

CURSO: MÉTODO ABN

Segundo ciclo

(Por unas matemáticas sencillas, naturales y divertidas)



MARIA C. CANTO LÓPEZ

Doctoranda Departamento de Psicología UCA

INDICE

1. Numeración (especialización):	3
➤ Composición y descomposición compleja	3
➤ Numeración en bases inferiores a 6.....	4
2. Suma (especialización):	4
➤ Sumas	4
➤ Suma de decimales.....	5
➤ Uso intensivo del redondeo y la compensación	5
➤ Suma en base menor que 6.....	6
3. Resta.....	6
➤ Resta de decimales.....	6
➤ Uso del redondeo y compensación	7
➤ Transformaciones y equivalencia.....	7
4. Operaciones compuestas:	7
➤ Formulación de problemas de dos etapas	7
5. Aprendizaje del producto:.....	8
➤ Subitización con tablas de multiplicar.....	8
➤ Proceso de aprendizaje de la tabla de multiplicar	9
➤ Aprendizaje de la tabla del 11	11
➤ Producto posicional.....	12
➤ Propiedad conmutativa del producto	13
➤ Formato de multiplicación por una cifra.....	13
➤ Formato de multiplicación por 2 cifras	15
➤ Abreviaciones de los productos	16
➤ Propiedades de las operaciones.....	17
➤ Patrones de la multiplicación	17
➤ Creciente del producto.....	18
➤ Producto con decimales.....	19
➤ Tratamiento directo e inverso de la tabla.....	19
➤ Reversión del producto en la división	20
➤ Trucos del cálculo.....	20
➤ Productos de semidecenas	23
➤ Producto de dos bidígitos por aplicación de la propiedad distributiva.	24
6. Aprendizaje de la división	27

➤	Proceso de aprendizaje de la división	28
➤	Formato y algoritmo de la división por una cifra	30
➤	Redondeo en la división	31
➤	Patrones en la división	31
➤	División por dos cifras	32
➤	División con decimales en el divisor.....	35
	7. Problemas de Escala y Magnitudes	36
☐	Estructuras multiplicativas	36
☐	Secuencia en segundo ciclo.....	38
	Bibliografía	45

SEGUNDO CICLO

1. Numeración (especialización):

➤ Composición y descomposición compleja

COMPOSICIÓN

Se le presenta al alumno el adosado incompleto, a falta de algunas de las cifras. El alumno debe completar el adosado a partir de los datos dados.

1438			
UM	C	D	U
1	1	¿? = 33	8



¿Cuántas decenas faltan?

- **Construcción del número**

Se le presenta la descomposición de un número y el alumno debe construir el número y en situaciones más avanzadas realizar la operación que se pide.

$$12 \text{ C } 18 \text{ D } 4 \text{ U} = \text{¿?} \quad \Rightarrow \quad 1384$$

$$2 \text{ C } 18 \text{ D } 4 \text{ U} \times 6 = \text{¿?} \quad \Rightarrow \quad 2 \text{ C } 108 \text{ D } 24 \text{ U} = 2304$$

DESCOMPOSICIÓN

406			
UM	C	D	U
1/5	2	0	6



$$1'5 = 0.2 \text{ UM} = 2 \text{ C} = 200 \text{ U}$$

La práctica de este tipo de descomposición es muy útil a la hora de realizar cambios de unidades (por ej. en ejercicios de medidas). Debemos practicar que sean capaces de circular en ambas direcciones:

$$\longleftrightarrow$$

$$406 \text{ m} = 0.406 \text{ dam} = 4060 \text{ dm}$$

➤ Numeración en bases inferiores a 6

La numeración en distintas bases no es un objetivo obligatorio en el segundo ciclo, pero si es recomendable su práctica para posteriores aprendizajes más complejos.

BASE 5

	125	25	5	1
160	1	1	2	0
87		3	2	2
107		4	1	2

BASE 4

	64	16	4	1
96	1	2	0	0
87	1	1	2	3
107	1	2	1	0

2. Suma (especialización):

➤ Sumas

El algoritmo de la suma se sigue especializando y perfeccionando en el 2º ciclo, trabajando con sumas hasta 100.000 en todo el ciclo. Se sigue con el mismo procedimiento de generación de problemas. El enlace que a continuación se presenta, representa cómo resuelve una operación de sumar de 4 dígitos

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2012/11/sumas-de-4-digito-seguimos-con-el.html>

Cálculo mental de sumas de 4 dígitos en 4º de E.P.

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/search/label/Adici%C3%B3n.%20C2%BA%20de%20Primaria.%20C3%A1lculo%20Mental>

➤ **Suma de decimales**

¿Cómo se enseña?

En 1º de E.P. ya se inicia en la resolución de operaciones de suma con decimales utilizando las monedas. Un ejemplo de actividades para trabajarlo sería plantear un problema de dinero de sumar, con cantidades pequeñas que iremos complicando a medida que vamos avanzando en los cursos. En el siguiente enlace se presenta una clase de 1º de E.P. que están empezando con las operaciones de suma con decimales:

<http://www.olesur.com/educacion/videos-abn.asp?v=gEYK9vwWxXo&t=primeras%20sumas%20con%20decimales>

En este enlace, se presenta un video ilustrativo del proceso de enseñanza de la suma de decimales en ABN en un aula de 2º E.P.

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2012/03/como-se-ensena-sumar-decimales-una.html>

Ejemplo de sumas en 2º y 3º de E.P.

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2013/11/suma-con-decimales-en-2-ceip-sancti.html>

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2012/02/sumas-de-decimales-en-2.html>

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2013/02/sumas-con-decimales-en-3.html>

Suma mental:

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2012/07/suma-mental-con-decimales-4-de-primaria.html>

➤ **Uso intensivo del redondeo y la compensación**

El uso del **redondeo** es, sobre todo, importante en las operaciones de suma y multiplicación más avanzadas.

La **compensación** tiene más significado en la suma.

$$3268 + 1980 = 5268 - 20 = 5248$$

↓

$$+ 2000$$

➤ Suma en base menor que 6

SUMA EN BASE 4

$$3 + 1 = 4 = 10$$

	3021 + 1203	
1200	10221	3
3	10230	0

* Enumeramos los números de izquierda a derecha

$$3 + 1 = 4 = 10$$

La aplicación de este tipo de sumas puede utilizarse en cursos de Secundaria, presentando actividades de álgebra dándole, a las incógnitas, valores en bases diferentes.

3. Resta

➤ Resta de decimales

Al igual que hicimos con la suma de decimales, se presentan enlaces a vídeos de alumnos de 2º y 3º de E.P.

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2012/02/sumas-y-restas-con-decimales-en-2.html>

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2013/02/restas-con-decimales-en-3.html>

Cálculo mental:

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2012/05/resta-con-decimales-realizada.html>

➤ Uso del redondeo y compensación

El uso de la compensación se generaliza en las restas.

$$3245 - 967 = 2245 + 33 = 2278$$

$$\begin{array}{r} \downarrow \\ - 1000 \end{array}$$

Redondeo en 3º E.P.

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/search/label/Sustracci%C3%B3n.%203%C2%BA%20Primaria>

➤ Transformaciones y equivalencia

Es importante trabajar las transformaciones y equivalencias, es decir que se sepan trasladar de una operación a otra. Para ello es fundamental conocer la fórmula de cada tipo de problema:

$a + b = x$	SUMA DIRECTA
$a + x = c$	RESTA EN ESC. ASCENDENTE
$x + b = c$	RESTA EN ESC. DESCENDENTE
$a - b = x$	RESTA DETRACCIÓN - COMPARACIÓN
$a - x = c$	RESTA EN ESC. ASCENDENTE
$x - b = c$	SUMA INDIRECTA

4. Operaciones compuestas:

➤ Formulación de problemas de dos etapas

Uno de los objetivos de este ciclo sigue siendo que sean capaces de formular problemas, cada vez de mayor complejidad y que sean realistas. Se debe practicar operaciones compuestas de sumirresta y doble resta, como vía para la resolución de los problemas de dos etapas.

Doble resta 3º E.P.:

<http://www.youtube.com/watch?v=dyyGnhUnV-l>

Sumi-resta 3° E.P.:

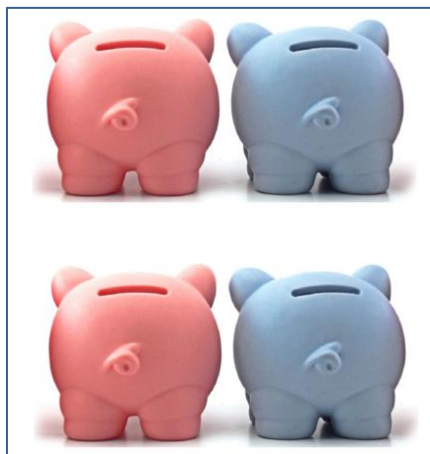
<http://www.youtube.com/watch?v=54nc6tlhpuY>

5. Aprendizaje del producto:

➤ Subitización con tablas de multiplicar

La palabra **subitización** hace referencia a la cantidad de objetos que somos capaces de identificar en un pequeño instante. Hay numerosas series para trabajar y conseguir que el alumnado alcance una gran soltura, así como el de infantil identifique el concepto de cantidad con independencia a la forma, tamaño o clase del mismo.

Las fichas presentadas a continuación están dedicada al aprendizaje-repaso de las tablas y a comprender que la multiplicación es la suma repetida de una misma cantidad . La idea es que el alumnado identifique claramente le patrón de repetición en cada imagen, de forma que a la vez identifique igualmente la propiedad conmutativa del producto. Ésta primera serie es muy fácil, ya que las 10 tarjetas que forman cada serie presentan el patrón de repetición de forma clara y el elemento a repetir dentro de cada una, tal y como muestra la imagen



<http://www.actiludis.com/?p=40682>

<http://www.actiludis.com/wp-content/uploads/2013/02/Subitizaci%C3%B3n-tabla-del-2.pdf>

➤ **Proceso de aprendizaje de la tabla de multiplicar**

PRODUCTO CON TAPONES: “La máquina de los tapones”, material creado por Juan Antonio Durán Siles del C.R.A. “Riscos de Villavieja” en Barrado (Cáceres). Se trata de pegar las bases de los tapones de los tetra bick de leche, zumo,... en una tablilla y escribir o pegar sobre los tapones números.



APRENDIZAJE TABLAS DEL 6, 7, 8 Y 9.

Se trata de un método para multiplicar todas las combinaciones posibles de los números 6, 7, 8 y 9, y no para cualquier otro número menor. Indicaciones:

1.- En cada mano levantamos los dedos que corresponden a cada número (ver imagen), da igual la posición del dedo que levantemos, lo realmente importante es que para el 6 le corresponde un dedo subido, al 7 dos, al 8 tres y al 9 cuatro.



