientes polinomios

$$\lim_{x\to\infty}(2x^4 + 3x - 4) =$$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3 + 3x^2 - 5) =$$

$$\lim_{x\to\infty}(x^5 - x^4 - 2) =$$

$$\lim_{x\to\infty}(x - 3) =$$

Ejemplos:

Calculo de límites de cocientes de polinomios

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{3x^2 - x + 1} = \frac{1+2-1}{3-1+1} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 + x - 5}{2x^2 - x + 1} = \frac{0+0-5}{0-0+1} = \frac{-5}{1}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{3x^2 - x + 1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ (para los limites de cocientes de polinomios se utilizan los infinitos equivalentes

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{3x^2 - x + 1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{3x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{3} = \frac{0}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2 + x + 4}{2x^3 - 2x + 5} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3 + 2x^2 - 2}{4x^3 - x + 3} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{4x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Ejercicio 2:

Calcula los siguientes límites de polinomios

$$\lim_{x\to\infty}(3x^2 + 2x + 3)$$

$$\lim_{x\to 0}(3x^2 + 2x + 3)$$

$$\lim_{x\to 1}(3x^2 + 2x + 3)$$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3 - x^2 + 3x)$$

$$\lim_{x\to 0}(x^3 - x^2 + 3x)$$
$$\lim_{x\to 1}(x^3 - x^2 + 3x)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3 + x + 4}{2x+5} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3 + 4x}{2x^4 + 5x^2 - 3x + 1} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3 + 4x - 5}{3x^3 + x^2 - 3x + 1} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2 + 4x}{3x^2 - 5x^2 - 3x + 1} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4 + 4x}{3x^2 - 5x^2 - 3x + 1} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2 + 4x}{-5x^2 - 3x + 1} =$$

6 Continuidad de una función en un punto

Si buscamos en el diccionario la palabra continuidad encontramos: cualidad que cumple todo aquello que se extiende sin interrupción
Según el diccionario las vías de tren serian continuas.

Esto esta íntimamente ligado con la idea primitiva de función continua, como aquella que podemos dibujar sin levantar el lápiz del Papel. Pero esta idea no es exactamente la idea de continuidad.

Definición de continuidad 1.

Una función $f(x)$ en un punto x_0, si para todo $\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Definición de continuidad 2.
Una función es continua en un punto si existen los límites laterales de la función en el punto y estos coinciden con el valor de la función en el punto.

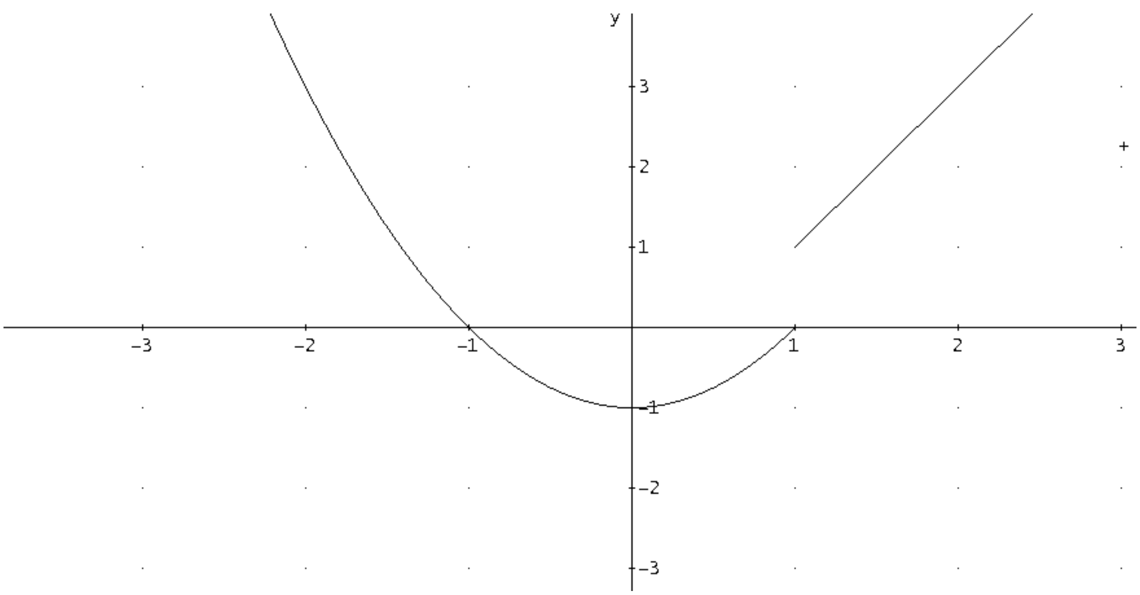
Notas:
Nos asaltan varias dudas o reflexiones sobre esta definición,

1º La continuidad es una propiedad local (continua en un punto) Por tanto podría haber una función que solamente fuera continua en un punto. (Esto no se corresponde con la idea de dibujar sin levantar el lápiz de papel)

2º Se hace necesario utilizar el concepto de límite (aproximación infinita a un punto) Instrumento excesivamente complicado para un concepto que podría ser muy simple si fuera la idea de dibujar sin levantar el lápiz de papel)

7 Cálculo de límites laterales
Idea de límite lateral

Es el mismo concepto de límite pero solamente nos acercamos al punto tomando valores por la derecha o por la izquierda del punto, al que le estamos calculando el límite.

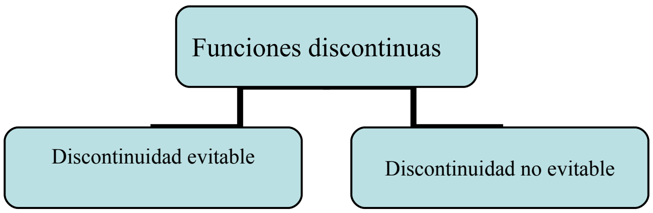


En este caso cuando nos acercamos por la izquierda del punto x=1, vemos que la curva va tomando valores cada vez más cercanos a 0 $\lim_{x \to 1^-}(x^2 - 1) = (1 - 1) = 0$
Si vamos tomando puntos en cambio a las derecha del punto x=1, vemos que la curva va tomando valores cada vez más cercanos a 1 $\lim_{x \to 1^+}(2x - 1) = (2 - 1) = 1$

Claramente no coinciden los limites laterales por lo tanto la función no es continua, en este caso la discontinuidad se llama de salto.

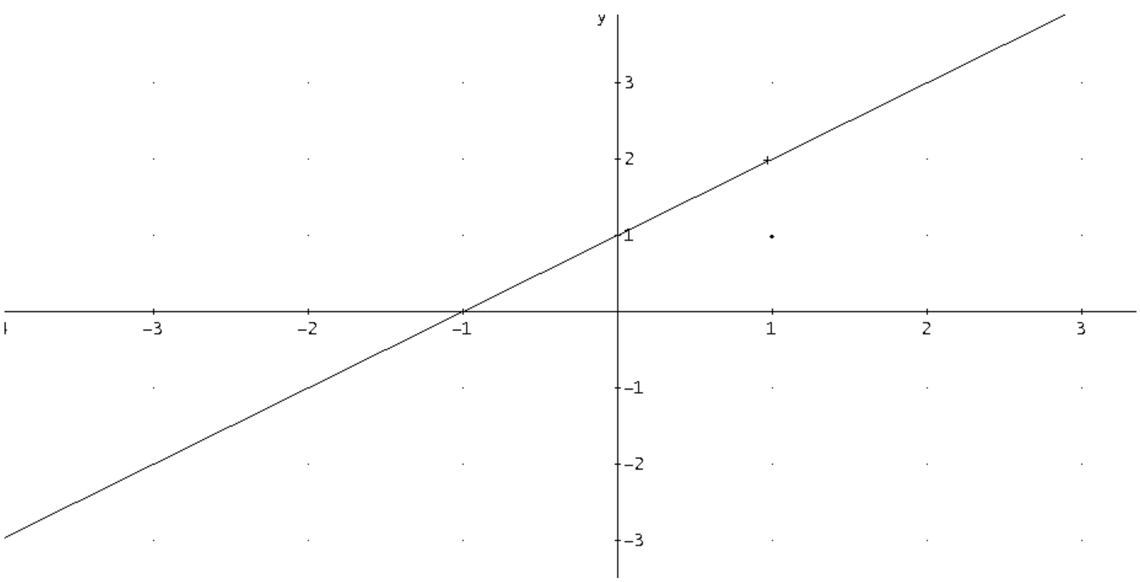
8 Clasificación de discontinuidades

Funciones discontinuas pueden ser evitable o no evitables



Las funciones con discontinuidades evitables son muy fáciles de superar, porque solamente tienen el problema que el valor de la función en el punto x_0 no coincide con el valor del límite.

