Problema 6

Troba totes les ternes d'enters positius (x, y, z), amb $z > 1$, que satisfan simultàniament que

x divideix a $y+1$, $\quad$ y divideix a $z-1$, $\quad$ z divideix a x^2+1

Siga $a \in \mathbb{N}$: $ax = y+1 \iff y = ax-1$.

Siga $b \in \mathbb{N}$: $by = z-1 \iff abx - b = z-1 \iff z = abx - b + 1$

Siga $c \in \mathbb{N}$: $cz = x^2+1 \iff abcx - bc + c = x^2+1 \iff$

$\iff x^2 - abcx + bc - c + 1 = 0,$

on només hem fet servir la definició de divisibilitat $(A \mid B \iff \exists C : AC = B)$

Així, ens queda una quadràtica en x, que podem resoldre segons

$$x = \frac{abc \pm \sqrt{(abc)^2 - 4bc + 4c - 4}}{2}$$

Donat que $abc, x \in \mathbb{N}$, el discriminant $\Delta = (abc)^2 - 4bc + 4c - 4$ haurà de ser un quadrat perfecte.

Suposem ara que $c > 2$. Llavors, es compleix que:

① $bc + 1 > c \iff (abc)^2 > (abc)^2 - 4bc + 4c - 4 \quad (\forall c)$

② $c(ab - b + 1) \overset{\circledast}{>} 2 \iff (abc)^2 - 4bc + 4c - 4 > (abc)^2 - 4abc + 4 \quad (c > 2)$

$\circledast$ ja que $a \geq 1 \iff ab - b \geq 0 \iff ab - b + 1 \geq 1$

Per consegüent, per a $c > 2$:

$$(abc)^2 \overset{①}{>} \Delta = (abc)^2 - 4bc + 4c - 4 \overset{②}{>} (abc-2)^2.$$

És a dir, Δ es troba estrictament comprés entre dos quadrats perfectes.

i, per ser $abc - (abc-2) = 2$, tenim que $\Delta = (abc-1)^2$.

Ara bé, si $\Delta = (abc-1)^2$, $x = \dfrac{abc \pm (abc-1)}{2} \notin \mathbb{N}$ per ser el numerador imparell i el denominador parell.

Suposem, doncs, que $c \leq 2$.

CAS 1) $\underline{c=1}$

Queda el sistema $\begin{cases} ax = y+1 \\ by = z-1 \\ z = x^2+1 \end{cases}$,

d'on $x = \dfrac{y+1}{a}$ i $z = by+1 = x^2+1 \Leftrightarrow by = x^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2by = (y+1)^2 \Rightarrow y \mid (y+1)^2 = y^2+2y+1 \Rightarrow y \mid 1 \Leftrightarrow y=1.$

En ser $y=1$, $ax = 2 \Rightarrow x \mid 2 \Rightarrow x = 1, 2$;

d'on obtenim les solucions $(x,y,z) = (1,1,2), (2,1,5)$

CAS 2) $\underline{c=2}$

Queda $x = \dfrac{2ab \pm \sqrt{4(ab)^2-8b+4}}{2}$.

Si $a>1$, $(2ab)^2 > \Delta = 4(ab)^2-8b+4 > (2ab-2)^2$, per la qual cosa $\Delta = (2ab-1)^2 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$.

Si $a=1$, $x = \dfrac{2b \pm \sqrt{4(b-1)^2}}{2} = b \pm (b-1) = \left\langle \begin{matrix} 2b-1 \\ 1 \end{matrix} \right.$

Per a $x = 2b-1$, es compleix $\begin{cases} 2b-1 = y+1 \\ by = z-1 \\ 2z = (2b-1)^2+1 \end{cases}$,

d'on obtenim la solució infinita $(x,y,z) = (2b-1,\ 2b-2,\ 2b^2-2b+1)$.
$\hookrightarrow y \geq 1 \Rightarrow b \geq 2$

Amb tot, les ternes demanades són $(1,1,2)$, $(2,1,5)$ i $(2b-1,\ 2b-2,\ 2b^2-2b+1)$ $\forall b \in \mathbb{N} : b \geq 2$, i hem acabat //