

Mathema



En este número...

Matemàtiques a la Biblioteca
Història de l'Institut

Article: Felix Klein: Un pioner en
la Geometria i la Teoria de Grups

Problemes per a pensar

Entretenimats!

La frase...

“La matemàtica, d’una forma general, és, fonamentalment, la ciència de les coses que són evidents per si mateixa.”

“Si un teorema porta el nom d’un matemàtic, és segur que este matemàtic no és el seu inventor.”

“Sempre hauria de demanar-se que un assumpte matemàtic no se considere esgotat fins que haja arribat a ser intuitivament evident.”

Felix Klein (1849-1925), matemàtic alemany

El departament de matemàtiques acull a una alumna en pràctiques del Màster de Professorat de Secundària



Elena Pérez Cantero, alumna del Màster d'Educació Secundària, en l'especialitat de Matemàtiques, està realitzant les seues pràctiques docents en l'IES Lluís Vives, baix la tutorització de la professora Mercè Fuster i ens acompanyarà al llarg del primer trimestre de l'any. Reconeix sentir-se “encantada de poder aprendre de tots els professionals que treballen en este centre, així com de l'alumnat, i continuar creixent com a futura docent. El meu objectiu és inspirar a les futures generacions, demostrant que les matemàtiques no sols són una disciplina acadèmica, sinó una eina poderosa per a entendre el món que ens envolta.”

Elena (Caudete, 2002) va començar els estudis al seu poble on va romandre fins completar el Batxillerat en 2020, reconeguent, que va ser en esta etapa on la seua fascinació per les matemàtiques va començar a prendre forma, guiant-la cap al camí que hui continua recorrent.

En 2020, es va traslladar a València per a estudiar el Grau en Matemàtiques a la Universitat de València, vivint una experiència que segons ella mateixa relata: “no sols em va reptar acadèmicament, sinó que també em va permetre créixer a nivell personal.” Durant el tercer any de carrera, va tindre l'oportunitat de completar la seua formació fent una estància a la Universitat de Bolonya (Itàlia) una de les universitats més antigues i prestigioses d'Europa.

Després de finalitzar el grau en 2024, va decidir dedicar-se a la docència i cursar el Màster de professorat, ja que “Al llarg d'este camí, he après que el coneixement no té fronteres i que l'educació és la clau per a obrir infinites portes.”

Matemàtiques a la Biblioteca Històrica de l'Institut

La comissió de Patrimoni de l'IES Lluís Vives vetlla per conservar i difondre les meravelles del fons patrimonial que poseix el nostre. Una tasca desinteressada i altruista sense la que quedarien en l'oblit molts tresors desconeguts, fins i tot, per als que treballem en el centre tots els dies.



Imatge 1. Reproducció del plànol de València realitzat pel Pare Thomas Vicente Tosca a 1704, que també forma part de l'exposició