Ejemplo $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x=1 \end{cases}$



Solamente en el punto 1, se produce un agujero en la recta, porque el valor en el punto 1 es 1, en vez de 2 que sería el valor de los límites laterales

$\lim_{x\to 1^-}(x+1)=1+1=2$ y $\lim_{x\to 1^+}(x+1)=1+1=2 \Rightarrow \lim_{x\to 1}(x+1)=2$

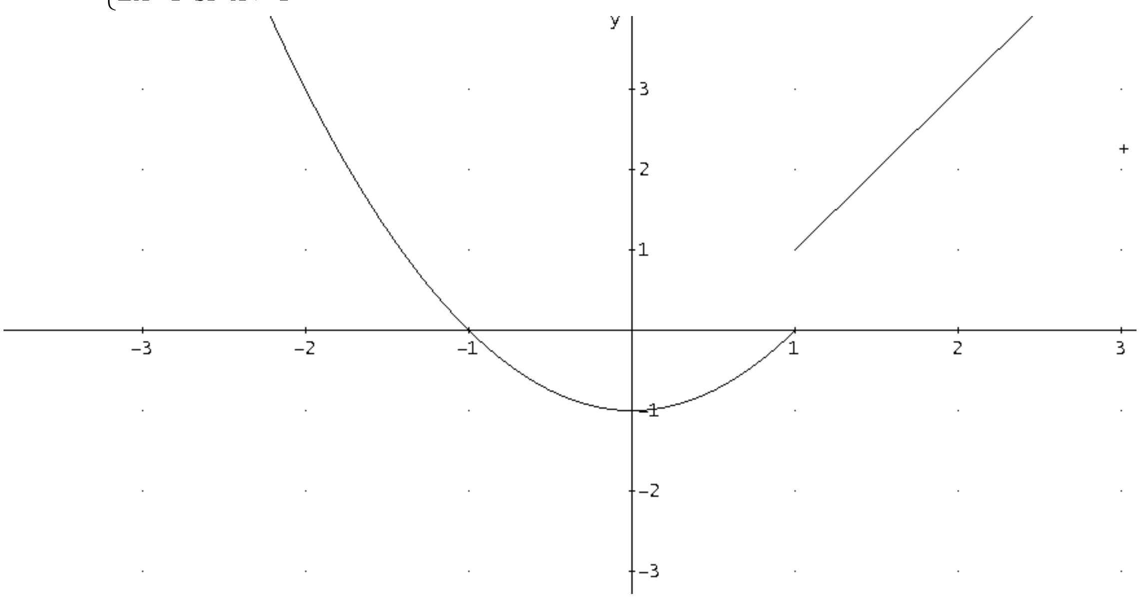
En cambio $f(1)=1$

Tipos de discontinuidades no evitables

3. **De salto finito:** Existen los límites laterales

Ejemplo:

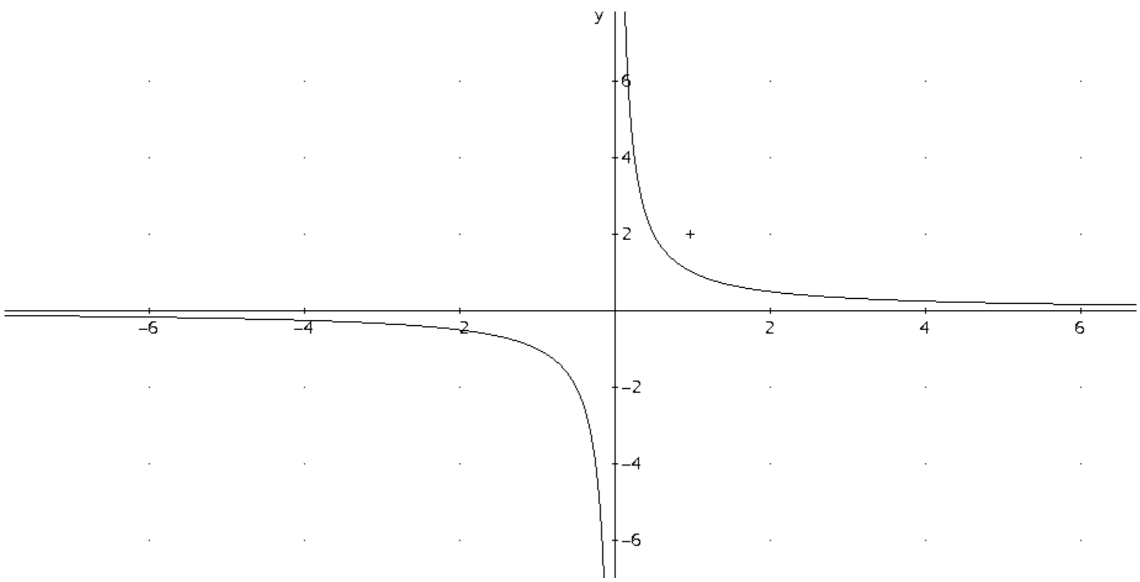
$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 \text{ si } x\le 1 \\ 2x-1 \text{ si } x>1 \end{cases}$$



$\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-1)=1-1=0$ y $\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-1)=2-1=1$ $\Rightarrow$ No existe el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

4. **Discontinuidad salto infinito**
Existen los límites laterales y son $+\infty$ ó $-\infty$.

Ejemplo $f(x) = \dfrac{1}{x}$



Un ejemplo de discontinuidad esencial

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ $\Rightarrow$ No existe el $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

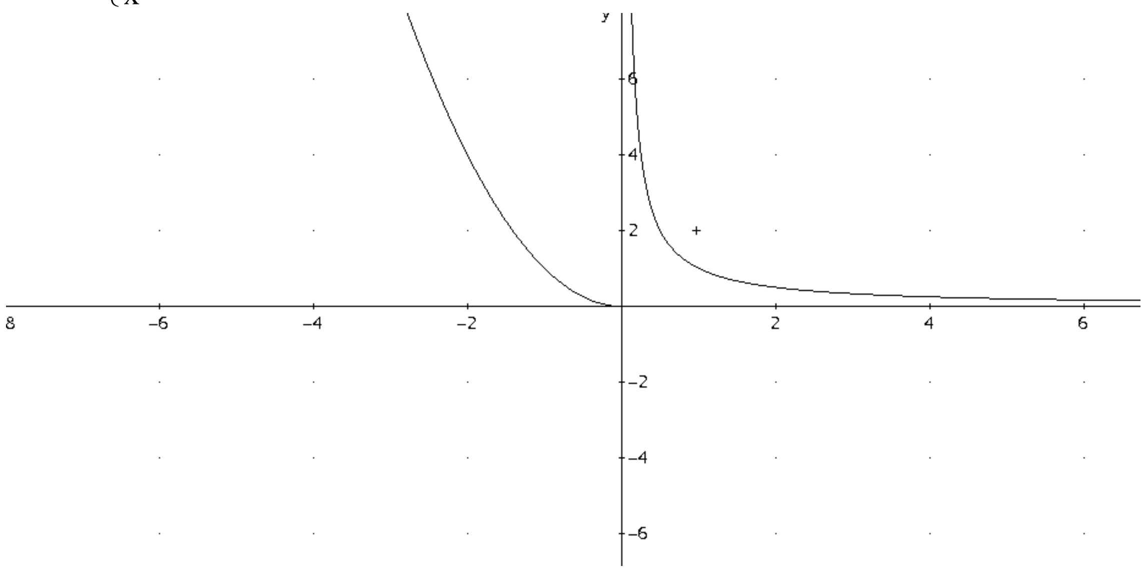
Es decir una rama se va hacia el infinito negativo, cuando nos acercamos a cero tomando valores más pequeños que cero (límite por la izquierda), y la otra rama hacia el infinito positivo cuando nos acercamos a cero con valores más grandes que cero (límite por la derecha).

5. **Discontinuidad Esencial**

Cuando no existe uno de los límites laterales o bien uno es finito y el otro $+\infty$ ó $-\infty$.