2.- En cada mano subimos los dedos que represente a cada producto. Por ejemplo 7 x 8 quedaría así:

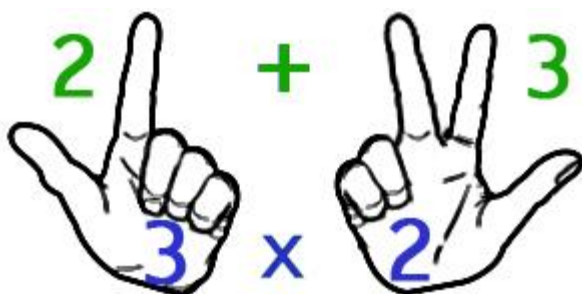


3.- La cantidad de dedos extendidos o contraídos serán los que nos den el resultado de la operación. Para ello...

4.- Sumamos los dedos que están extendidos y dicho número son las decenas del resultado. En nuestro ejemplo: $2 + 3 = 5$ (decenas), es decir 50

5.- Multiplicamos los dedos contraídos o cerrados y dicho número son las unidades del resultado. En nuestro ejemplo $3 \times 2 = 6$

6.- Sumamos ambos números y tenemos el resultado. $50 + 6 = 56$



Sólo hay dos casos en los cuales al multiplicar los dedos contraídos se supera la decena, y por tanto tendremos la suma de dos números de dos cifras. Es el caso del 6×6 y del 7×7 . Sin embargo son dos sumas que los alumnos deben haber superado perfectamente, en caso contrario podríamos decir que aún no están maduros para la multiplicación. Por último indicar, que en la práctica al alumnado le resulta más fácil empezar por las decenas y luego sumar las unidades, aunque esto es sólo cuestión de práctica.

http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2010/07/multiplicar-con-los-dedos_07.html

➤ Aprendizaje de la tabla del 11


Aprender la tabla de multiplicar por 11, es realmente sencillo y abre un camino para realizar el cálculo mental de dos cifras de la primera decena, desde el 11 por 11 hasta el 19 por 19, realmente sencillos de calcular mentalmente. Junto a esta tabla se debe practicar la propiedad conmutativa, para la cual publicamos otra para este fin.

Nombre: _____ Fecha: _____

LA TABLA DE MULTIPLICAR DEL 11

Pinta el dibujo según el color que corresponde a la solución de cada multiplicación.


AMARILLO	ROJO	AZUL OSCURO	GRIS	NARANJA
11 X 0 =	11 X 11 =	11 X 5 =	11 X 2 =	11 X 9 =
VIOLETA	BLANCO	ROSA	NEGRO	MARRÓN
11 X 1 =	11 X 10 =	11 X 12 =	11 X 3 =	11 X 4 =
CELESTE	COLOR CARNE	VERDE OSCURO		
11 X 6 =	11 X 8 =	11 X 7 =		



LA TABLA DE MULTIPLICAR DEL 11

Pinta el dibujo según el color que corresponde a la solución de cada multiplicación.

AMARILLO	ROJO	AZUL	VERDE CLARO	NARANJA
11 X 11 =	10 X 11 =	1 X 11 =	5 X 11 =	8 X 11 =
VIOLETA	BLANCO	ROSA	NEGRO	MARRÓN
4 X 11 =	0 X 11 =	7 X 11 =	2 X 11 =	9 X 11 =
CELESTE	COLOR CARNE	VERDE OSCURO		
3 X 11 =	6 X 11 =	12 X 11 =		



El procedimiento mental para multiplicar por 11 es bastante simple y los alumnos/as lo suelen aprender sin dificultad:

Ejemplo: $11 \times 18 = 198$

- La cifra de la unidad del producto es la cifra de las unidades del multiplicador, en este caso 8
- La cifra de la decena del producto es una unidad más que las unidades del multiplicador, en este caso: 9 8
- La cifra de la centena es 1. En este caso: **198**

Producto de 2 dígitos por 2 dígitos en la primera decena

Para calcular productos de decenas superiores a 11 hasta 19, se sigue el mismo procedimiento:

- 1.- Para la unidad multiplica las unidades de ambos números.
- 2.- Para la decena, suma las unidades de ambos números más la que se arrastre del producto anterior.

3.- La centena es siempre 1 más las que se arrastren de la suma anterior.

CÁLCULO MENTAL FICHA 1

Producto de 2 dígitos por 2 dígitos en la primera decena

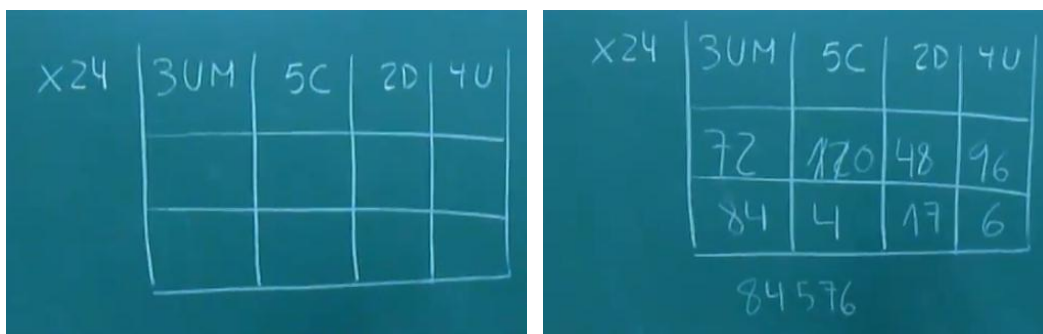
1.- Para la unidad multiplica las unidades de ambos números.
 2.- Para la decena, suma las unidades de ambos números más la que se arrastre del producto anterior.
 3.- La centena es siempre 1 más las que se arrastren de la suma anterior.

11 x 11 =	17 x 11 =
11 x 12 =	18 x 11 =
11 x 13 =	19 x 11 =
12 x 11 =	17 x 12 =
12 x 12 =	18 x 12 =
12 x 13 =	19 x 13 =
11 x 14 =	14 x 11 =
11 x 15 =	15 x 11 =
11 x 16 =	16 X 11 =
12 x 14 =	14 X 12 =
12 x 15 =	15 X 12 =
12 x 16 =	16 X 12 =
11 x 17 =	12 x 17 =
11 x 18 =	12 x 18 =
11 x 19 =	12 x 19 =

➤ Producto posicional

En este tipo de tareas se practica la composición y descomposición junto con el producto. Los alumnos deben resolver la operación planteada, donde uno de los factores se presenta descompuesto.

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/search/label/Producto.%204%C2%BA%20de%20Primaria.%20Formato%20Posicional>.



➤ **Propiedad conmutativa del producto**

Utilizar tablas para trabajar la propiedad conmutativa de la multiplicación. Los alumnos de 2º de primaria a la vez que aprenden las tablas, deben aprender que a la inversa el resultado sigue siendo el mismo. Aunque está bien recordar que en la realidad esto no siempre se cumple (Aunque el resultado matemático sea igual, no es lo mismo 4 caramelos a 5 céntimos cada uno, que con ese mismo tipo de caramelos decir 5 caramelos a 4 céntimos cada uno).

<http://www.actiludis.com/?p=18187>


Nombre: _____ Fecha: _____

LA TABLA DE MULTIPLICAR DEL 1

A estas multiplicaciones le hemos dado la vuelta con la propiedad conmutativa. Pinta el dibujo según el color que corresponde a la solución de cada multiplicación.

AMARILLO	ROJO	AZUL	VERDE OSCURO	NARANJA
1 x 1 =	7 x 1 =	5 x 1 =	9 x 1 =	3 x 1 =

VIOLETA	VERDE CLARO	ROSA	NEGRO	MORADO
2 x 1 =	6 x 1 =	4 x 1 =	8 x 1 =	10 x 1 =



Dibujo: 101dibujos.com


Nombre: _____ Fecha: _____

LA TABLA DE MULTIPLICAR DEL 8

A estas multiplicaciones le hemos dado la vuelta con la propiedad conmutativa. Pinta el dibujo según el color que corresponde a la solución de cada multiplicación.

AMARILLO	ROJIZO	VERDE OSCURO	VERDE CLARO	NARANJA
8 x 8 =	4 x 8 =	6 x 8 =	1 x 8 =	2 x 8 =

VIOLETA	NEGRO	ROJO	VERDE	MARRÓN
7 x 8 =	10 x 8 =	3 x 8 =	9 x 8 =	5 x 8 =



Dibujo: 101dibujos.com

➤ **Formato de multiplicación por una cifra**

En esta sección vamos a dar un salto hacia la multiplicación donde el multiplicando tiene varias cifras y el multiplicador una sola. Antes de empezar a describir el proceso se reflejan a continuación, las importantes ventajas que tiene el algoritmo ABN frente al algoritmo tradicional.

- El proceso es más transparente y al no existir tampoco el término “me llevo...” las operaciones que se realizan están sobre el papel.
- No existe la necesidad de correr un espacio cuando el multiplicador tiene más de un número o varios espacios si incluye ceros.

- Tampoco tenemos el problema que surge cuando los números resultantes de las multiplicaciones parciales no se encuentran bien colocados, provocando sumas incorrectas.
- Una vez acabada la operación y sobre las cantidades reflejadas nos permite realizar una serie de cálculos añadidos que enriquecen y clarifican la operación (ver parte final del vídeo de ejemplo).

Por otro lado, las potencialidades que se obtienen por ser un algoritmo abierto, por cuanto el alumno puede fragmentar en mayor o menor medida el multiplicando o el multiplicador. Presentando las siguientes condiciones:

- La base es el algoritmo expandido, que acumula en cada paso los productos anteriores.
- Exige dominar la extensión de las tablas de multiplicar (a decenas, centenas y millares).
- Requiere un dominio apreciable del cálculo mental

En el algoritmo ABN para la **multiplicación** donde el multiplicador es de una sola cifra necesitamos tres columnas y tantas filas como descomposiciones en unidades tenga el número que vamos a multiplicar. En el ejemplo 238×8 quedaría de la siguiente manera:

238 x 8		
MULTIPLICANDO EN UNIDADES	PRODUCTOS PARCIALES	PRODUCTO ACUMULADO
200	1600	
30	240	1840
8	64	1904

La primera columna la podemos llamar “Multiplicando en unidades”. Consiste en una columna en la que se escriben tantas filas como descomposiciones del número en unidades podamos hacer. Ejemplo en el número 238 se escribe una primera fila con 2 centenas en formato unidades, es decir 200, otra fila para las 3 decenas, es decir 30 y otra para las 8 unidades.