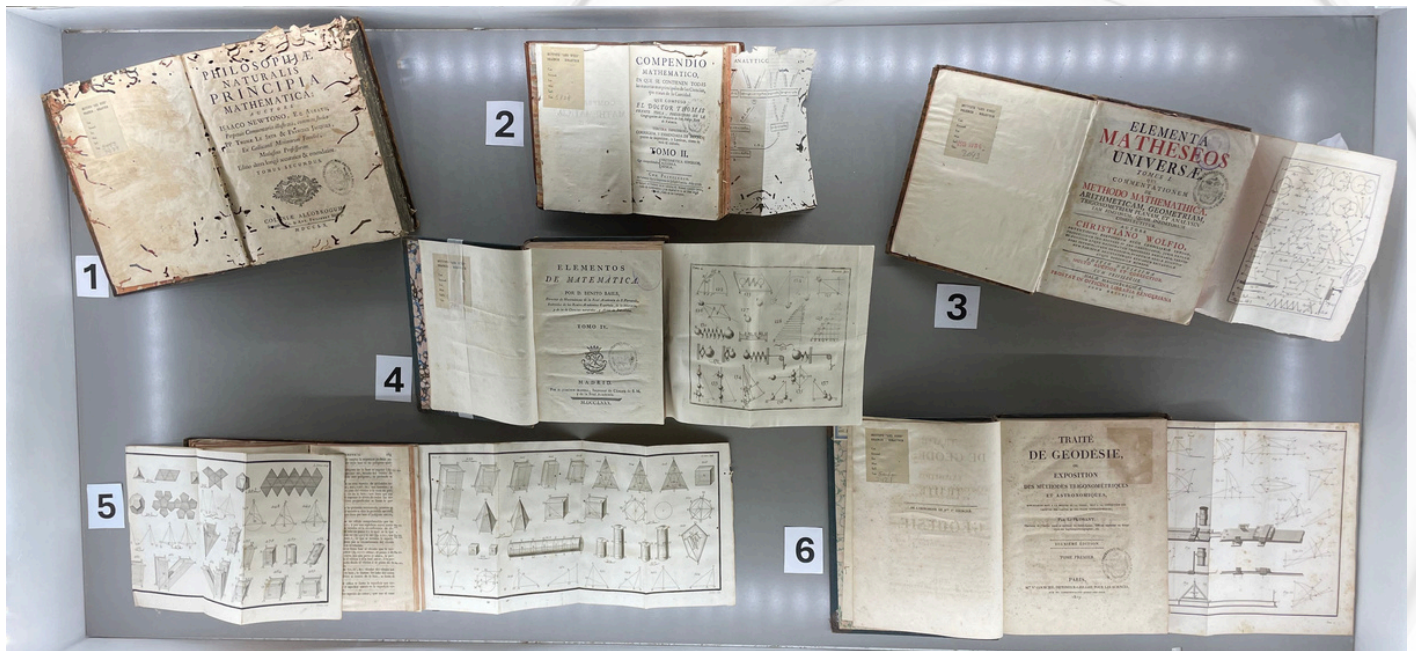
Fruit d'esta labor és l'exposició que des d'este mes de febrer es pot vore a la zona de despatxos del centre i que porta com a títol: Matemàtiques a la Biblioteca Històrica de l'Institut i mostra un total de 6 llibres originals i la reproducció d'un plànol de la ciutat de València.

Junt amb cadascun dels exemplars apareix una xicoteta descripció de l'obra, així com de la seua importància històrica, que reproduïm en la pàgina següent.

Tot i haver intentat contactar amb els membres de la comissió de patrimoni per a acreditar-los adequadament en esta notícia, esta comunicació ha segut infructuosa, així que no tenim informació de les persones responsables de l'exposició ni dels textos per a poder citar-les, ni tampoc de la data fins quan es podrà vore l'exposició.



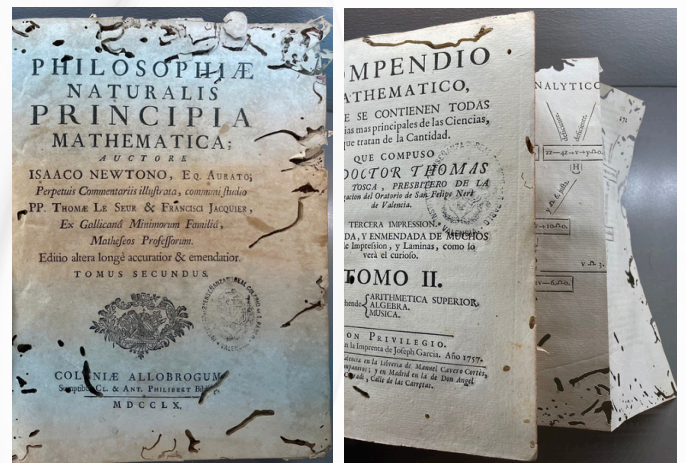
Revista Mathema
Edició on-line
ISSN: 3020-9803
Edita: IES Lluís Vives
Responsable: José Das
València, Febrer de 2025



Imatge 2. Fotografia del sis exemplars de la Biblioteca Històrica exposats a la zona de despatxos.