Ejemplo

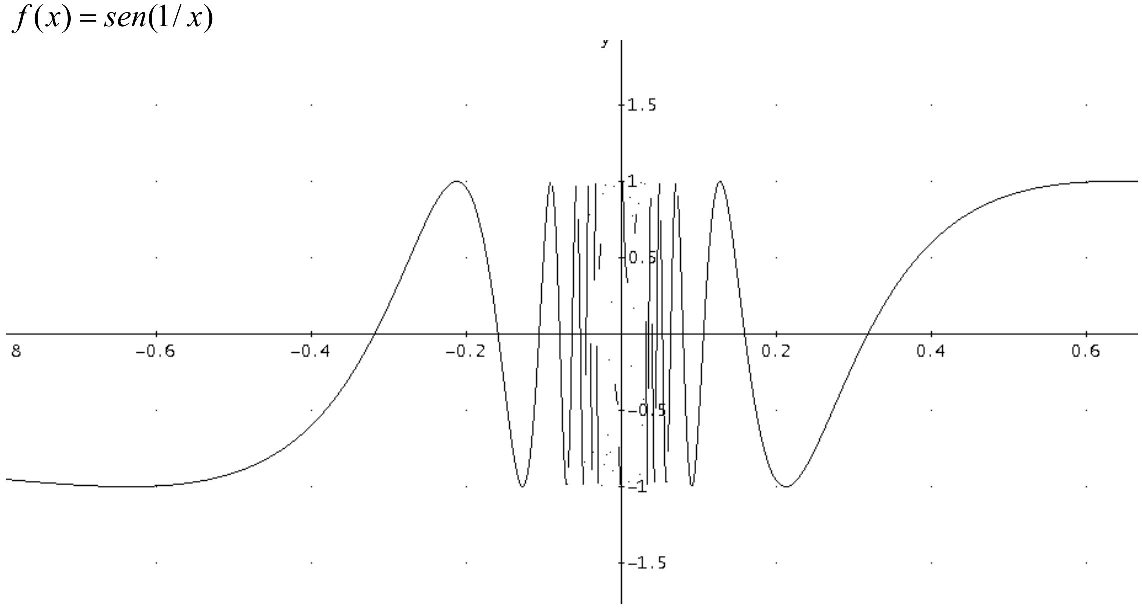
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



$\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ $\Rightarrow$ No existe el $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Ejemplo:

$f(x) = sen(1/x)$



$\lim\limits_{x\to 0^-} sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$ No existe y $\lim\limits_{x\to 0^+} sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$ No existe $\Rightarrow$ No existe el $\lim\limits_{x\to 0} sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$

No existe los límites laterales, y por tanto tampoco puede existir el límite de la función en el punto cero.

5. RESUMEN

Limites

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2-1}{3x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{3x^2}=\frac{0}{3}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+4}{2x^3-2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^3}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2-2}{4x^3-x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{4x^3}=\frac{3}{4}$$

Tipos de discontinuidades

6. Evitables
7. No evitables
1. De salto finito
2. Discontinuidad salto infinito
3. Discontinuidad Esencial

6. BIBLIOGRAFÍA

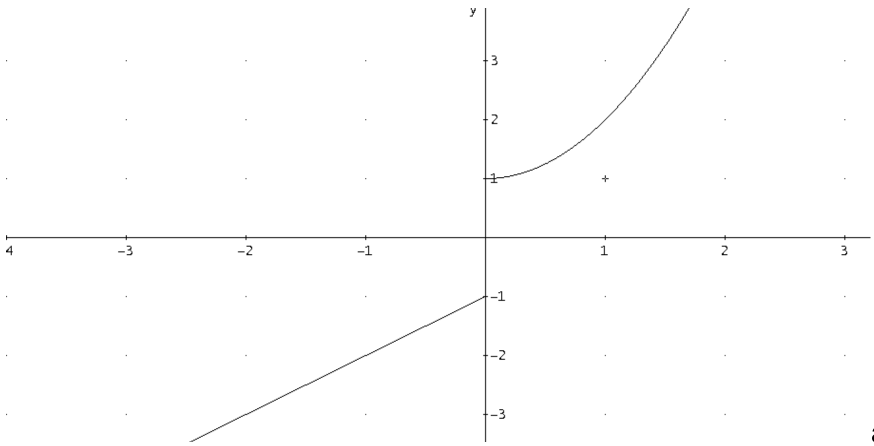
d) Gonzalez, Carlos y otros. Matematicas II. Editorial Editex (1997)

e) http://descartes.cnice.mecd.es

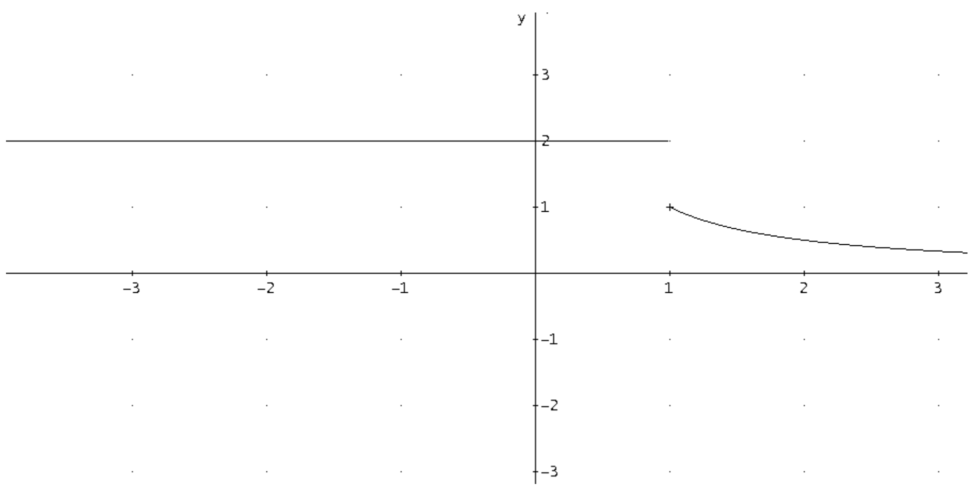
f) www.uoc.edu

7. ACTIVIDADES

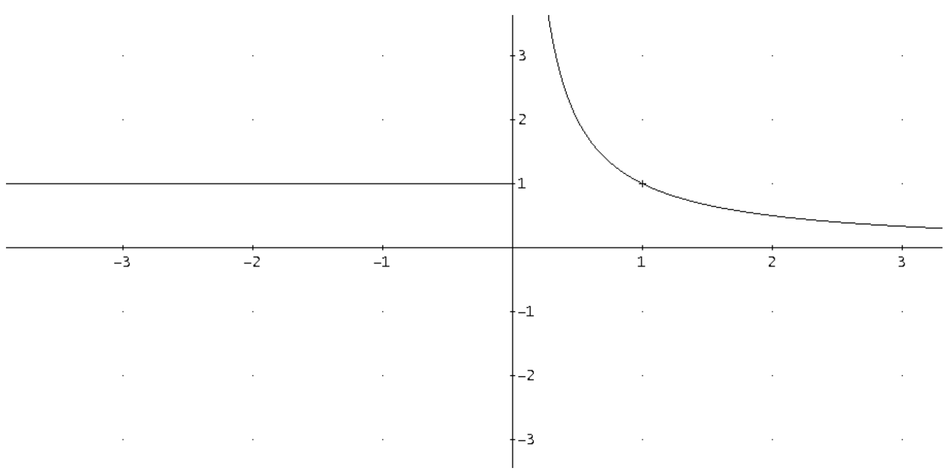
1) De las siguientes funciones, identifica los tipos de discontinuidades



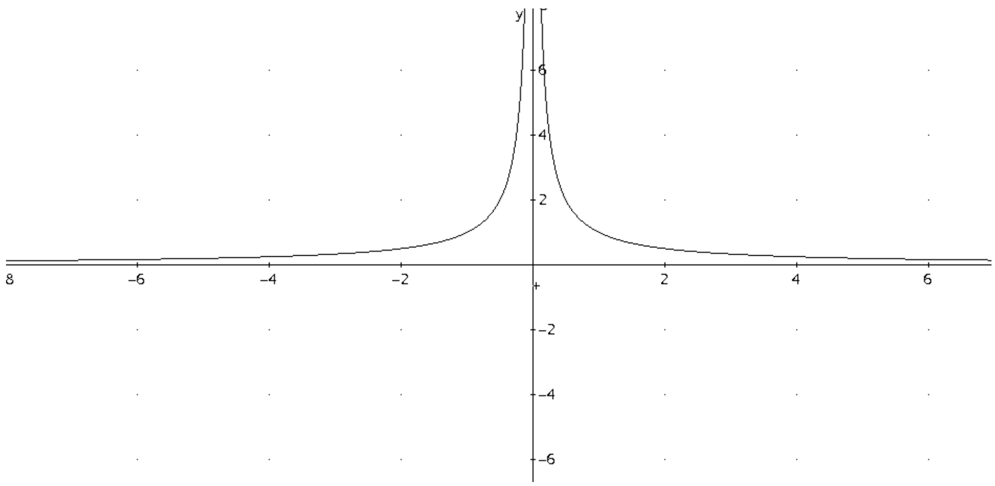
a)



b)



c)



d)

8. EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

1) Calcula los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 - x - 3) =$ b) $\lim\limits_{x\to \infty}(x^2 - x - 3) =$ c) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - x - 3) =$

d) $\lim\limits_{x\to \infty}(-3x^3 - 2x + 3) =$ e) $\lim\limits_{x\to 1}(-3x^3 - 2x + 3) =$ f) $\lim\limits_{x\to 0}(-3x^3 - 2x + 3) =$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 - x - 3}{-3x^3 - 2x + 3} =$ h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 - x - 3}{-3x^3 - 2x + 3} =$ i) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2 - x - 3}{-3x^3 - 2x + 3} =$

j) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4 - 2x^3 - 3x^2}{-3x^3 - 2x + 3} =$ k) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3 - 2x^2 - 3x}{2x^3 + x + 3} =$ l) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3 - 2x + 3}{2x^4 + x^2 + 3} =$