- La segunda columna la podemos llamar “Productos parciales” y es el resultado de multiplicar el multiplicador por cada una de las descomposiciones que hemos hecho por filas.
- La última columna la podemos llamar “Producto acumulado” y es el resultado de ir sumando sucesivamente los productos de la columna central. La primera fila

permanecerá vacía al no existir aún dos cifras que sumar y la última reflejará el total de la multiplicación.

* *¿Qué ocurre cuando el multiplicando tiene ceros intermedios? No pasaría nada, simplemente se omite la fila que corresponda al cero, ya que su producto sería una fila de ceros, y se realiza la operación tal y como se ha explicado anteriormente.*

➤ Formato de multiplicación por 2 cifras

¿Qué ocurre cuando el multiplicador tiene más de una cifra? Nada especial. El alumno debe mejorar su técnica de cálculo, y aprender a multiplicar números bidígitos por dígitos.

En primer lugar, trabajaremos el producto por dos cifras por medio de cálculo mental, siguiendo la siguiente técnica:

Ejemplo: $8 \times 53 =$

1º Se multiplica la cifra de las decenas por 8 ($50 \times 8 = 400$). El resultado se guarda en la memoria.

2º Se multiplica la cifra de las unidades por 8 ($3 \times 8 = 24$). El resultado se suma al producto parcial anterior. Así se obtiene el producto de 53×8 , que es igual a **424**.

¿Qué ocurre cuando uno de los factores es 500, o 2000? Se aplica la misma técnica, obviando los ceros, y añadiendo estos al final.

Ejemplo: $500 \times 53 =$

1º Se multiplica la cifra de las decenas por 5 ($50 \times 5 = 250$). El resultado se guarda en la memoria.

2º Se multiplica la cifra de las unidades por 5 ($3 \times 5 = 15$). El resultado se suma al producto parcial anterior. Así se obtiene el producto de 53×5 , que es igual a 265.

3º Se añaden los ceros y se recompone el número: **26.500**.

Cuando los alumnos resuelvan estas situaciones con soltura pueden pasar a completar algoritmos más complejos.

A continuación, se presenta la resolución de un algoritmo de un producto por dos dígitos, explicado paso a paso.

Ejemplo: 9.348 X 23**FORMATO BÁSICO:**

X	20	3		
9.000	180.000	27.000	207.000	
300	6.000	900	6.900	213.900
40	800	120	920	214.820
8	160	24	184	215.004

Ejemplo: 9.348 X 23**FORMATO ESTÁNDAR**

X	23	
9.000	207.000	
300	6.900	213.900
40	920	214.820
8	184	215.004

FORMATO ABREVIADO

X	23	
9.008	207.184	
300	6.900	214.084
40	920	215.004

Ejemplo: 3.954 X 78

Otra forma inteligente de ahorrar cálculos:

X	78	
3.000	234.000	
500	39.000	273.000
400	31.200	304.200
50	3.900	308.100
4	312	308.412

➤ **Abreviaciones de los productos**

Las reglas básicas para el algoritmo ABN del producto son las que siguen:

- No volver a multiplicar lo que ya se ha multiplicado.
- Utilizar el recurso de dobles y mitades.

- Incluir dos órdenes de unidades y doblar o hallar la mitad.

➤ **Propiedades de las operaciones**

Se deben trabajar con los alumnos las propiedades de las multiplicaciones y cómo nos podemos beneficiar de ellas a la hora de resolver los productos.

$$36 \times 4 = 144$$

$$(18 \times 4) + (18 \times 4) = 144$$

$$(20 + 16 \times 4) = 144$$

Propiedad distributiva

$$9.890 \times 7 =$$

↓ *Redondeo/compensación*

$$9.890 \times 7 = (10.000 \times 7) - (110 \times 7)$$

	X 7
10.000	70.000
-110	770
	69.330

➤ **Patrones de la multiplicación**

Se presenta al alumnado que ya domina el producto, para que descubra las relaciones entre los distintos miembros del mismo, cuando alguno de ellos varía al ser multiplicado/dividido por la unidad seguida de ceros, o duplicado o triplicado. Para ello se les ofrece un ejemplo y varios ejercicios que aumentan la dificultad dentro de la misma ficha.

$52 \times 7 = 364$	$___ \times 7 = 3.640$	$52 \times 7 = 364$	$520 \times 7 = 3.640$
$___ \times 7 = 36'4$	$52 \times ___ = 3640$	$5'2 \times 7 = 36'4$	$52 \times 70 = 3640$
$52 \times ___ = 36'4$	$5'2 \times 70 = ___$	$52 \times 0'7 = 36'4$	$5'2 \times 70 = 364$

DESCUBRE EL PATRÓN

Partiendo de la operación que encabeza el robot vamos a variar sus cifras con ceros a la izquierda y con dobles o mitades. Teniendo en cuenta esto averigua el resultado sin necesidad de hacer la multiplicación y colorea el dibujo según su etiqueta. (PISTA: Fíjate en el ejemplo y en los resultados anteriores que vas obteniendo).

EJEMPLO

$142 \times 2 = 284$

$1420 \times 2 = 2840$

$142 \times 4 = 568$

$284 \times 2 = 568$

$142 \times 20 = 2840$

AZUL

$164 \times 2 = 328$

$1640 \times 2 = 3280$

$164 \times 4 = 656$

$328 \times 2 = 656$

$164 \times 20 = 3280$

VERDE

$214 \times 3 = 642$

$2140 \times 3 = 6420$

$214 \times 6 = 1284$

$107 \times 3 = 321$

$428 \times 3 = 1284$

AMARILLO

$210 \times 4 = 840$

$2100 \times 4 = 8400$

$210 \times 2 = 420$

$210 \times 8 = 1680$

$105 \times 4 = 420$

ROSA

$120 \times 6 = 720$

$120 \times 60 = 7200$

$12 \times 6 = 72$

$120 \times 3 = 360$

$240 \times 6 = 1440$

$240 \times 3 = 720$

NARANJA

$234 \times 5 = 1170$

$2340 \times 5 = 11700$

$117 \times 5 = 585$

$2340 \times 50 = 117000$

$1170 \times 5 = 5850$

$468 \times 5 = 2340$

Patrones de la multiplicación 3º E.P. <http://www.youtube.com/watch?v=W6rOk0KbfYw>

➤ **Creciente del producto**

Al igual que los patrones se deben utilizar una vez que el alumno tenga cierto dominio de las tablas de multiplicar y la resolución de productos mentalmente.

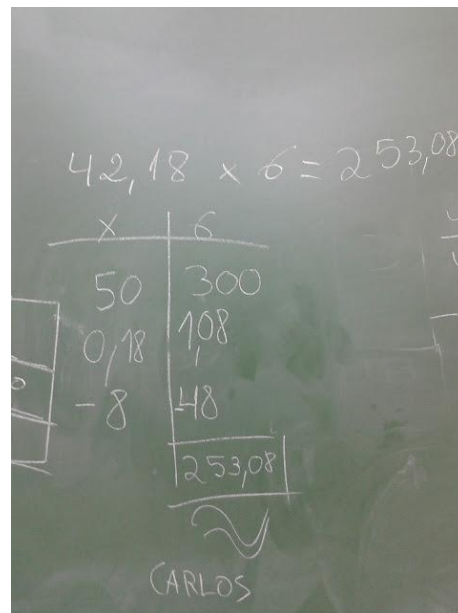
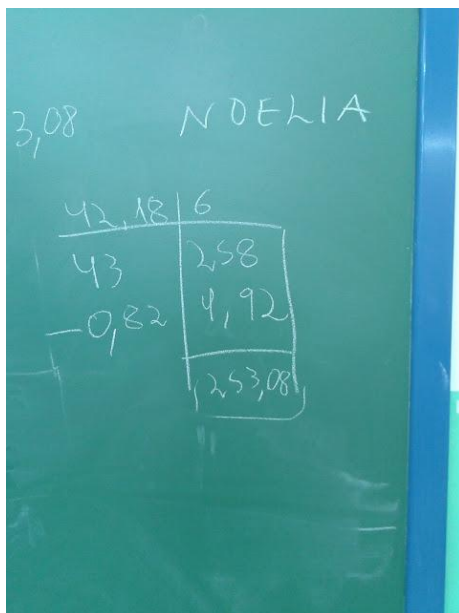
$5 \times 5 = 25$	➔	$5 \times 5 = 25$
$65 \times 5 = \underline{\hspace{2cm}}$		$65 \times 5 = 325$
$165 \times 5 = \underline{\hspace{2cm}}$		$165 \times 5 = 825$
$4.165 \times 5 = \underline{\hspace{2cm}}$		$4.165 \times 5 = 20.825$

$4 \times 4 = 16$	➔	$4 \times 4 = 16$
$64 \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$		$64 \times 4 = 256$
$164 \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$		$164 \times 4 = 656$
$4.164 \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$		$4.164 \times 4 = 12.656$
$83.164 \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$		$83.164 \times 4 = 332.656$

➤ Producto con decimales

La multiplicación con decimales ha resultado más sencilla de lo que pensábamos. De hecho, la técnica la descubrieron ellos mismos, sirviéndose como modelo del sistema monetario. Es decir, que cuando multiplican por 0,6 obtienen monedas de diez céntimos, que inmediatamente pasan a euros (unidades).

Cuando íbamos a explicarles la técnica del producto cuando ambos términos tienen parte decimal, nos encontramos con que también sabían resolverlo. Hemos optado por dejarlos con ese conocimiento intuitivo y abordar el próximo curso uno más conceptual. De acuerdo con la filosofía de nuestro método, la resolución de las operaciones en las que el multiplicador tenga más de dos cifras se remite a la calculadora.



Multiplicación con decimales en el multiplicando. 3º E.P.:

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2011/05/multiplicacion-con-decimales-ceip.html>

Multiplicación mental con decimales en el multiplicando. 4º E.P.:

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2012/05/multiplicacion-mental-con-decimales.html>

➤ Tratamiento directo e inverso de la tabla

Se realizan preguntas para que generalicen las operaciones, una vez que el alumno haya resuelto la operación.

➤ **Reversión del producto en la división**

	X 7	
	42.000	
		46.900
		47.110
		47.145

➔

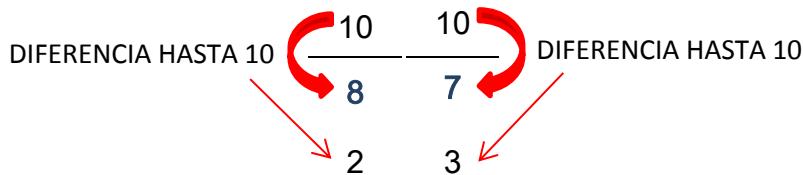
	X 7	
6.000	42.000	
700	4.900	46.900
30	210	47.110
5	35	47.145

Para la práctica de este tipo de ejercicios se le presenta al niño el algoritmo de una multiplicación resuelta, pero aparecen huecos que el alumno debe completar. Se pretende que el alumno sea capaz de circular fácilmente del producto a la división e independientemente de los datos ofrecidos es capaz de encontrar los que faltan para que la operación tenga sentido.