1. Els *Principia Mathematica* és l'obra mestra d'**Isaac Newton**, publicada per primera vegada el **1687** baix el títol complet *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Este llibre és considerat un dels treballs més importants en la història de la ciència. En esta obra, Newton va formular les **lleis del moviment** i la **lei de la gravitació universal**. Els *Principia* van revolucionar la física i van establir les bases per a la mecànica clàssica. A més, van demostrar el poder de les matemàtiques com a eina per descriure fenòmens naturals.
2. El *Compendio Matemático* de **Thomas Vicente Tosca** és una obra enciclopèdica publicada entre **1707 i 1715**. El contingut d'esta obra inclou disciplines com la geometria, aritmètica, àlgebra, trigonometria, logarítmica, astronomia, geografia, òptica, perspectiva, música, mecànica, estàtica, hidrostàtica, hidràulica, agrimensura, topografia, artilleria, nàutica, cronologia i arquitectura civil i militar. Tosca, un matemàtic i astrònom valencià del segle XVIII, va utilitzar els seus coneixements de geometria per a dibuixar el seu famós pla de València, publicat en 1704. Este pla és notable per la seua precisió i detall, representant la ciutat de València amb gran exactitud.
3. *Elementa Matheseos Universae* és una obra escrita per **Christian Wolff**, un filòsof i matemàtic alemany del segle XVIII. Publicada en diverses parts entre **1713 i 1732**, esta obra abasta una àmplia gamma de temes científics i matemàtics. Es dividix en cinc volums, cadascun cubrint diferents àrees del coneixement. El primer volum tracta sobre aritmètica, geometria i trigonometria, mentre que el segon volum se centra en la mecànica i la hidrostàtica. Els volums posteriors aborden l'òptica, l'astronomia, la geografia i altres disciplines.
4. *Elementos de Matemática* és una obra monumental escrita de **Benito Bails**, publicada el **1780**. Este llibre es considera un dels textos més destacats en l'ensenyament de les matemàtiques a Espanya durant el segle XVIII. Benito Bails va ser un matemàtic i arquitecte espanyol. La seua obra consta de múltiples volums on tracta una àmplia gamma de temes matemàtics, incloent-hi el càlcul infinitesimal i la geometria analítica i integrant temes de Dinàmica, Òptica i Astronomia.

5. El *Curso de matemáticas* per a l'ensenyament dels cavallers seminaristes del Reial Seminari de Nobles a Madrid, publicat el **1798**, és l'obra més coneguda de **Tadeo Lope i Aguilar**, un matemàtic i escriptor espanyol del segle XVIII. Este llibre va ser dissenyat per a l'educació dels seminaristes i abasta una varietat de temes matemàtics, incloent-hi aritmètica, geometria i logaritmes. El llibre és notable pel seu enfocament didàctic i el seu intent de accessible la matemàtica als estudiants d'esta època.
6. El *Traité de Géodésie* de **Louis Puissant**, publicat per primera vegada el **1805**, és una obra fonamental en el camp de la geodèsia. En este tractat, Puissant exposa els mètodes trigonomètrics i astronòmics aplicables a la mida de la Terra i a la confecció de cartes i plànols topogràfics. El llibre es dividix en diversos volums i abasta temes com la triangulació, l'anivellament, la determinació de coordenades geogràfiques i l'elaboració de mapes precisos.



Imatge 3. Detall dels danys ocasionats per diversos insectes (arnes i corcs, principalment) en els llibres de l'exposició.

Des de Mathema volem agrair a la Comissió de Patrimoni la seua tasca, així com sol·licitar a les administracions públiques i privades la seua col·laboració per a dotar al centre de recursos i poder conservar i difondre el ric patrimoni històric i cultural que té l'institut i que s'està fent malbé per la falta de manteniment.

Felix Klein: Un pioner en la Geometria i la Teoria de Grups

José R. Das López

Catedràtic de Matemàtiques. Cap del departament de Matemàtiques de l'IES Lluís Vives

e-mail: jr.das@edu.gva.es

Resum: Felix Klein, del que enguany es complixen 100 anys de la seua mort, és conegut pel seu "Programa de Erlangen", presentat en 1872, que va proposar una nova manera de classificar les geometries basant-se en la teoria de grups. Este enfocament revolucionari va unificar les geometries euclidianes i no euclidianes sota un marc comú. A més, Klein va fer importants aportacions en el camp de les funcions el·líptiques i automorfes, i va treballar en la geometria projectiva, demostrant que tant la geometria euclidiana com la no euclidiana són casos particulars d'esta.

Klein va ser un defensor de la reforma educativa a Alemanya i va jugar un paper crucial en la fundació de l'Enciclopèdia de Ciències Matemàtiques. El seu enfocament en l'ensenyament de les matemàtiques va influir en la forma en què s'ensenyen les matemàtiques a les escoles i universitats de tot el món.