2) Calcula los límites laterales

a) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1-x}$

c) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si x} \le 0 \\ x^2 + 1 & \text{si x} > 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

d) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} \text{ si x} \leq 0 \\ x^2 - x \text{ si x} > 0\end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)$

e) $f(x)=\begin{cases}2x+1 \text{ si x} \leq 0 \\ x^2 + \text{x -1 si x} > 0\end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)$

- **SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS, ACTIVIDADES Y EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN**

SOLUCIONES EJERCICIOS 1 y 2

$$\lim_{x\to\infty}(3x^2+2x+3)=\infty$$
$$\lim_{x\to 0}(3x^2+2x+3)=3$$
$$\lim_{x\to 1}(3x^2+2x+3)=3+2+3=8$$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3-x^2+3x)=\infty$$
$$\lim_{x\to 0}(x^3-x^2+3x)=0$$
$$\lim_{x\to 1}(x^3-x^2+3x)=3$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+4}{2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+4x}{2x^4+5x^2-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{2x^4}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+4x-5}{3x^3+x^2-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{3x^3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x}{3x^2-5x^2-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{-2x^2}=-1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+4x}{3x^2-5x^2-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4}{3x^2}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x}{-5x^2-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{-5x^2}=-\frac{2}{5}$$

SOLUCIONES ACTIVIDADES

1.

a) Discontinuidad no evitable, de salto
b) Discontinuidad no evitable, de salto
c) Discontinuidad esencial
d) Discontinuidad de salto infinito

SOLUCIONES DE EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

1.

a) $\lim_{x\to 0}(x^2 - x - 3) = -3$

b) $\lim_{x\to \infty}(x^2 - x - 3) = \infty$

c) $\lim_{x\to 1}(x^2 - x - 3) = -3$

d) $\lim_{x\to \infty}(-3x^3 - 2x + 3) = -\infty$

e) $\lim_{x\to 1}(-3x^3 - 2x + 3) = -3 - 2 + 3 = -2$

f) $\lim_{x\to 0}(-3x^3 - 2x + 3) = 3$

g) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - x - 3}{-3x^3 - 2x + 3} = \frac{-3}{3} = -1$

h) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2 - x - 3}{-3x^3 - 2x + 3} = \frac{1-1-3}{-3-2+3} = \frac{-3}{3} = -1$

i) $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2 - x - 3}{-3x^3 - 2x + 3} = \lim_{x\to \infty}\frac{x^2}{-3x^3} = 0$

j) $\lim_{x\to \infty}\frac{x^4 - 2x^3 - 3x^2}{-3x^3 - 2x + 3} = \lim_{x\to \infty}\frac{x^4}{-3x^3} = \infty$

k) $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^3 - 2x^2 - 3x}{2x^3 + x + 3} = \lim_{x\to \infty}\frac{3x^3}{2x^3} = \frac{3}{2}$

l) $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^3 - 2x + 3}{2x^4 + x^2 + 3} = \lim_{x\to \infty}\frac{3x^3}{2x^4} = 0$

2.

a) $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

b) $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

c) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x-1) = -1$ $\qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2+1) = 1$

d) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2 - x) = 0$

e) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(2x+1) = 1$ $\qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2 + x - 1) = -1$

UNIDAD DIDÁCTICA 10: Derivadas

1. ÍNDICE

2. INTRODUCCIÓN GENERAL A LA UNIDAD Y ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO

El concepto de derivada de una función en un punto, es un concepto similar al concepto de límite de una función en un punto

El concepto de derivada esta ligado a la imagen de recta tangente, o límite de rectas secantes.

Por ello nos centraremos en presentar el concepto, con su imagen visual, y posteriormente calcular derivadas de funciones.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Concepto de derivada de una función en un punto

Concepto visual (o intuitivo) de derivada de una función en un punto

Calculo de derivadas inmediatas

Calculo de derivada del producto, y del cociente

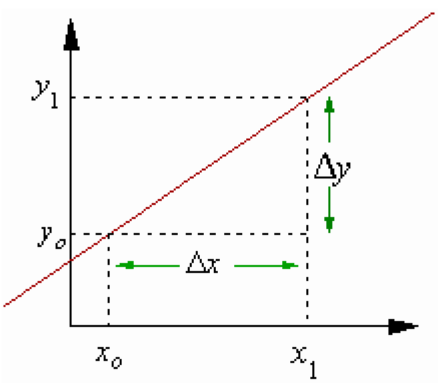
Regla de la cadena

4. DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

1. Visualización del concepto de derivada de la función en un punto

Podemos indicar que *la derivada* no es otra cosa que "*la pendiente de la recta tangente que corta a una función en un punto determinado*".

Idea: El concepto de pendiente de una recta,



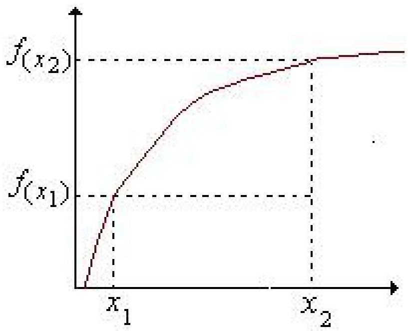
La idea de pendiente entre los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) seria $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, es decir ver el incremento de la y dividido por el incremento de x

Nota: Es habitual encontrar señales en la carretera de pendiente pronunciada

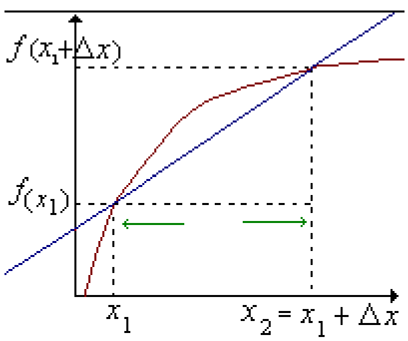
Donde nos indica el tanto por ciento de pendiente con el que nos enfrentamos. Una pendiente de un 12% seria que subimos 12 metros cuando recorremos 100.

2. Concepto de derivada de función en un punto

Tomemos dos puntos cualesquiera de una función; ambos poseen coordenadas, que en este caso llamaremos $(x_1, f(x_1))$ y $\left(x_2, f(x_2)\right)$

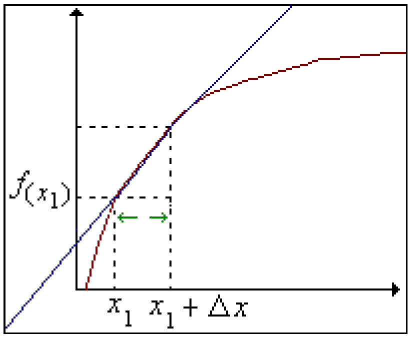


Podemos calcula la pendiente entre los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $\left(x_2, f(x_2)\right)$

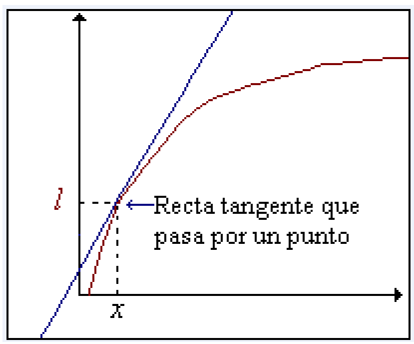


Tendríamos que la pendiente seria $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{x_1 - x_0}$

A medida que x_2 va tomando valores cada vez más cercanos a x_1, lo mismo ocurre con $f(x_2)$ que se va acercando a $f(x_1)$.



El proceso acerca a la recta, que pasa por ambos puntos, a la posición de la recta tangente (corta en un solo punto).



El proceso de llegar a la recta tangente a través de ir acercando las rectas secantes, es un proceso de cálculo de un límite de pendientes

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$ (definición de derivada en un punto)

Definición

Diremos que una función $f(x)$ es derivable en el punto x_0 si existe

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

3. Calculo de derivadas

1La derivada de una constante es cero.

$f(x) = 2$ $\qquad\qquad f'(x) = 0$

2La derivada de una recta es una constante.