➤ **Trucos del cálculo**

Producto de dos cifras especiales (deben de estar cerca del orden de unidades superior).

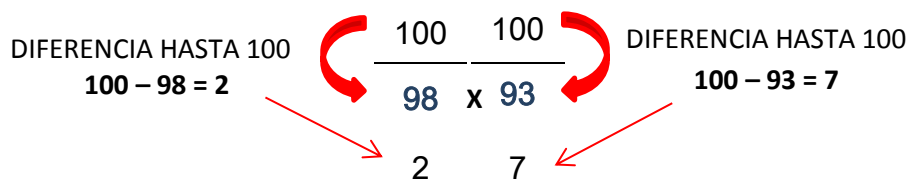
Ejemplo 1: $8 \times 7 =$



Procedimiento para la resolución



- 1º) A 8 le quitamos la diferencia del otro (3), por lo que tendríamos $8 - 3 = 5$
- 2º) y por último las diferencias se multiplican, $2 \times 3 = 6$
- 3º) El número que obtenemos es el **56**

Ejemplo 2: $98 \times 93 =$



1º) $93 - 2 = 91$
 2º) $7 \times 2 = 14$  **9114**



Ejemplo 3: $96 \times 88 =$

DIFERENCIA HASTA 100 $100 - 96 = 4$  $\frac{100}{96} \times \frac{100}{88}$  DIFERENCIA HASTA 100 $100 - 88 = 12$


4 12

1º) $88 - 4 = 84$
 2º) $4 \times 12 = 48$  **8448**

Ejemplo 4: $998 \times 991 =$

DIFERENCIA HASTA 100 $1000 - 998 = 2$  $\frac{1000}{998} \times \frac{1000}{991}$  DIFERENCIA HASTA 100 $1000 - 991 = 9$



2 9

1º) $991 - 2 = 989$
 2º) $2 \times 9 = 18$  **989018**

**Debemos recordar que el resultado será un número de 6 cifras, por lo que debemos introducir un cero en las cifras de las centenas.*

Ejemplo 5: $998 \times 93 =$

Cuando las cifras del producto están cercanas a 1000 y a 100, la diferencia se le quita al número mayor, pero en las decenas y después se multiplican las diferencias como en los casos anteriores.

DIFERENCIA HASTA 100 $1000 - 998 = 2$  $\frac{1000}{998} \times \frac{100}{93}$  DIFERENCIA HASTA 100 $100 - 93 = 7$

2 7

1º) $998 - 7D (70) = 928$

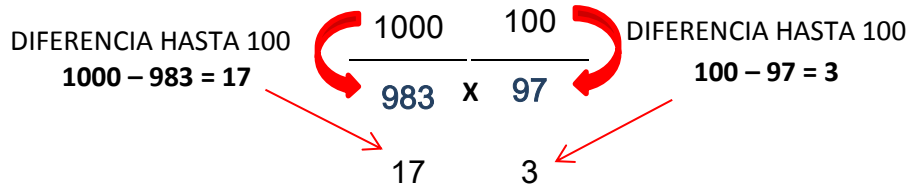
*La diferencia se quita en la cifra de las decenas



92814

2º) $2 \times 7 = 14$

Ejemplo 6: $983 \times 97 =$



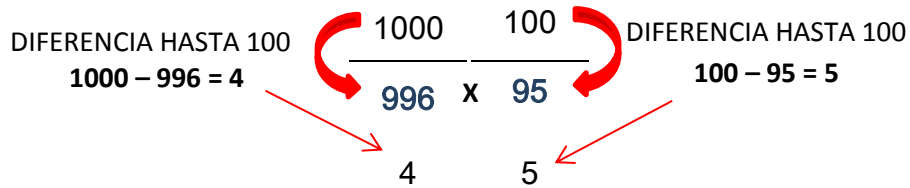
1º) $983 - 3D (30) = 953$



95351

2º) $17 \times 3 = 51$

Ejemplo 7: $996 \times 95 =$



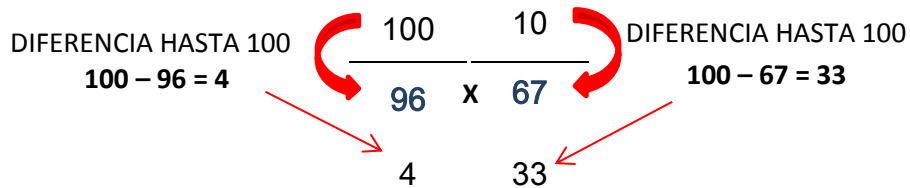
1º) $996 - 5D = 946$



94620

2º) $4 \times 5 = 20$

Ejemplo 8: $96 \times 67 =$



1º) $67 - 4 = 63$



6432

2º) $4 \times 33 = 132$

➤ Productos de semidecenas

En este apartado se explican las bases del cálculo que nos permitirá, partiendo del Producto ABN, simplificar el proceso hasta llegar al cálculo mental de cuadrados de decenas y semidecenas del tipo: 55^2 , 45^2 , 75^2 , ... (números que terminan en 5).

En el siguiente ejemplo partimos de la rejilla ABN para el producto 75^2 , que es lo mismo que 75×75 o $(70 + 5)^2$. En primer lugar los descomponemos en decenas y unidades $(70 + 5)$ para situarlos en la rejilla, tal y como aparece en este primer ejemplo.

Ejemplo 1: $75 \times 75 =$

		75 x 75		
		70	5	
70		4.900	350	
5		350	25	
		5.250	375	5.625

Si realizamos el producto cartesiano las operaciones quedaría así:

1º) obtenemos el doble del primero (70) por el segundo (5), quedando así $(70 \times 5) + (70 \times 5)$, o lo que es lo mismo, $70 \times 10 = 700$

2º) Obtenemos el cuadrado del primer número (70), que al tratarse de decenas completas es fácil de realizar: $70 \times 70 = 4.900$

3º) Por último obtenemos el cuadrado del segundo número (5) (semidecena) que siempre será 25: $5 \times 5 = 25$

4º) Sumamos todos los productos para obtener el resultado: $700 + 4.900 + 25 = 5.625$

Para simplificar estos cálculos debemos practicar el siguiente procedimiento:

- 1.- Calculamos el cuadrado de la decena $70^2 = 4900$
- 2.- Calculamos el producto de las decenas $70 \times 10 = 700$
- 3.- Calculamos el producto de las unidades (semidecena) que siempre es 25: $5 \times 5 = 25$
- 4.- La suma total $4900 + 700 + 25 = 5625$

Ejemplo 2:

$$(57)^2 = (50 \times 50 = 2.500) + (100 \times 7 = 700) + (7 \times 7 = 49) = 3.249$$

Ejemplo 3:

$$(83)^2 = (80 \times 80 = 6.400) + (100 \times 3 = 700) + (3 \times 3 = 9) = 6.709 \quad ? 6.889$$

En la siguiente ficha se muestra un ejemplo de lo anteriormente explicado:

Nombre: _____ Fecha: _____

CUADRADOS
CON DECENAS Y SEMIDECENAS

Aplica el cálculo mental para calcular el apartado que falta en cada una de las siguientes potencias. Fíjate en el ejemplo y calcula el resto.

$45^2 = (40 \times 40) + (40 \times 10) + (5 \times 5)$

$1600 + 400 + 25 = 2025$

EL CUADRADO ES CORRECTO

CUADRADOS

$25^2 = (20 \times 20) + () + (5 \times 5)$

$15^2 = () + (10 \times 10) + (5 \times 5)$

$65^2 = (60 \times 60) + () + ()$

$85^2 = () + (80 \times 10) + ()$

$75^2 = () + () + ()$

$95^2 = () + () + ()$

Nombre: _____ Fecha: _____

CUADRADOS
CON DECENAS Y SEMIDECENAS

Colorea las potencias con sus cuadrados correspondientes, que encontraras dentro de los polígonos del recuadro, según el color que se indica. Los resultados de las potencias están repetidos, tenlo en cuenta para colorear todos los números iguales del mismo color.

verde

$25^2 =$ $50^2 =$

$35^2 =$ $900^2 =$

$15^2 =$ $20^2 =$

naranja

$45^2 =$ $800^2 =$

$55^2 =$ $700^2 =$

marrón

$85^2 =$ $600^2 =$

$30^2 =$ $40^2 =$

$10^2 =$

rojo

$65^2 =$

negro

$95^2 =$

azul

$75^2 =$

➤ **Producto de dos bidígitos por aplicación de la propiedad distributiva.**

- **Cifra de unidades. 73×77**

Cuando las decenas son iguales y las unidades suman 10

Es importante resaltar que se trata de un cálculo en el cual el alumnado tiene que pensar lo que está haciendo y cuyo ejercicio le reportará más agilidad en el cálculo, y no de un truco que se aplica tal cual y no produce reflexión en el alumno.

Partimos del ejemplo anterior (73×77). Para efectuar el cálculo rápido y abreviado recurrimos a la propiedad distributiva en el paso 2. La totalidad del cálculo es como sigue:

Ejemplo 1: $73 \times 77 =$

	73×77		
	70	3	
70	4.900	210	
7	490	21	
	5.390	231	5.621

$$(a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b)$$

- 1.- Cuadrado del primero o decenas del primer número por las decenas del segundo: $70 \times 70 = 4.900$
- 2.- Primero por el segundo y viceversa (segundo por primero): $70 \times 7 + 3 \times 70$, o lo que es lo mismo, $70 \times 10 = 700$ (donde el 10 es la suma de las unidades 7 y 3)
- 3.- Segundo por segundo: $7 \times 3 = 21$.
- 4.- Sumamos todos los resultados = $4.900 + 700 + 21 = 5.621$

Ejemplo 2:

$$42 \times 48 = (40 \times 40 = 1.600) + (100 \times 4 = 400) + (4 \times 4 = 16) = 2.016$$

$$(40 \times 50 = 2.000) + (4 \times 4 = 16) = 2.016$$

PRODUCTO DE DOS DÍGITOS
(Propiedad Distributiva. Cifra de unidades)

Aplica el cálculo mental para resolver el producto de dos dígitos, cuando las decenas son iguales y las unidades suman 10. Fíjate en el ejemplo 63×67 y haz el resto.