Fèlix Klein va nèixer el 25 d'abril de 1849, a Düsseldorf, antiga Prússia, i va morir el 22 de juny de 1925 en Göttingen, Alemanya. Son pare era el secretari del cap de govern prussià. Precissament, Fèlix Klein va nèixer durant una revolució contra els prussians, que va ser finalment avortada en l'estiu de 1849.

Klein va estudiar en el Gymnasium de Düsseldorf i després de graduar-se, va entrar en la universitat de Bonn, on va estudiar matemàtiques i física durant 1865-1866. Va començar la carrera amb la intenció de ser físic. D'estudiant va ser assignat com a ajudant de laboratori de Plücker. En 1866, Plücker tenia una càtedra de matemàtiques i física experimental a Bonn però, l'interès de Plücker era la geometria. Klein es va doctorar sota la supervisió de Plücker, en 1868, amb la tesi *Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Koordinaten auf eine kanonische Form*, sobre geometria i aplicacions a la mecànica. En ella va classificar les línies complexes de segon grau usant la teoria de divisors elementals de Weierstrass.

Ixe mateix any Plücker va morir deixant el seu treball sobre els fonaments de la geometria lineal incomplet. Klein va completar la segona part de la Neue Géometrie dónes Raumes i este treball li va posar en contacte amb Clebsch. Clebsch se n'havia anat a Göttingen en 1868 i, durant 1869, Klein va fer visites a Berlin, París i Göttingen.



Imatge 1. Fotografia de Fèlix Klein

Al juliol de 1870, Klein estava a París quan Bismarck, el canceller prussià, va publicar un missatge que va provocar i va enfurir al govern francès. França va declarar la guerra a Prússia el 19 de juliol i Klein va haver d'abandonar París. Durant un curt període, va fer el servei militar en el servei mèdic, abans de ser nomenat lector en la universitat de Göttingen en 1871. En 1872, Klein va ser nomenat professor en Erlangen, en Bavaria en el sud d'Alemanya. Va ser secundat per Clebsch, que estava convençut que Klein s'anava a convertir en un dels matemàtics líders de la seua època. Klein va aconseguir la seua primera càtedra amb només 23 anys.

No obstant això, Klein no va crear escola en Erlangen on hi havia molt pocs estudiants. En 1875, va acceptar l'ofertament d'una càtedra en el Technische Hochschule de Munic. Allí, al costat del seu col·lega Brill, va impartir cursos avançats a un gran número d'excel·lents alumnes. Entre ells estaven Hurwitz, von Dyck, Rohn, Runge, Planck, Bianchi i Ricci-Curbastro. En 1875, Klein es casa amb Anne Hegel, una néta del gran filòsof Georg Wilhelm Friedrich Hegel.

Esta reforma va anar implantant-se paulatinament en tot el món: començant pels països de tradició catòlica, i finalitzant en els de fe ortodoxa (Grècia ho va fer en 1923). Després de cinc anys en el Technische Hochschule de Munic, Klein va ser nomenat catedràtic de geometria de Leipzig. Allí tindria com a col·legues a diversos joves i talentosos lectors, com von Dyck, Rohn, Study and Engel. Des de 1880 a 1886, Klein va estar a Leipzig i ixos anys van ser fonamentals en la seua vida. La seua salut era delicada i en la tardor de 1882 va caure malalt i posteriorment deprimí fins a 1884. En 1886, amb la seua carrera investigadora quasi acabada va acceptar una càtedra en la universitat de Göttingen. Va ensenyar en Göttingen fins al seu retir en 1913, però havent convertit a Göttingen en un dels centres d'investigació en matemàtiques mes famosos del món.

En Göttingen, va ensenyar no sols geometria sinó moltes altres matèries, entre la matemàtica i la física, com a mecànica i teoria de potencial. Klein va fundar un centre d'investigació en Göttingen que anava a servir de model per als millors de tot el món. Va introduir reunions setmanals, una habitació per a llegir amb una biblioteca matemàtica a disposició. Es va portar a Hilbert des de Königsberg a Göttingen en 1895. La fama de la revista *Mathematische Annalen* està basada en la seua capacitat matemàtica i de direcció. La revista havia sigut originalment fundada per Clebsch però va ser baix Klein quan no va tindre rival, sobrepassant a la famosa Crelle. En cert sentit, estes revistes representaven la rivalitat existent entre les escoles matemàtiques de Berlin i Göttingen. Klein va començar amb un xicotet equip d'editors que eren treballadors constants i prenent decisions democràtiques. La revista estava especialitzada en anàlisi complex, geometria algebraica i teoria d'invariants. També publicava en anàlisi real i teoria de grups.