Claramente la recta secante de una recta es ella misma, por mucho que nos acerquemos al punto siempre tenemos la misma pendiente, que coincidirá con la pendiente de la recta

Ejemplo
$f(x) = x + 2 \qquad f'(x) = 1$
$f(x) = 3x + 2 \qquad f'(x) = 3$

3Ejemplo: $f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x$
En general $f(x) = x^n \qquad f(x) = nx^{n-1}$

Ejercicios: $f(x) = 3x^2$, $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - x$, $f(x) = -2x^3 + x - 7$

Resolución de los ejercicios
$f(x) = 3x^2 \qquad f'(x) = 6x$
$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - x \qquad f'(x) = 12x^2 + 4x - 1$
$f(x) = -2x^3 + x - 7 \qquad f'(x) = -6x^2 + 1$

4. Tabla de derivadas inmediatas

Ejemplo		**En general**	
$f(x) = 2$	$f'(x) = 0$	$f(x) = K$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$f(x) = x^n$	$f(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$f'(x) = -nx^{-n+1}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$		
$f(x) = sen(x)$	$f'(x) = \cos(x)$		
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -sen(x)$		
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$		

5. Operaciones con derivadas

4Derivada de una constante por una función

$g(x) = Kf(x) \qquad g'(x) = Kf'(x)$

Ejemplo $g(x) = 77sen(x)$ $\qquad g(x) = 77\cos(x)$

5Derivada de la suma de funciones

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Ejemplo $f(x) = (sen(x) + x^3)$ $\qquad f'(x) = \cos(x) + 3x^2$

6Derivada del producto de funciones

$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(La derivada del primero por el segundo sin derivar mas el primero sin derivar por la derivada del segundo)

Ejemplo $f(x) = (sen(x)x^3)$ $\qquad f'(x) = \cos(x)x^3 + sen(x)3x^2$

7Derivada del cociente de funciones

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

(La derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, todo dividido por el denominador al cuadrado)

Ejemplo $f(x) = \dfrac{x^3}{sen(x)}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{3x^2sen(x) - x^3\cos(x)}{sen^2(x)}$

6 Regla de la cadena

$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Ejemplo $f(x) = sen(x^3)$ $\qquad f'(x) = \cos(x^3)3x^2$

7. Ejercicios

1) $f(x) = 4x^3$ 2) $f(x) = \dfrac{sen(x)}{4x^3}$ 3) $f(x) = e^x\cos(x)$ 4) $f(x) = 3$

5) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ 7) $f(x) = e^{4x}$ 8) $f(x) = e^{4x}sen(x)$

9) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ 10) $f(x) = e^{sen(x)}$ 11) $f(x) = \dfrac{sen(x)}{\cos(x)}$ 12) $f(x) = tg(x)$

13) $f(x)=\frac{sen(x)}{x^2}$ 14) $f(x)=3+sen(x)$ 15) $f(x)=\frac{sen(x)}{-x}$

16) $f(x)=\sqrt{x}$ 17) $f(x)=\sqrt{x^3}$ 18) $f(x)=-\cos(x)$

5. BIBLIOGRAFÍA

12Gonzalez, Carlos y otros. Matemáticas II. Editorial Editex (1997)

13http://descartes.cnice.mecd.es

14www.uoc.edu

6. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

Nos centraremos en el cálculo de derivadas

1) $f(x)=7$ 2) $f(x)=7+x$ 3) $f(x)=7x$ 4) $f(x)=\frac{7x}{sen(x)}$

5) $f(x)=sen(7x^2)$ 6) $f(x)=e^{sen(x)}$ 7) $f(x)=sen(x\cos(x))$

8) $f(x)=\frac{1}{-x}$ 9) $f(x)=sen(1/x)$ 10) $f(x)=\sqrt{sen(x^2)}$

7. SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS

Soluciones de los ejercicios

1) $f'(x)=12x^2$

2) $f'(x)=\frac{\cos(x)4x^3-sen(x)12x^2}{(4x^3)^2}$

3) $f'(x)=e^x\cos(x)+e^x(-sen(x))$

4) $f'(x)=0$

5) $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$

6) $f'(x)=-2x^{-3}$

7) $f'(x)=e^{4x}4$

8) $f'(x)=e^{4x}4sen(x)+e^{4x}\cos(x)$

9) $f'(x)=\frac{e^x x-e^x}{x^2}$

10) $f'(x) = e^{sen(x)} \cos(x)$

11) $f'(x) = \dfrac{\cos(x)\cos(x) - sen(x)(-sen(x))}{\cos^2(x)} = \dfrac{\cos^2(x) + sen^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

12) $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

13) $f'(x) = \dfrac{\cos(x)x^2 - sen(x)2x}{x^2}$

14) $f'(x) = \cos(x)$

15) $f'(x) = \dfrac{\cos(x)(-x) - sen(x)(-1)}{(-x)^2} = \dfrac{-x\cos(x) + sen(x)}{x^2}$

16) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

17) $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

18) $f'(x) = sen(x)$

<u>Soluciones de los EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN</u>

1) $f'(x) = 0$

2) $f'(x) = 1$

3) $f'(x) = 7$

4) $f'(x) = \dfrac{7sen(x) - 7x\cos(x)}{sen^2(x)}$

5) $f'(x) = \cos(7x^2)14x$

6) $f'(x) = e^{sen(x)} \cos(x)$

7) $f'(x) = \cos\left(x\cos(x)\right)\left(1\cos(x) + x(-sen(x)\right)$

8) $f'(x) = x^{-2}$

9) $f'(x) = \cos(1/x)\dfrac{-1}{x^2}$

10) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{sen(x^2)}}\cos(x^2)2x$

UNIDAD DIDÁCTICA 11: INTEGRACIÓN

1. ÍNDICE

2. INTRODUCCIÓN GENERAL A LA UNIDAD Y ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO

En este tema vamos a estudiar la integrales de funciones de una variable, para algunos alumnos es un tema traumático. Pero nosotros nos vamos a centrar en el estudio de integrales inmediatas o casi inmediatas.

Por lo que sabiendo hacer derivadas podremos realizar las integrales propuestas con mucha facilidad.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Saber realizar integrales inmediatas

Saber realizar integrales de polinomios

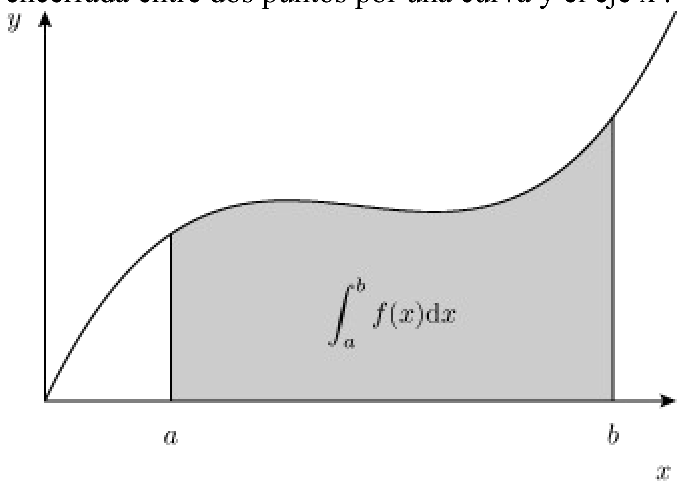
Saber realizar integrales de suma de funciones que se integran de forma inmediata

4. DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

1 Introducción

Tras haber estudiado la derivada podemos ver la integración como la operación inversa a la derivada de una función.

La idea intuitiva que nos introduce la derivada, es la aplicación en el cálculo del área encerrada entre dos puntos por una curva y el eje x .



2 Primitiva

2.1 Definición de primitiva

Se llama primitiva F(X) de una función f(x), a una función F(X) que cumple que $F'(x) = f(x)$

2.2 Ejemplo

$F(x) = x^2$ es primitiva de $f(x) = 2x$

2.3 Ejercicio

Encuentra de quienes son primitivas las siguientes funciones

$F(x) = sen(x)$ $\quad f(x) =$

$F(x) = \cos(x)$ $\quad f(x) =$

$F(x) = x^2$ $\quad f(x) =$

$F(x) = x^2 + 7$ $\quad f(x) =$

Nota: Habrás podido observar que una función puede tener diferentes primitivas. Cada primitiva de una función f(x), sigue siendo una primitiva si se le suma una constante

Ejemplo $F(x) = x^3$ $\quad F(x) = x^3 + 7$ $\quad F(x) = x^3 + 77$, son primitivas de la función $f(x) = 3x^2$

2.4 Ejercicio
De las siguientes funciones encuentra una de sus primitivas (recuerda que cualquier primitiva mas una constante es también primitiva)

$f(x) = 3x^2$ $\quad$ $F(x) =$
$f(x) = \cos(x)$ $\quad$ $F(x) =$
$f(x) = 2x$ $\quad$ $F(x) =$
$f(x) = -\cos(x)$ $\quad$ $F(x) =$
$f(x) = sen(x)$ $\quad$ $F(x) =$

3 Definición de integral de una función
Si conocemos una primitiva de una función, el calculo de su integral es inmediato

(Sea F(x) primitiva de f(x))

$\int f(x)dx = F(x) + k$ (el k representa una constante)