Multiplicamos las decenas Multiplicamos una decena por 10 (suma de 3 + 7) Multiplicamos las unidades (3 x 7)

$63 \times 67 = (60 \times 60) + (60 \times 10) + (3 \times 7)$
 $3600 + 600 + 21 = 4221$

$28 \times 22 = (20 \times 20) + (\quad) + (2 \times 8) =$

$14 \times 16 = (\quad) + (10 \times 10) + (4 \times 6) =$

$33 \times 37 = (30 \times 30) + (\quad) + (\quad) =$

$29 \times 21 = (\quad) + (20 \times 10) + (\quad) =$

$46 \times 44 = (\quad) + (\quad) + (\quad) =$

$57 \times 53 = (\quad) + (\quad) + (\quad) =$

$72 \times 78 = (\quad) + (\quad) + (\quad) =$

$98 \times 92 = (\quad) + (\quad) + (\quad) =$

PRODUCTO DE DOS DÍGITOS
(Propiedad Distributiva. Cifra de unidades)

Este par de páginas tiene mucho trabajo rebuscando pensar algo, sin renegar suerte. Pueden equitativamente a buscar el camino desde su momento al día, para ello haz las siguientes operaciones evaluando cálculo mental tal y como en el ejemplo de la derecha. $63 \times 67 = (60 \times 60) + (60 \times 10) + (3 \times 7) = 4227$

14 x 16 = 21 x 29 = 17 x 13 =
 34 x 36 = 24 x 26 = 32 x 38 =
 57 x 53 = 37 x 33 = 54 x 56 =
 11 x 19 = 41 x 49 = 12 x 18 =
 42 x 48 = 31 x 39 = 22 x 28 =
 27 x 23 = 44 x 46 = 51 x 59 =
 52 x 58 = 47 x 43 = 64 x 66 =

132	22	3021	209	2016	165	286
224	1224	143	1544	66	621	22
275	264	1324	33	77	3016	11

253 242 6336 143 88 609 264
 286 5224 308 11 4284 110 624
 275 220 3009 4224 231 121 1221
 4004 616 132 242 297 2009 143
 143 216 231 220 110 2442 165 1209 3344 253
 44 187 3024 1216 221 2021 2024 99 198 242

• Cifra de decenas. 63×43

Cuando las unidades son iguales y las decenas suman 100

Ejemplo 1: $63 \times 43 =$

	60	3	
40	2.400	120	
3	180	9	
	2.580	129	2.709

$$(a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b)$$

1º) Cuadrado del primero o decenas del primer número por las decenas del segundo:

$$60 \times 40 = 2.400$$

2º) Primero por el segundo y viceversa (segundo por primero): $60 \times 3 + 3 \times 40$, o lo que es lo mismo, $100 \times 3 = 300$ (donde el 100 es la suma de las decenas).

3º) Segundo por segundo: $3 \times 3 = 9$

4.- Sumamos todos los resultados = $2.400 + 300 + 9 = 2.709$

Ejemplo 2:

$$37 \times 77 = (30 \times 70 = 2.100) + (100 \times 7 = 700) + (7 \times 7 = 49) = 2.849$$

$$(40 \times 80 = 2.800) + (7 \times 7 = 49) = 2.849$$

Ejemplo 3:

$$67 \times 47 = (60 \times 40 = 2.400) + (100 \times 7 = 700) + (7 \times 7 = 49) = 3.149$$

Ejemplo 4:

$$58 \times 58 = (50 \times 50 = 2.500) + (100 \times 8 = 800) + (8 \times 8 = 64) = 3.364$$

6. Aprendizaje de la división

La división mediante el Algoritmo ABN no tiene nada que ver con el procedimiento tradicional, además quizás sea una de las operaciones que más ventajas tenga frente al tradicional; y aunque en un primer momento parezca más largo y por tanto más complicada, una vez asimilado el proceso es bastante más simple y claro.

La introducción de la división en el algoritmo tradicional requieren ocho pasos previos, frente a sólo tres en el Algoritmo ABN. En el tradicional la secuenciación en su aprendizaje requiere:

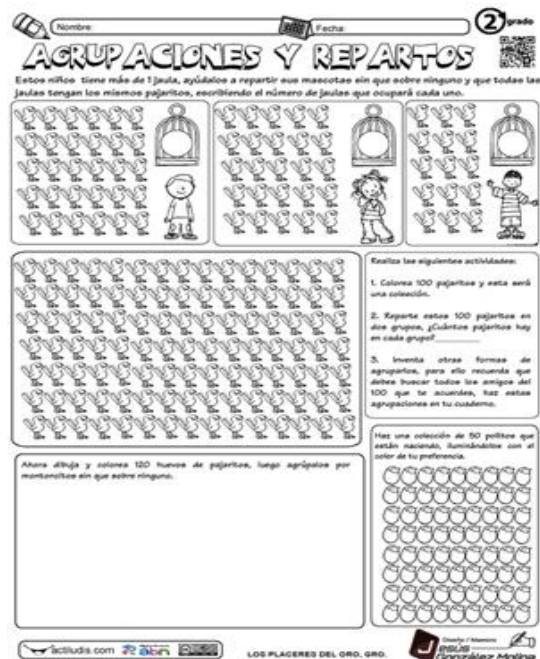
1. *Dominio de la tabla de multiplicar.* Este dominio permite realizar divisiones del tipo 8:4; 72:9;...
2. *Divisiones con cocientes exactos* (Ejemplo: 4268 : 2)
3. *Divisiones con cocientes exactos e inexactos.* Se trata de terminar los cocientes anteriores en un número menor que el divisor, lo cual provocará un resto (Ejemplo: 4261 : 2)
4. *Agregación de restos parciales.* Es el mismo caso anterior, pero ahora el número que genera un resto no está al final sin o en medio, lo cual provoca que componga un número nuevo “bajando la cifra siguiente” uniendo al resto que se ha generado. (Ejemplo: 436 : 2)
5. *El primer número del dividendo es más pequeño que el divisor.* (Ejemplo: 246 : 4; 648: 8)
6. *“Cero al cociente y bajo la cifra siguiente”.* Situación a la que debe llegar el alumno/a cuando para poder continuar la cuenta tiene que componer un nuevo número “bajando” la cifra siguiente del dividendo y añadiendo un cero en el cociente. Esta situación es fuente de muchos errores en el alumnado. (Ejemplo: 618 : 3)
7. *“Cero al cociente al final de la cuenta”.* Situación igual a la anterior pero al final de la cuenta, lo cual también provoca muchos errores al olvidar poner el cero en el cociente. (Ejemplo: 421 : 2)
8. *“Cero al cociente en medio y al final de la cuenta”.* Situación que mezcla las dos anteriores y es fuente de muchísimos errores. (Ejemplo: 803 : 4)

Frente a estos ocho pasos, el Algoritmo ABN tan sólo requiere alcanzar dominio en tres aspectos (Se les verá el sentido cuando estudie el proceso de la división ABN):

1. *Dominio de la tabla de multiplicar.* En el método ABN es necesario dominar las tablas tradicionales, las combinaciones de dígitos con bidígitos (Ejemplo: 41 X 3) y la de estos con decenas, centenas y millares completos (Ejemplos: 20 x 4; 200 x 4; 2000 x 4)
2. *Dominio de las descomposiciones de números elevados.* Este procedimiento separa una parte del dividendo (al que llamamos “dividendo parcial”), que nos permitir realizar un reparto exacto con esa parte descompuesta.
3. *Dominio de la utilización de los restos parciales.* Cuando separamos una parte del dividendo, tal y como se indica en el apartado anterior, se pueden generar restos que llamamos parciales (aún se pueden seguir repartiendo) tanto para hallarlo como para acumularlos a la parte descompuesta y que aún no ha sido repartida.

➤ **Proceso de aprendizaje de la división**

El proceso de aprendizaje de la división comienza con el trabajo de **agrupaciones y repartos**. Se pueden realizar multitud de actividades utilizando los recursos que ofrece la propia clase, pero también se pueden diseñar fichas para trabajar en casa como la que se presenta a continua.



Otro de los aspectos a trabajar para la introducción de la división con el dividendo de dos a más cifras en el algoritmo ABN, es el **cálculo de mitades**. A continuación representa una ficha que sirve de ejemplo para empezar el procedimiento.

Nombre: _____ Fecha: _____

DIVISIÓN MITADES

Encuentra las mitades de los siguientes números. Lo puedes hacer directamente o descomponiendo el número en otros más fáciles. Hay muchas formas, busca la que más te guste. Mira el siguiente ejemplo con el número 158.

Por ejemplo:

758 : 2		OTRA FORMA 758 : 2		OTRA 758 : 2		Y OTRA 758 : 2	
DESCOMPÓN	MITAD	DESCOMPÓN	MITAD	DESCOMPÓN	MITAD	DESCOMPÓN	MITAD
600	⇨ 300	500	⇨ 250	648	⇨ 324	650	⇨ 325
140	⇨ 70	240	⇨ 120	110	⇨ 55	108	⇨ 54
18	⇨ 9	18	⇨ 9				
SUMA ⇨	(379)	SUMA ⇨	(379)	SUMA ⇨	(379)	SUMA ⇨	(379)

Colorea el dibujo según el resultado

AZUL OSCURO 476 : 2		AZUL CLARO 954 : 2		VERDE 840 : 2		ROJO 762 : 2	
DESCOMPÓN	MITAD	DESCOMPÓN	MITAD	DESCOMPÓN	MITAD	DESCOMPÓN	MITAD
SUMA ⇨		SUMA ⇨		SUMA ⇨		SUMA ⇨	

VIOLETA 678 : 2		ROSA CLARO 564 : 2	
DESCOMPÓN	MITAD	DESCOMPÓN	MITAD
SUMA ⇨		SUMA ⇨	

AMARILLO 2 560 : 2	
DESCOMPÓN	MITAD
SUMA ⇨	

NEGRO 12 434 : 2	
DESCOMPÓN	MITAD
SUMA ⇨	

Una vez que han sido trabajadas las mitades, se debe trabajar fichas, como la que sigue. Donde se presentan cálculos muy básicos, para que el alumnado aprenda y se acostumbre al **mecanismo del cálculo de la división**, evitando inicialmente otras dificultades añadidas, como pudiera ser no dominar aún bien las tablas de multiplicar. Se presenta una ficha que trabaja todos las tablas del 3 al 9, para utilizarla antes de pasar a divisiones con dos dígitos en el divisor. También se presentan ejemplos de las primeras divisiones realizadas por alumnos que están iniciándose en la división.

Nombre: _____ Fecha: _____

Colorea los espacios según el color y el resultado de cada operación.