Klein va contribuir amb els seus llavors nous resultats, al coneixement actual de la geometria. Hui formen part del pensament matemàtic actual i és difícil imaginar la novetat que en el seu temps va significar. En 1870, en col·laboració amb Lie, va descobrir les propietats fonamentals de les línies asimptòtiques de la superfície de Kummer. De fet, Lie va jugar un paper important, introduint el concepte de grup en la investigació. Després va treballar en les w -corbes, invariants sota un grup de transformacions projectives. També els ensenyaments de Camille Jordan sobre grups van ser importants per a Klein.

En 1871, en Göttingen, Klein va publicar dos articles sobre geometries no euclidianes en els quals va mostrar que era possible considerar la geometria euclidiana i les no euclidianes com a casos especials d'una superfície projectiva amb una determinada secció cònica. Demostrant amb això que les geometries no euclidianes són consistents si i només si ho és la geometria euclidiana. No obstant això, Cayley mai va acceptar els arguments de Klein (creient falsament que eren circulars). En realitat, Klein va provar la independència de la geometria projectiva de l'axioma d'Euclides de les paral·leles, demostrant així que tant la geometria euclidiana com les no euclidianes es trobaven compreses en la geometria projectiva i que eren igualment vertaderes respecte a una mètrica particular.

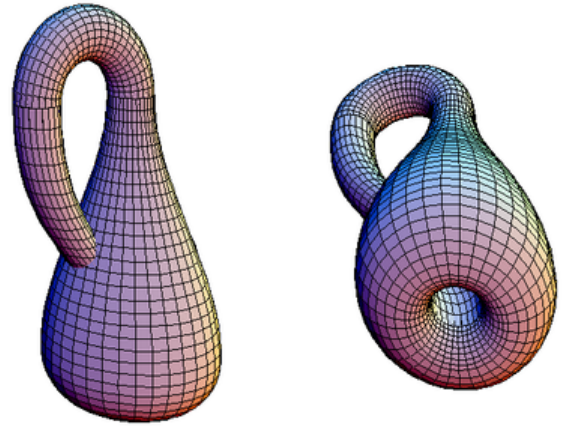
La síntesi de les geometries, que va proposar Klein, com l'estudi de les propietats d'un espai que són invariants respecte a un grup de transformacions, conegut com el Programa de Erlanger (1872), va influir profundament en el desenvolupament matemàtic posterior. El Programa de Erlanger donà una visió unificada de la geometria que és hui comunament acceptada. D'esta manera el Programa de Erlanger definia la geometria de manera que incloïa tant a l'euclidiana com a les no euclidianes.

No obstant això, el propi Klein pensava que el seu treball sobre teoria de funcions era la seua major contribució a les matemàtiques. Un dels seus èxits va ser el desenvolupament de les idees de Riemann, relacionant la teoria d'invariants, la teoria de números i àlgebra, la teoria de grups, la geometria multidimensional i la teoria d'equacions diferencials, les funcions el·líptiques i les funcions automorfes. Considerant l'acció d'un grup modular sobre el pla complex, Klein va mostrar que la regió fonamental recobreix o tessella el pla. En 1879, va estudiar l'acció del grup $PSL(2,7)$, pensat com una imatge del grup modular, i va obtenir una representació explícita d'una superfície de Riemann. Va mostrar que tenia per equació $x^3y + y^3z + z^3x = 0$ com una corba en l'espai projectiu i que el seu grup de simetries era $PSL(2,7)$ d'ordre 168. En 1882, va escriure *Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihre Integrals* que tracta la teoria de funcions d'una manera geomètrica connectant la teoria de potencial i les funcions conformes. Va usar en este treball idees de la física, especialment de dinàmica de fluïds.