Ejemplo
$\int 3x^2 dx = x^3 + k$

3.1 Ejercicio
Realiza las siguientes integrales
$\int \cos x dx =$
$\int 2x dx =$
$\int (-\cos x) dx =$
$\int (senx) dx =$
$\int x^2 dx =$

3.2 Propiedad $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n} + k$

Ejercicios
$\int x^2 dx =$
$\int x dx =$
$\int x^3 dx =$
$\int 3x^4 dx =$

4 Propiedades de linealidad

$$\int \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

4.1 Ejemplo

$$\int (x^2+2x)dx = \int x^2dx + \int 2xdx = \frac{x^3}{3} + x^2 + k$$

$$\int 7x^3dx = 7\int x^3dx = 7\frac{x^4}{3} = \frac{7}{3}x^4$$

Nota: La única manera de aprender es haciendo muchas integrales

4.2 Ejercicios: integrales inmediatas

$$\int x^2dx =$$

$$\int \sqrt{x}dx =$$

$$\int \frac{1}{x}dx =$$

$$\int sen(x)dx =$$

$$\int \cos(x)dx =$$

$$\int e^xdx =$$

5. BIBLIOGRAFÍA

1Bujalance y otros. Matemáticas Especiales. 2ª Edición. Editorial Sanz y Torres (1998)

2http://descartes.cnice.mecd.es

3www.uoc.edu

6. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

Ejercicios

$$\int \left(x^2-2x+sen(x)\right)dx$$

$$\int \frac{1}{x^3}dx$$

$$\int (4x^3+3x^2-x+5)dx =$$

$$\int 77sen(x)dx =$$

$$\int 10e^xdx =$$

$$\int (5x^3+4x)dx =$$

7 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS

2.4 Ejercicio

$f(x) = 3x^2$ $\quad$ $F(x) = x^3$

$f(x) = \cos(x)$ $\quad$ $F(x) = sen(x)$

$f(x) = 2x$ $\quad$ $F(x) = x^2$

$f(x) = -\cos(x)$ $\quad$ $F(x) = -sen(x)$

$f(x) = sen(x)$ $\quad$ $F(x) = -\cos(x)$

3.1 Ejercicio

$$\int \cos x dx = sen(x) + k$$

$$\int 2x dx = x^2 + k$$

$$\int (-\cos x) dx = (-sen(x)) + k$$

$$\int (senx) dx = (-\cos(x)) + k$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + k$$

Ejercicio (propiedad 3.2)

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + k$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + k$$

$$\int 3x^4 dx = 3\frac{x^5}{5} + k$$

4.2 Ejercicios (integrales inmediatas)

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{3/2} + k = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + k$$

$$\int sen(x) dx = -\cos(x) + k$$

$$\int \cos(x) dx = sen(x) + k$$

$$\int e^x dx = e^x + k$$

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

$$\int\left(x^2 - 2x + sen(x)\right)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - \cos(x) + k$$

$$\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} + k = \frac{1}{-2x^2} + k$$

$$\int (4x^3 + 3x^2 - x + 5)dx = 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x + k = x^4 + x^3 - \frac{x^2}{2} + 5x + k$$

$$\int 77 sen(x)dx = -77\cos(x) + k$$

$$\int 10e^x dx = 10e^x + k$$

$$\int (5x^3 + 4x)dx = 5\frac{x^4}{4} + 4x^2 + k = \frac{5}{4}x^4 + 4x^2 + k$$

UNIDAD DIDÁCTICA 12:

Estadística Descriptiva

1. ÍNDICE

2. INTRODUCCIÓN GENERAL A LA UNIDAD Y ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO

En algunos casos queremos estudiar un fenómeno, o cualidad de unos individuos, para ello debemos de recoger unos datos, normalmente una muestra que es una parte de la población a estudiar. Aun estudiando solamente una muestra de una población disponemos de demasiados datos, por lo que tenemos que encostrar una forma de resumir esta información. En este tema resumiremos los datos dados de una muestra, gracias a la media y la varianza.

Al final del tema debería de ser capaz de identificar la población, los individuos y la muestra, además de saber calcular la media y la varianza de una muestra.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Concepto de individuo, población, variable aleatoria.

Muestra

Media muestral

Varianza

4. DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

1 Introducción Estadística Descriptiva
La estadística es una parte de la matemática aplicada y tiene como función ordenar, analizar y decidir sobre la estructura matemática asociada a masas de datos numéricos, obtenidos de la observación de fenómenos (físicos, económicos. psicológicos, sociológicos, etc.)

La tarea de describir y procesar de modo adecuado la masa de datos numéricos, proveniente de observaciones y experimentos, constituye el objetivo de la estadística descriptiva, que es la rama de la estadística que vamos a ver ene este tema.
La estadística descriptiva trata de determinar ciertos parámetros estadísticos, parámetros que nos dan información sobre los rasgos de un elemento tipo de colectivo (o población) estudiado, así como otros parámetros que miden la desviación respecto de este elemento tipo.

Resumen:
Es decir disponemos de muchos datos y tenemos que inventar un método para poder entender un conjunto de datos, el método es resumir esa información en unos parámetros, parámetros que llamamos parámetros estadísticos.

2 Parámetros estadísticos.

Una población estadística es un conjunto de individuos, objetos, etc.; sobre los que recae observaciones de un número finito de características.

Veamos cual seria la población y cada uno de los individuos de los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1
El peso de los alumnos de una clase
Los individuos sería: cada uno de los alumnos
La población seria: los alumnos que hay en una clase.
Cada fenómeno (o lo que llamamos variable estadística) es el peso del alumno.

Ejemplo 2
Si le hacemos varios análisis de colesterol a un solo alumno de forma seguida
Individuos:
Población:
Fenómeno que estamos midiendo:

Ejemplo 3
Si hacemos unos análisis en un huerto de limoneros, para saber la cantidad de potasio en hoja, para hacer el experimento cojemos 10 hojas de cada árbol.
Individuo:
Población:
Fenómeno que estamos midiendo:

Llamaremos variable estadística al conjunto de valores que adopta una cualidad o propiedad de los elementos de la población estudiada.

2.1 Media de la población

Supongamos que tenemos diez alumnos en clase, los pesamos y obtenemos los siguientes datos

Alumno	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Peso	70	54	57	63	56	78	86	54	69	71

La media de esta población

$$media = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{70+54+57+63+56+78+86+54+69+71}{10} = \frac{658}{10} = 6'58$$

¿Pero como calculamos el peso medio de todos los alumnos de la universidad?

Tenemos la posibilidad de pesar a todos los alumnos y calcular la media del peso de los alumnos, pero eso es muy costoso

Pero podríamos coger solamente unos cuantos, no podremos calcular la media real, pero tendríamos una media aproximada.

2.2 Concepto de muestra

Se entenderá por <u>muestra</u> una colección finita de elementos de la población estudiada

Entonces podemos obtener la media muestral. (la media de 10 alumnos elegido entre los miles de alumnos de la universidad)

Alumno	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Peso	70	54	57	63	56	78	86	54	69	71

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{70+54+57+63+56+78+86+54+69+71}{10} = \frac{658}{10} = 6'58$$

Esta media muestral no es la media de la población, pero el parámetro estadístico que es la media muestral se acerca al valor de la media poblacional a medida que el número de alumnos en la muestra que cojamos sea más representativo (en principio más grande).
Supongamos que hacemos lo mismo para las notas de los alumnos, tomamos las notas de 10 alumnos.

Alumno	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Nota	7	5	5	6	7	7	4	8	8	8

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{7+5+5+6+7+7+4+8+8+8}{10} = \frac{65}{10} = 6'5$$

Se llama *frecuencia absoluta* n_i de x_i al número de veces que aparece repetido dicho valor en los elementos de la muestra.

En este caso tendremos los valores discretos de las notas, y los valores de las frecuencias absolutos.

x_i	4	5	6	7	8
n_i	1	2	1	3	3

Podemos entonces calcular la media multiplicando los valores por sus frecuencias absolutas y dividiendo por el número de alumnos.

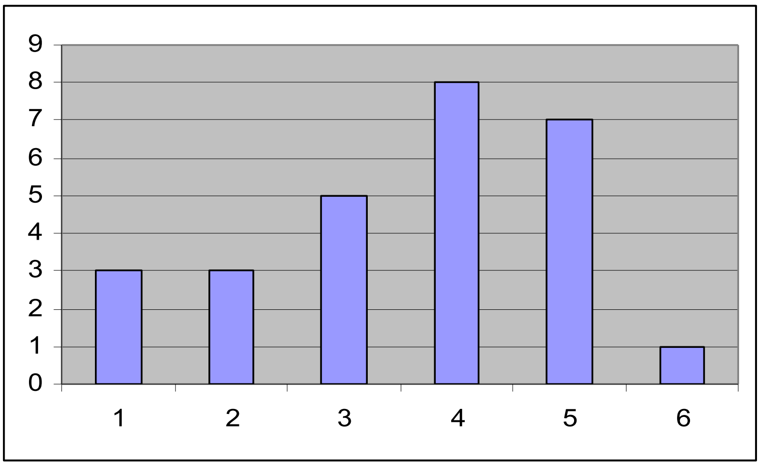
$$\bar{x} == \frac{\sum x_i n_i}{10} = \frac{4*1+5*2+6*1+7*3+8*3}{10} = \frac{65}{10} = 6'5$$

2.3 Varianza de la muestra

1º Ejemplo

Puede haber dos poblaciones que tengan la misma media , pero que sean muy diferentes.