AVISO: Pinta de verde los restos que salgan

NEGRO :2 50	NEGRO :3 69	ROJO :4 45	AMARILLO :5 80
AMARILLO :4 88	AMARILLO :5 65	MARRÓN :3 72	MARRÓN :2 38
MARRÓN :5 85	MARRÓN :4 84	MARRÓN :3 54	MARRÓN :2 40
MARRÓN :5 64	MARRÓN :3 98	MARRÓN :2 93	MARRÓN :4 47

2 = 0m

Cada día, 5 de mayo de 2010.

$$\begin{array}{r} 933 \overline{) 3} \\ 930 \quad 30 \\ \hline 900 \quad 300 \quad 100 \\ 600 \quad 300 \quad 100 \\ \hline 300 \quad 300 \quad 100 \\ \hline 311 \end{array}$$

933	900	300
33	30	10
3	3	1
		311

Ejemplo división entre 3 en 3º E.P.: <http://www.youtube.com/watch?v=op2Fx1VIDV8>

➤ **Formato y algoritmo de la división por una cifra**

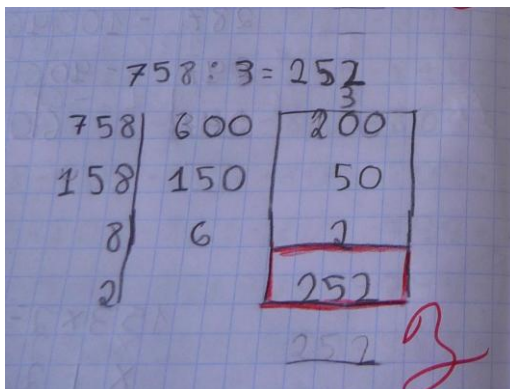
Para la realización de la división por una cifra mediante el Algoritmo ABN necesitaremos cinco columnas, aunque con la práctica se pueden reducir a tres. En los siguientes ejemplos se representan tres formas distintas de llevar a cabo el procedimiento, ya que la facilidad del método permite no sólo tres formas distintas, sino tantas como necesite y adapte a sí mismo el operante. El formato más utilizado es el primero de ellos.

Ejemplo 1:

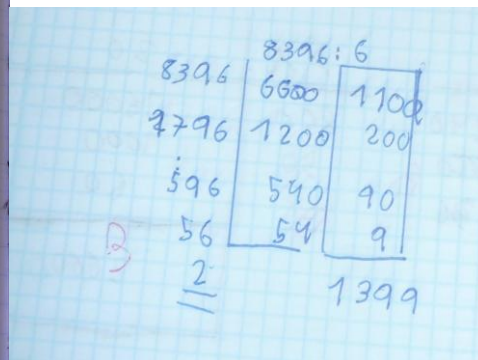
7.896 : 6 =

DIVIDENDO	DIVIDENDO RESULTANTE	COCIENTES PARCIALES
		6
7896	6000	1000
1896	1800	300
96	60	10
36	36	6
		1316

DIVIDENDO	DIVIDENDO RESULTANTE	COCIENTES PARCIALES	REPARTIDO	RESTO PARCIAL	DIVIDENDO	DIVIDENDO RESULTANTE	COCIENTES PARCIALES	REPARTIDO	RESTO PARCIAL
		6					6		
7000		1000	6000	1000	7896	6000	1000	6000	0
800	1800	300	1800	0	1896	1800	300	1800	0
90	90	10	60	30	96	90	10	60	0
6	36	6	36	0	36	36	6	36	0
7896 : 6 =		1316			7896 : 6 =		1316		



Ejemplo 3º E.P.



Ejemplo 4º E.P.

➤ Redondeo en la división

Para explicar el redondeo en la división, se presenta el enlace al siguiente video, en el que se muestra el redondeo utilizado por un alumno de 3º E.P. Recordar que este procedimiento se enseña una vez superado el redondeo de la multiplicación.

Ejemplo división con redondeo en 3º E.P.:

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2013/05/redondeando-la-division-ceip-carlos-iii.html>

➤ Patrones en la división

Al igual que en “los patrones en la multiplicación”, se presentan fichas graduadas en dificultad para que el alumnado que ya conoce la división, descubra las relaciones entre los distintos miembros de la misma, cuando alguno de ellos varia al ser multiplicado/dividido por la unidad seguida de ceros, o duplicado o triplicado. Para ello se les ofrece un ejemplo y varios ejercicios que aumentan la dificultad dentro de la misma ficha. Estos ejemplos se deben trabajar en el aula antes de ser mandados como tarea para casa.

Nombre: _____ Fecha: _____

DESCUBRE EL PATRÓN

Partiendo de la operación que encabeza el robot vamos a variar sus cifras con ceros a la izquierda y con dobles o mitades. Teniendo en cuenta esto averigua el resultado sin necesidad de hacer la multiplicación y colorea el dibujo según su obtenga. (PISTA: Fíjate en el ejemplo y en los resultados anteriores que vayas obteniendo).

$148 : 2 = 74$ $1480 : 2 = 740$ $14800 : 2 = 7400$ $148 : 4 = 37$ $296 : 2 = 148$ $296 : 4 = 74$	$264 : 2 = 132$ ROJO $2640 : 2 =$ $26400 : 2 =$ $264 : 4 =$ $528 : 2 =$ $528 : 4 =$	$240 : 3 = 80$ ROJO $2400 : 3 =$ $24000 : 3 =$ $240 : 6 =$ $480 : 3 =$ $480 : 6 =$
$496 : 4 = 124$ VERDE $49600 : 4 =$ $4960 : 4 =$ $496 : 8 =$ $992 : 8 =$ $992 : 4 =$	$204 : 3 = 68$ VERDE $20400 : 3 =$ $2040 : 3 =$ $204 : 6 =$ $408 : 6 =$ $408 : 3 =$	$192 : 2 = 96$ MARRÓN $19200 : 2 =$ $19200 : 20 =$ $1920 : 2 =$ $192 : 4 =$ $384 : 4 =$

Ejemplo de patrones en la división en 3º E.P.:

<http://www.youtube.com/watch?v=sFPTACTL04g>

➤ **División por dos cifras**

El algoritmo de la división por dos cifras requiere de más elevados procedimientos de estimación que los que se han precisado hasta este momento. También los cálculos son complejos, pues requieren la capacidad de multiplicar dígitos por bidígitos, añadir ceros, si los hay, y recomponer el número resultante. Por ello, este tipo de división sólo se debe abordar cuando se posea un dominio completo de la multiplicación por dos cifras y se han trabajado previamente estos dos aspectos:

- **Creación de escalas:** La estimación del cociente es la destreza nueva que se les exige a los niños, y es algo nuevo para ellos, por lo que ha de ser entrenada y exige que, junto al algoritmo que van a realizar, creen la escala en la que se van a mover a lo largo de toda la operación.
- **Entrenamiento en estimaciones**

Nombre: _____ Fecha: _____

Entrenamiento en la creación y el uso de la escala **DIVISIÓN**

Vamos a crear un "suelo" y un "techo" al dividendo de las divisiones siguientes. Para ello vamos a multiplicar por 10, 100, 1.000... el divisor, para haceremos lo más posible (por arriba y por abajo) al dividendo y calculamos, también, la mitad del techo. Fíjate en el ejemplo.

Ejemplo: $853 : 32$

ESCALA: $32 \times 10 = 320$ (SUELO) $32 \times 50 = 1.600$ (TECHO) $32 \times 100 = 3.200$ (TECHO)

Si no sabes la mitad, descomponlo en otros más fáciles.
 Por ejemplo: Mitad de 3.200 = 1.600
 Mitad de 2.000 = 1.000
 Mitad de 1.200 = 600
 MITAD de 3.200 = 1.600

Dividimos todos los números de la cuadrícula entre 32

Dividendo	ESCALA	Dividendo	ESCALA
$825 : 32$	$32 \times 10 =$ (SUELO) $32 \times 50 =$ (TECHO) $32 \times 100 =$ (TECHO)	$607 : 34$	$34 \times 10 =$ (SUELO) $34 \times 50 =$ (TECHO) $34 \times 100 =$ (TECHO)
$748 : 46$	ESCALA	$972 : 93$	ESCALA
$738 : 62$	ESCALA	$3.888 : 44$	ESCALA
$9.245 : 36$	ESCALA	$8.839 : 23$	ESCALA

Nombre: _____ Fecha: _____

PRÁCTICAS DE ESTIMACIONES **DIVISIÓN**

Vamos a practicar para realizar divisiones de varios dividendos entre un mismo divisor. Para ello primero hacemos la escala y después buscaremos la estimación más apropiada para cada dividendo.

Las estimaciones se hacen mirando la escala y tomando el producto que se acerca más al dividendo. Mira el ejemplo y piensa por qué se ha cogido ese número (haz el producto y comprueba si es acertado o no).

Dividimos todos los números de la cuadrícula entre 43

ESCALA	Números
$43 \times 10 = 430$	450 920 2.235 1.953 5.341
$43 \times 50 = 2.150$	Estimación 10 20 50 40 100
$43 \times 100 = 4.300$	

Dividimos todos los números de la cuadrícula entre 24

ESCALA	Números
$24 \times 10 = 240$	500 325 1.000 1.240 4.800
$24 \times 50 = 1.200$	Estimación
$24 \times 100 = 2.400$	

Dividimos todos los números de la cuadrícula entre 52

ESCALA	Números
$52 \times 10 =$	612 1600 2.450 5.331 15.800
$52 \times 50 =$	Estimación
$52 \times 100 =$	

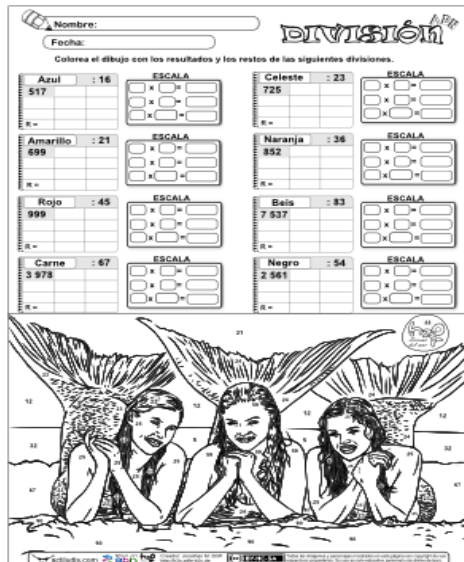
Dividimos todos los números de la cuadrícula entre 36

ESCALA	Números
$36 \times 10 =$	150 418 915 2.000 3.421
$36 \times 50 =$	Estimación
$36 \times 100 =$	

Dividimos todos los números de la cuadrícula entre 45

ESCALA	Números
$45 \times 10 =$	160 750 3.218 6.750 9.450
$45 \times 50 =$	Estimación
$45 \times 100 =$	

Para introducir a la división por dos cifras y la creación de escalas, se pueden utilizar fichas como la siguiente, donde se presenta un espacio para crear la escala que le servirá de apoyo para realizar las estimaciones de los cocientes de la división.