Valores	1	2	3	4	5	6
Frecuencias	3	3	5	8	7	1

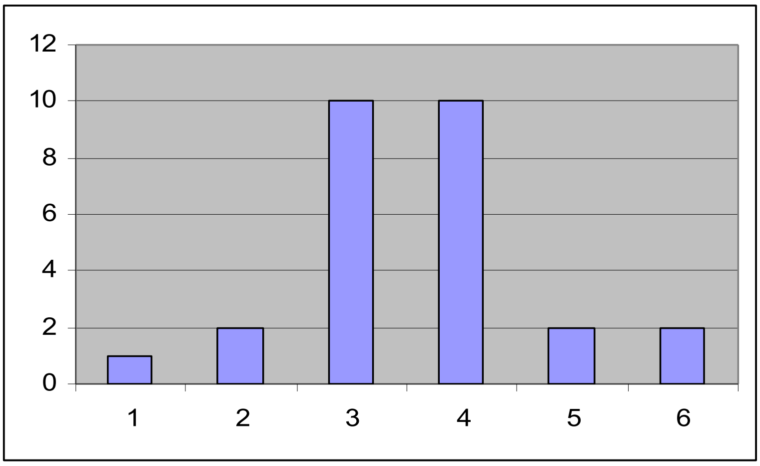


$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{27} = \frac{97}{27} = 3'59$$

2º Ejemplo

Valores	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	1	2	10	10	2	2

s						



$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{27} = \frac{97}{27} = 3'59$$

Los dos muestreos tienen la misma media pero en cambio tienen formas muy diferentes en el segundo se concentran todos en los valores 3 y 4

La concentración se mide con la varianza. Y se calcula de la siguiente forma:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{m}$$ en el caso de disponer de frecuencias absolutas $$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1} (x_i - \bar{x})^2 n_i}{m}$$

Calculémoslo para los dos ejemplos anteriores

1º Ejemplo

Valores	1	2	3	4	5	6		
Frecuencias	3	3	5	8	7	1	27	
$n_i x_i$	3	6	15	32	35	6	97	
							3,59	**media**
$(x_i - \bar{x})$	-2,59	-1,59	-0,59	0,41	1,41	2,41		
$(x_i - \bar{x})^2$	6,72	2,54	0,35	0,17	1,98	5,80		
$(x_i - \bar{x})^2 n_i$	20,16	7,61	1,76	1,33	13,87	5,80	50,52	
							1,87	**Varianza**

2º Ejemplo

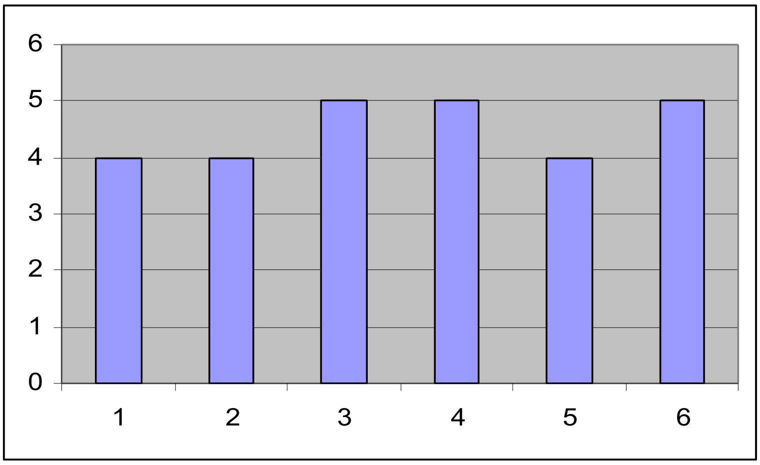
Ejemplo 2

Valores	1	2	3	4	5	6	
Frecuencias	1	2	10	10	2	2	27

$n_i x_i$	1	4	30	40	10	12	97	
							3,59	**media**
$(x_i - \bar{x})$	-2,59	-1,59	-0,59	0,41	1,41	2,41		
$(x_i - \bar{x})^2$	6,72	2,54	0,35	0,17	1,98	5,80		
$(x_i - \bar{x})^2 n_i$	6,72	5,07	3,51	1,66	3,96	11,59	32,52	
							1,20	**Varianza**

Tercer ejemplo

Valores	1	2	3	4	5	6
Frecuencias	4	4	5	5	4	5



Ejemplo 3

Valores	1	2	3	4	5	6		
Frecuencias	4	4	5	5	4	5	27	
$n_i x_i$	4	8	15	20	20	30	97	
							3,59	**media**
$(x_i - \bar{x})$	-2,59	-1,59	-0,59	0,41	1,41	2,41		
$(x_i - \bar{x})^2$	6,72	2,54	0,35	0,17	1,98	5,80		
$(x_i - \bar{x})^2 n_i$	26,89	10,15	1,76	0,83	7,92	28,98	76,52	
							2,83	**Varianza**

Podemos observar como a medida que se concentran los datos la varianza es menor. La varianza nos da como de puntiaguda es la representación grafica.

5. BIBLIOGRAFÍA

- Bujalance y otros. Matemáticas Especiales. 2ª Edición. Editorial Sanz y Torres (1998)
- http://descartes.cnice.mecd.es

- www.uoc.edu

6. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

Nos centraremos en hacer ejercicios de cálculo de media y varianza

1 Primer ejercicio sin frecuencias.

Tenemos los siguientes pesos de una muestra de alumnos de una clase

65	67	89	56	45	67	56	57	66	45

Calcula la media muestral y la varianza.

2 Segundo ejercicio sin frecuencias.

Tenemos los siguientes pesos de una muestra de alumnos de una clase

42	93	98	40	51	66	100	98	65	45

Calcula la media muestral y la varianza.

3 Ejercicio

De las muestras de los ejercicios 1 y 2, ¿Cuál de las dos tiene mayor varianza?.

4 Primer ejercicio con frecuencias.

Tenemos la valoración de un líder político H, hemos preguntado a 100 personas y la valoración obtenida del 1 al 4 es la siguiente.

Valoración	1	2	3	4
Frecuencia	25	30	40	5

Calcula la media muestral y la varianza.

5 Segundo ejercicio con frecuencias

Tenemos la valoración de otro líder político J, hemos preguntado a 100 personas y la valoración obtenida del 1 al 4 es la siguiente.

Valoración	1	2	3	4
Frecuencia	55	30	10	5

Calcula la media muestral y la varianza.

6 Con los resultados obtenidos en los ejercicios 4 y 5, ¿cuál es el político más valorado?.

UNIDAD DIDÁCTICA 13: Nociones elementales de probabilidad

1. ÍNDICE

2. INTRODUCCIÓN GENERAL A LA UNIDAD Y ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO

El estudio del azar es muy interesante, queremos saber las probabilidades que hay de que ocurra un suceso. Antes de adentraenos en el cálculo debemos de entender que es un suceso, un suceso equiprobable, suceso seguro, suceso imposible.

Tras esto la dificultad se encuentra en identificar claramente los sucesos, y el número de casos favorable y de casos posible.

En este tema el cálculo no tiene ninguna dificultad.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Concepto de :

suceso

suceso equiprobable

suceso seguro e imposible

suceso incompatible y suceso compatible

Calculo de probabilidades de juegos de azar.

4. DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

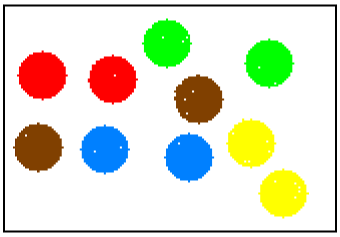
1 Sucesos equiprobables

Supongamos que tenemos un dado  cual es la probabilidad de sacar un 1,
Todos sabemos que tiene la misma probabilidad de salir que un 6.

¿Quiere decir esto que si tiramos unas pocas veces un dado nos salen tantos 1 como 6?.
NO

Si tiramos muchísimas veces un dado, el número de veces que saldría cada número tendería a aproximarse.

2 La regla de Laplace



Tenemos en una urna 10 bolas del mismo tamaño pero de distintos colores. (La urna tiene 2 bolas de cada color). Se realiza el experimento de sacar una bola al azar (sin mirar).