Se han de graduar los tamaños de los divisores. Es bueno comenzar por la segunda decena (de 12 a 19), e ir haciéndolos crecer poco a poco. No es sólo por la dificultad de los cálculos, sino también por lo compleja que pueda ser la elaboración de la escala y, por tanto, las estimaciones que se tienen que realizar.

Ejemplo 1:

8158 : 12 =

		:12	ESCALA
8158			100 = 1200
			500 = 6000
			1000 = 12.000

Si el alumno reparte 1, es evidente que gasta 12. Si 10, 120, si 100, 1200, y si 1000, reparte 12.000. La escala se establece entre los números

1200 y 12.000, que es entre los que está comprendido el dividendo (9158). Una vez establecidos los repartos base (100 y 1000), se determina la mitad del mayor (que es 500). Y tras ello comienza la primera estimación.

		:12	ESCALA
8158	7200	600	100 = 1200
958			500 = 6000
			1000 = 12.000

El dividendo está comprendido entre 6000 y 12.000. Y notablemente más cerca del 6000 que del 12.000. Por ello, se calcula que el cociente parcial que corresponde es el 600 ó

el 700. Se les aconseja a los niños que sean conservadores, esto es, que es mejor que se queden cortos que no que se pasen. Por ello, aquí han comenzado repartiendo 600. Han multiplicado 600 por 12 y han determinado la cantidad repartida (7200). La han traído del dividendo y les ha aparecido un nuevo dividendo: 958.

El nuevo dividendo se “sale” de la escala, por lo que la recomponemos eliminando un orden de unidades. Ahora la escala va de 10 hasta 100, y su mitad es 50. O dicho de

otra manera: ya no se pueden repartir cientos, por lo que hay que pasar a repartir dieces. Normalmente los niños y niñas tachan un cero a cada uno de los términos de la igualdad.

		:12	ESCALA
8158	7200	600	100 = 1200
958	840	70	500 = 6000
118			1000 = 12000

Ahora, 958 está entre 50 y 100. Una estimación conservadora nos hace decantarnos por un reparto de 70. Por tanto, se reparten 840 y quedan 118.

Siempre que hemos hecho bien la estimación, se da un salto en la escala. Ahora el nuevo dividendo está comprendido entre el reparto de 1 y el reparto de 10. Como está muy cerca de 120, es evidente

que se han de repartir 9. Se hace, se sigue la misma dinámica y se acaba la operación. Se han repartido 679 (cociente) y han sobrado 10 (resto).

		:12	ESCALA
8158	7200	600	100 = 1200
958	840	70	500 = 6000
118	108	9	1000 = 12000
10		679	

Para comenzar la división por otras cifras de dos dígitos, podemos proponer ejercicios de elaboración de escalas más avanzadas:

2168 : 18	6847 : 22	9000 : 38	64.125 : 72
			100 = 7200
			500 = 36.000
			1000 = 72.000

Ejemplo división por bidígito con escala 4º E.P.:

<http://www.youtube.com/watch?v=k9KeeyeHAXU>

Ejemplo división por bidígito con escala 4º E.P.:

http://www.youtube.com/watch?v=Y5Zv9PUx6_s

Ejemplo división por estimación 3º E.P.:

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2013/02/division-por-estimacion.html>

Ejemplo división por aproximación y estimación 4º E.P.:

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2013/11/division-por-aproximacion-y-estimacion.html>

➤ División con decimales en el divisor

Sigue un planteamiento distinto respecto del algoritmo tradicional, y no presenta apenas diferencias con el que se acaba de explicar en el punto anterior. No hay, por tanto, eliminación de decimales en el divisor y consiguiente multiplicación por la unidad seguida de ceros en el dividendo. En este sentido, el resto es el resto real, y no el transformado que se obtiene en la operación clásica.

Ejemplo 1:

¿Cuántas botellas de agua de 2'5 litros se llenarán con una cuba que contiene 8158 litros?

$$8158 : 2.5 =$$

		:2'5	ESCALA
8158	7500	3000	1000 = 2500
658	500	200	5000 = 12500
158	150	60	10000 = 25000
8			

Los primeros pasos para la resolución son los mismos que en el caso sin decimales, hasta que llegamos a la cifra de las décimas.

Para este último paso no hace falta ninguna escala. Se rellenan tres botellas, se gastan 7'5 litros y sobra únicamente medio litro. En total se rellenan 3263 botellas.

		:2'5	ESCALA
8158	7500	3000	1000 = 2500
658	500	200	5000 = 12500
158	150	60	10000 = 25000
8	7'5	3	
0'5		3263	

Inicio división con decimales en 3º E.P.:

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2011/03/dividir-con-decimales-en-tercero.html>

Sacar decimales en la división en 3º E.P.:

<http://www.youtube.com/watch?v=KFJatvmPRyQ>

División con decimales en el divisor en 4º E.P.:

<http://www.youtube.com/watch?v=Ga-uP2U89nU>

7. Problemas de Escala y Magnitudes

➤ Estructuras multiplicativas

Los tipos de categorías semánticas básicas dentro de esta estructura son:

- 1. Isomorfismo de medidas:** Los datos del problema tienen la misma naturaleza.
 - El producto es de la misma naturaleza que el multiplicando.
 - El producto es de distinta naturaleza que el multiplicando.
- 2. Escalares grandes y pequeños:** Uno de los datos representa una relación comparativa.
- 3. Producto cartesiano:** Multiplicación geométrica.

1. Isomorfismo de medidas

ID.	MODELO	MD	MR	PR	NR	T°P	NE
IM1	Un bar arroja cada día 12 botellas al contenedor. ¿Cuántas arroja en 8 días?	12	8	?	MN	M	3°
IM2	Un bar ha arrojado 96 botellas al contenedor en 8 días. ¿Cuántas arroja cada día?	?	96	8	MN	DP	3°
IM3	Un bar ha arrojado 96 botellas al contenedor. Cada día tira 12. ¿En cuántos días ha arrojado las 96 botellas?	12	?	96	DN	DC	3°

ID.	MODELO	MD	MR	PR	NR	T°P	NE
IM1	¿Cuánto cuestan 12 libros a 8 € cada uno?	12	8	?	MN	M	3°
IM2	He pagado 96 € por 12 libros. ¿Cuánto cuesta cada uno?	12	?	96	MN	DP	3°
IM3	He comprado libros, al mismo precio, por 96 €. Cada libro me ha costado 8 €. ¿Cuántos he comprado?	?	8	96	DN	DC	3°

CLAVE: ID: Identificación. MD: Multiplicando. MR: Multiplicador. PR: Producto. NR: Naturaleza del resultado (MN: Misma naturaleza que el multiplicando o el dividendo. DN: Distinta naturaleza del multiplicando o del divisor). TIP: Tipo de problema (M: Multiplicar. DP: División partición. DC: División cuotición.). NE: Nivel educativo

2. Escalares grandes y pequeños

ESCALARES GRANDES

ID.	MODELO	MD	MR	PR	NR	T`P	NE
EG1	Luis tiene 12 €. Irene tiene 5 veces más dinero. ¿Cuánto dinero tiene Irene?	12	5	?	MN	M	3°
EG2	Irene tiene 60 €, que es 5 veces más que lo que tiene Luis. ¿Cuánto dinero tiene Luis?	?	5	60	MN	DP	4°
EG3	Irene tiene 60 €. Luis tiene 12 €. ¿Cuántas veces más dinero tiene Irene que Luis?	12	?	60	DN	DC	4°

ESCALARES PEQUEÑOS

ID.	MODELO	MD	MR	PR	NR	T`P	NE
EP1	Luis tiene 12 €, y tiene 5 veces menos dinero que Irene. ¿Cuánto dinero tiene Irene?	12	5	?	MN	M	5° 6°
EP2	Irene tiene 60 €, y Luis tiene 5 veces menos dinero que Irene. ¿Cuánto dinero tiene Luis?	?	5	60	MN	DP	5° 6°
EP3	Irene tiene 60 €. Luis tiene 12 €. ¿Cuántas veces menos dinero tiene Luis?	12	?	60	DN	DC	5° 6°

CLAVE: ID: Identificación. MD: Multiplicando. MR: Multiplicador. PR: Producto. NR: Naturaleza del resultado (MN: Misma naturaleza que el multiplicando o el dividendo. DN: Distinta naturaleza del multiplicando o del divisor). TIP: Tipo de problema (M: Multiplicar. DP: División partición. DC: División cotición.). NE: Nivel educativo.

3. Producto cartesiano

ID.	MODELO	MD	MR	PR	NR	T`P	NE
PC1	Andrea tiene 4 faldas y 3 blusas. ¿De cuántas maneras diferentes se puede vestir con esas prendas?	4	3	?	DN	M	5° 6°
PC2	Andrea puede combinar sus faldas y blusas de 12 maneras distintas. Si tiene 4 faldas, ¿cuántas blusas tendrá?	4	?	12	DN	D	5° 6°

CLAVE: ID: Identificación. MD: Multiplicando. MR: Multiplicador. PR: Producto. NR: Naturaleza del resultado (MN: Misma naturaleza que el multiplicando o el dividendo. DN: Distinta naturaleza que las cantidades. TIP: Tipo de problema (M: Multiplicar. D: División.). NE: Nivel educativo.

➤ **Secuencia en segundo ciclo**

3° E.P.	4° E.P.
CA3, CA4, CA5	CA1 a CA6
CO2	CO1 y CO2
CM1, CM5	CM1 a CM6
IG1, IG3	IG1 a IG6
IM1, IM2, IM3	IM1, IM2, IM3
EG1	EG2, EG3

RESUMEN SECUENCIACIÓN 3 y 4º EP

- CÁLCULO MENTAL Y NUMERACIÓN CON:

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2011/01/calculo-mental-en-tercero-i.html>









<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2011/01/calculo-mental-entercero-ii.html>

o **Escalera ascendente y descendente.**



<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/search/label/Sustracci%C3%B3n.%20%20%C2%BA%20de%20Primaria.%20Formato%20en%20escalera%20descendente>

o **Símbolos.**

 + 1.000	 + 100	 +10	 +1
 -1.000	 -100	 -10	 -1

Ej.: 980              = 2.423

o **Composición y descomposición.**

<http://abnenserafina.blogspot.com.es/2012/10/descomposiciones-hasta-la-unidad-de-mil.html>

12 C 18 D 4 U = ¿? → 1384

2 C 18 D 4 U x 6 = ¿? → 12 C 108 D 24 U = 2304

NOMBRE: _____ FECHA: _____

CENTENAS DE MILLAR, DECENAS DE MILLAR, UNIDADES DE MILLAR, CENTENAS, DECENAS, UNIDADES.