Considera los siguientes sucesos:
a) Sale bola roja
b) Sale bola verde
c) Sale bola roja o marrón
d) Sale bola azul o verde
e) Sale bola amarilla

¿Cuáles de estos sucesos son equiprobables?

Supón que realizas la experiencia de sacar una bola al azar un millón de veces.
-¿Cuántas veces crees que saldrá, aproximadamente, cada tipo de bola?
-¿Qué fracción del total representa?

Si estás considerando el suceso "**sacar bola roja**", al número de bolas rojas que hay en la urna se le llama "**número de casos favorables**" (favorables al suceso), y al número **total** de bolas que hay en la bolsa se le llama "**número de casos posibles**"

Se llama **PROBABILIDAD TEÓRICA** de un **suceso A**, y se escribe **p(A)**, al cociente:	$p(A)=\dfrac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$
Esta forma de calcular la probabilidad de un suceso se conoce con el nombre de **REGLA DE LAPLACE**	Para que esta regla se pueda aplicar a un suceso, todos los **casos posibles** deben ser **equiprobables**.

Por tanto la **probabilidad de sacar bola roja** en la urna anterior será:

$$p(\text{bola roja})=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}=0.2$$

Y la **probabilidad de sacar bola verde** será: $p(\text{bola verde}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0.2$

Análogamente **p(bola amarilla) = p(bola azul) = p(bola marrón) = 0.2**

-¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bola sea azul o verde? (Mira primero cuántos son ahora los casos favorables sacando de la urna las bolas que nos interesa)

-¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bola sea roja, amarilla o marrón? (Mira primero cuántos son ahora los casos favorables sacando de la urna las bolas que nos interesa)

Ejercicio 1
¿Cuál es la probabilidad de que ocurran los siguientes sucesos, al lanzar un dado:

a) Salir el número 3
b) Salir un número par
c) Salir un número mayor que 1
d) Salir el número 8
e) Salir un número menor que 5

3 Suceso seguro y suceso imposible

Habrás observado en el ejercicio anterior que la respuesta a la pregunta d) es cero. O sea, la probabilidad de que al lanzar un dado de cuatro caras salga el número 8 es cero, pues hay cero casos favorables. Se dice que es un **suceso imposible** y su **probabilidad es cero**.

Sin embargo la respuesta al apartado e) es uno, pues todos los casos posibles son favorables, todos los números de un dado de cuatro caras son menores que 5. Se dice que es un **suceso seguro** y su **probabilidad es uno**.

Propiedad

También habrás observado que las demás **probabilidades** que has calculado están **entre cero** y **uno**.

Ejercicio 2

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado salga?

a) 3

b) 5

c) 7

d) número par

e) Múltiplo de 3

f) Numero distinto de cero

4 Sucesos compatibles e incompatibles

En el experimento **SACAR UNA CARTA** de una baraja española, (baraja de 40 cartas)

a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga:
- El as de oros - Un caballo
- El rey de copas - Un basto?

Si realizas **mil veces** este experimento (sacar una carta), ¿cuántas veces esperas que se dé cada uno de los sucesos anteriores?

b) Si la carta es el **seis de espadas**, <u>han ocurrido</u> también otros muchos sucesos como "salir una espada", "salir un seis", "salir un número menor que 7", etc.
En cambio <u>no habrán ocurrido</u> otros muchos sucesos como "salir el seis de oros", "salir el siete de espadas", "salir una copa", etc.

HAY MUCHOS SUCESOS QUE PUEDEN OCURRIR A LA VEZ Y OTROS QUE NO

Entre los sucesos del apartado **a)**, ¿hay algunos que pueden ocurrir a la vez?

c) Fíjate en los siguientes sucesos:
- **Salir una figura** (sota, caballo o rey)
- **Salir un oro**

Si sacas una carta mil veces ¿Cuántas veces esperas que se den los dos sucesos a la vez?

Compara los pares de sucesos del apartado a), o sea:
-Salir el as de oros y salir el rey de copas
-Salir un caballo y salir un basto
Y deduce si son o no compatibles.

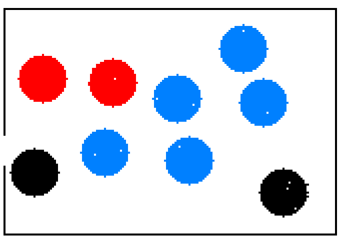
Definiciones:

Dos sucesos de un experimento aleatorio que **pueden ocurrir a la vez** se llaman **COMPATIBLES**

Si **no pueden ocurrir a la vez** se llaman **INCOMPATIBLES**

5 Probabilidad de que ocurra A o B

Una urna contiene **2 bolas rojas**, **3 bolas negras y 5 bolas azules**, todas del mismo tamaño.
Consideremos el experimento de **extraer una bola** de la urna sin mirar.



a) Calcula la probabilidad de que ocurra cada uno de los siguientes sucesos:

-Calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:
-Salir una bola que **no sea negra**
-Salir una bola que **no sea roja**

b) ¿Qué relación hay entre las tres probabilidades calculadas en el apartado anterior?

c) Imagínate ahora una urna que contiene bolas del mismo tamaño y de distinto color: rojo, negro y blanco.
No sabes cuántas hay de cada color, ni cuántas hay en total.
Pero alguien te informa de las siguientes probabilidades:
p(salir bola **roja**)=**1/2** p(salir bola **negra**)=**1/3** p(salir bola **blanca**)=**1/6**

¿Cuánto suman las tres probabilidades?
¿A qué es debido ese resultado?

Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

Salir bola roja o negra

Salir bola roja o blanca

Salir bola negra o blanca

La probabilidad de que ocurra uno de los dos sucesos A o B, es igual a la SUMA de las probabilidades de que ocurra cada uno de ellos:

$$p(A+B)=p(A)+p(B)$$

Para que esto sea así, los dos sucesos, A y B, tienen que ser INCOMPATIBLES

6 Probabilidad de que ocurra A y B

Supongamos que tenemos dos dados cual es la probabilidad de sacar dos 6 al tirar los dos dados.
Estamos ante sucesos independientes.

La posibilidad de sacar un 6 en un dado es $P(A)=\frac{1}{6}$, la posibilidad de sacar un 6 con el segundo dado $P(B)=\frac{1}{6}$

Cual es la probabilidad de que suceda a la vez. $P(\text{A y B})=\text{P(A) P(B)}=\frac{1}{6}\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

La probabilidad de que ocurran a la vez dos sucesos A y B, es igual al PRODUCTO de las probabilidades de cada uno de ellos: $P(\text{A y B})=\text{P(A) P(B)}$

5. BIBLIOGRAFÍA

g) Gonzalez, Carlos y otros. Matemáticas II. Editorial Editex (1997)

h) http://descartes.cnice.mecd.es

i) www.uoc.edu

6. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

1 Cual es la probabilidad de sacar una cara al tirar una moneda

2 Cual es la probabilidad de sacar dos caras al tirar dos monedas

3 Si tomamos una baraja de 40 cartas y una moneda, cual es la probabilidad de sacar una cara y de sacar un rey. Tomando una carta y tirando una moneda a la vez

4 Cual es la probabilidad que nos toque el premio (a los 5 números) de la ONCE si compramos un solo número

5 Y si no compramos ningún número. Es mucha la diferencia.

6 Cual es la probabilidad de sacar de una baraja un rey o un oro

7 Cual es la probabilidad de sacar en una baraja un rey y que sea de oros

8 Cual es la probabilidad de sacar en una baraja copas o espadas

9 Cual es la probabilidad en una baraja de sacar reyes o sotas

10 Cual es la probabilidad en una baraja de sacar una carta que esta sea oros o copas

11 Cual es la probabilidad de tirar una moneda tres veces y que sacan tres caras.

7 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

1. $P(cara) = \frac{1}{2}$

2 . $P(cara)P(Cara) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

3 . $P(cara)P(rey) = \frac{1}{2} * \frac{4}{40} = \frac{4}{80} = \frac{1}{20}$

4 . $P(54637) = \frac{1}{100000} = 0{,}00001$

5. $P(\sin comprar) = \frac{0}{100000} = 0$

7. $P(rey \quad de \quad oros) = \frac{1}{40}$

8 . $P(copas) = \frac{10}{40}$ $\qquad P(espada) = \frac{10}{40}$

$P(copas) + P(espadas) = \frac{10}{40} + \frac{10}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

9. $P(reyes) = \frac{4}{40}$ $\qquad P(sotas) = \frac{4}{40}$

$P(reyes) + P(sotas) = \frac{4}{40} + \frac{4}{40} = \frac{8}{40} = \frac{2}{10}$

10 . $P(oros) = \frac{10}{40}$ $\qquad P(copas) = \frac{10}{40}$

$P(oros) + P(copas) = \frac{10}{40} + \frac{10}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

11. $P(cara)P(Cara)P(Cara) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$