Descompón con cifras y con letras de distintas formas en el adosado.

348.007						
CM	DM	UM	C	D	U	

- Averiguar la cifra que falta en una descomposición.

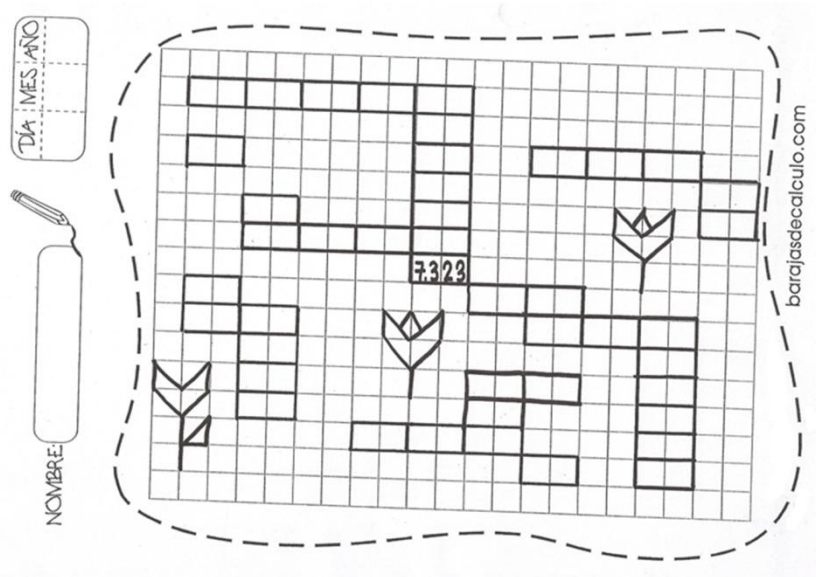
<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2011/12/numeracion-valor-de-posicion.html>

1438			
UM	C	D	U
1	1	¿? = 33	8



¿Cuántas decenas faltan?

- Trozos de la tabla con números más grandes.



- Descomposición de número con cualquier operación (lo que en primer ciclo se trabaja con los amigos del sol o la actividad de “maneras de encontrar el número....”).

- Repaso de los complementarios.

- El uso extensivo del redondeo y la compensación.

El **redondeo**: importante en sumas y multiplicaciones más avanzadas.

La **compensación** tiene más significado en la suma y la resta

$3268 + 1980 = 5268 - 20 = 5248$ \downarrow $+2000$
$3245 - 967 = 2245 + 33 = 2278$ \downarrow -1000

- Numeración en cualquier base (hasta 6).

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2012/10/paso-del-sistema-binario-al-decimal-y.html>

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2012/06/cambios-de-base-en-1.html>

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2011/12/numeracion-en-cualquier-base.html>

<http://elblogdelamaestrasara.blogspot.com.es/search?updated-min=2012-01-01T00:00:00%2B01:00&updated-max=2013-01-01T00:00:00%2B01:00&max-results=30>

BASE 5

	125	25	5	1
160	1	1	2	0
87		3	2	2
107		4	1	2

BASE 4

	64	16	4	1
96	1	2	0	0
87	1	1	2	3
107	1	2	1	0

- Diferenciar cifra y valor de cada una de ellas.

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2011/12/numeracion-valor-de-posicion.html>

	Cifra de C	Nº de C	Cifra de D	Nº de D	Cifra de U	Nº de U
234	2	2	3	23	4	234
356	3	3	5	35	6	356

- Dictado de números descompuestos. Ej: 4D y 2U, 3U y 2D, 39 D, 10D y 5 U,...

- **Añadir órdenes de unidades a números.**

Número	Añado	Resulta	Número	Añado	Resulta
809	1 unidad	810	810	1 centena	910
99	1 unidad		899	1 unidad	
99	1 centena		109	1 decena	

- OPERACIONES:

- **Sumas y restas con el formato posicional (CM, DM, UM, C, D, U).**

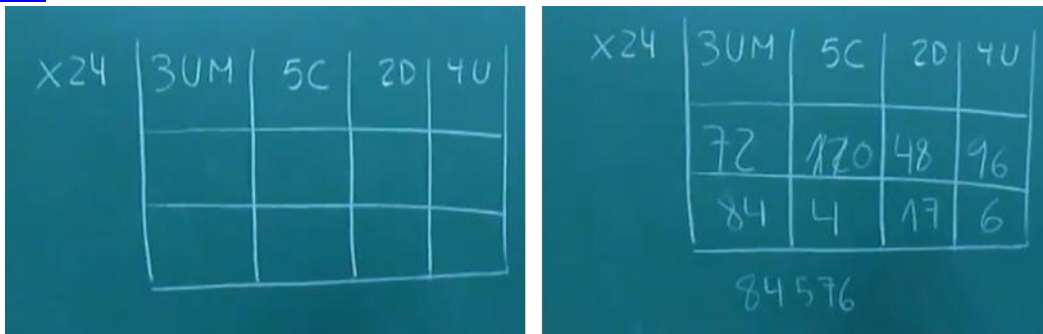
<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2011/12/suma-posicional.html>

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2011/11/sustraccion-por-ordenes-de-unidades.html>

- **Multiplicaciones y divisiones con el formato posicional.**

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2010/05/multiplicacion-por-una-cifra-metodo-abn.html>

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2012/05/multiplicaciones-por-dos-cifras-en-4-de.html>



- **Producto: tablas extendidas.**

<http://abnenserafina.blogspot.com.es/2013/02/3-tablas-ampliadas-ii.html>

- **Patrones de productos.**

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2013/10/patrones-del-producto.html>

$52 \times 7 = 364$	$___ \times 7 = 3.640$	$52 \times 7 = 364$	$520 \times 7 = 3.640$
$___ \times 7 = 36'4$	$52 \times ___ = 3640$	$5'2 \times 7 = 36'4$	$52 \times 70 = 3640$
$52 \times ___ = 36'4$	$5'2 \times 70 = ___$	$52 \times 0'7 = 36'4$	$5'2 \times 70 = 364$

DESCUBRE EL PATRÓN

Partiendo de la operación que encabeza el robot vamos a variar sus cifras con ceros a la izquierda y con dobles o mitades. Teniendo en cuenta esto averigua el resultado sin necesidad de hacer la multiplicación y colorea el dibujo según su etiqueta. (PISTA: Fíjate en el ejemplo y en los resultados anteriores que vas a obteniendo).

142 X 2 = 284
1420 X 2 = 2840
14200 X 2 = 28400
142 X 4 = 568
284 X 2 = 568
142 X 20 = 2840

164 X 2 = 328
1640 X 2 = 3280
16400 X 2 = 32800
164 X 4 = 656
328 X 2 = 656
164 X 20 = 3280

214 X 3 = 642
2140 X 3 = 6420
21400 X 3 = 64200
214 X 6 = 1284
428 X 3 = 1284
214 X 30 = 6420

210 X 4 = 840
2100 X 4 = 8400
21000 X 4 = 84000
210 X 8 = 1680
210 X 2 = 420
105 X 4 = 420

120 X 6 = 720
1200 X 6 = 7200
12000 X 6 = 72000
120 X 3 = 360
240 X 3 = 720
120 X 60 = 7200

234 X 5 = 1170
2340 X 5 = 11700
23400 X 5 = 117000
234 X 50 = 11700
1170 X 5 = 5850
468 X 5 = 2340

Los patrones se deben utilizar una vez que el alumno tenga cierto dominio de las tablas de multiplicar y la resolución de productos mentalmente.

$5 \times 5 = 25$		$5 \times 5 = 25$
$65 \times 5 = \underline{\quad}$	➔	$65 \times 5 = 325$
$165 \times 5 = \underline{\quad}$	-	$165 \times 5 = 825$
$4.165 \times 5 = \underline{\quad}$		$4.165 \times 5 = 20825$

$4 \times 4 = 16$		$4 \times 4 = 16$
$64 \times 4 = \underline{\quad}$		$64 \times 4 = 256$
$164 \times 4 = \underline{\quad}$	➔	$164 \times 4 = 656$
$4.164 \times 4 = \underline{\quad}$		$4.164 \times 4 = 12.656$
$83.164 \times 4 = \underline{\quad}$		$83.164 \times 4 = 332.656$

- División: tablas extendidas.

<http://abnenserafinablogspot.com.es/2013/02/3-tablas-ampliadas-para-dividir.html>



- **División por aproximación.**

<http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2013/11/division-por-aproximacion-y-estimacion.html>

- PROBLEMAS: SUMAS, RESTAS, MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN CON DECIMALES.

[http://algoritmosabn.blogspot.com.es/search/label/Producto.%203%C2%BA%20de%20Primaria.%20Decimales.](http://algoritmosabn.blogspot.com.es/search/label/Producto.%203%C2%BA%20de%20Primaria.%20Decimales)

- **Usar folletos de publicidad y billetes y monedas para las distintas operaciones con decimales.**

Bibliografía

- De la Rosa Sánchez, J.M. (2011). División ABN en www.actiludis.com
- De la Rosa Sánchez, J.M. (2011). División por 1 cifra en www.actiludis.com
- De la Rosa Sánchez, J.M. (2011). División por 2 cifras en www.actiludis.com
- De la Rosa Sánchez, J.M. (2011). Entrenamiento en estimaciones para la división por dos cifras en www.actiludis.com
- De la Rosa Sánchez, J.M. (2011). Patrones en la división en www.actiludis.com
- Martínez Montero, J. (2010). Algoritmos abiertos basados en números. La división. Cádiz.
- Martínez Montero, J. (2010). Algoritmos abiertos basados en números. La multiplicación o producto. Cádiz.
- Martínez Montero, J. (2011). El método de cálculo abierto basado en números (ABN) como alternativa de futuro respecto a los métodos tradicionales cerrados basados en cifras (CBC). *Bordón*, 63 (4). Pp. 95-110.
- Martínez Montero, J., y Sánchez Cortés, C. (2011). Desarrollo y mejora de la inteligencia matemática en le Educación Infantil. Madrid: Wolters Kluwer.
- Martínez Montero, J. (2010). Enseñar matemáticas a alumnos con necesidades educativas especiales. Madrid: Wolters Kluwer.
- Martínez Montero, J. (2008). Competencias básicas en matemáticas. Una nueva práctica. Madrid: Wolters Kluwer.
- Martínez Montero, J. (2001). Los efectos no deseado (y devastadores) de los métodos tradicionales de aprendizaje de la numeración y de los algoritmos de las cuatro operaciones básicas. *Epsilon*, 49. Pp. 13-26.
- Martínez Montero, J. (2000). Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI. Bilbao: CISS-Praxis.