Klein va considerar equacions de grau major que 4 i estava especialment interessat a usar mètodes transcendents per a resoldre l'equació de quint grau. Després de treballar amb els mètodes de Hermite i Kronecker, produint resultats similars als de Brioschi, va continuar resolent completament el problema usant el grup del icosaedre. Este treball li va conduir a considerar les funcions el·líptiques modulares que va estudiar en diversos articles. Va desenvolupar la teoria de les funcions automorfes, connectant resultats algebraics i geomètrics en el seu llibre de 1884 sobre l'icosaedre. No obstant això, Poincaré va començar a publicar la seua teoria de les funcions automorfes en 1881 i, això va conduir a una competició entre tots dos. Va ser en este període quan Klein va emmalaltir. Posteriorment, ja en Leipzig i amb la col·laboració de Robert Fricke, que va arribar a Leipzig en 1884, Klein va escriure 4 volums sobre funcions automorfes i funcions modulares el·líptiques.

La Botella de Klein

També la superfície famosa d'una sola cara, la botella de Klein, porta el seu nom. Esta no pot ser construïda en l'espai euclidià. Tampoc és una superfície contínua en l'espai de tres dimensions, ja que la superfície no pot passar a través d'ella mateixa excepte a través d'una discontinuïtat. Sí que és possible construir una botella de Klein en un espai no euclidià.



Imatge 2. Dos representacions fetes per ordinador de la Botella de Klein. La seua curiositat principal és que es tracta d'una superfície no orientable que no té exterior ni interior. Encara que el seu aspecte és d'una botella normal, l'abertura que dona a la part exterior gira i s'intersecta amb si mateixa. Topològicament, se considera que la botella no té ni dins ni fóra.

Altres interessos

En la dècada de 1890, Klein es va començar a interessar en física matemàtica i va escriure, amb A. Sommerfeld, un important treball sobre el giroscopi. Posteriorment Klein es va interessar per l'ensenyament secundari. Va advocar per modernitzar l'ensenyament de la matemàtica a Alemanya. En 1905, va participar en la formulació del "Meraner Lehrplanestwürfe". La recomanació principal era la introducció en l'ensenyament secundari dels rudiments del càlcul diferencial i integral i el concepte de funció. Klein va ser triat chairman de la International Commission on Mathematical Instruction en el Rome International Mathematical Congress de 1908. Sota el seu guia es van publicar molts volums sobre l'ensenyament de la matemàtica secundària a Alemanya.

Reconeiximents

En 1895, va impulsar el projecte de la Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Va prendre part activa, editant juntament amb K. Müller els quatre volums sobre mecànica. Klein va ser triat membre de la Royal Society, en 1885, i va rebre la medalla Copley de la societat en 1912. La London Mathematical Society li va distingir amb la medalla de De Morgan, en 1893.

Bibliografia i Webgrafia

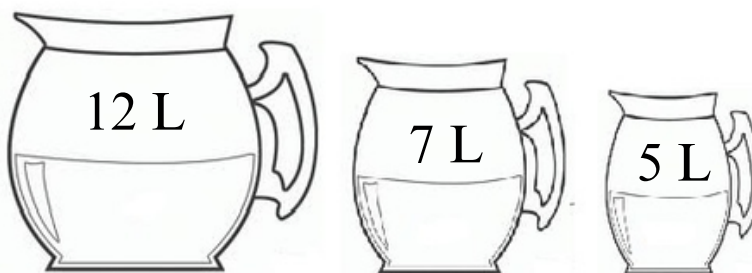
- [1] Klein, Felix. *Lecciones sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX*. Ed. Crítica, 2006.
- [2] Kline, Morris. *El pensamiento matemático desde la Antigüedad a nuestros días*, vol. 3. Alianza Editorial, 1972.
- [3] Cooke, Roger L. *The history of Mathematics: A brief course*, 3rd ed. Ed. Wiley, 2013.
- [4] Stillwell, John. *Mathematics and Its History*, 3rd Edition, Ed. Springer, 2010
- [5] Tobies, Renate. *Felix Klein: Visions for Mathematics, Applications and Education. Series Vita Mathematica*. Ed. Birkhauser, 2021.

Un problema de botelles

Este mes presentem un problema senzillet de mesures amb pitxers. Tenim 3 pitxers com els de la imatge amb capacitat per a 12L, 7L i 5L, respectivament. Inicialment, el pitxer de 12L està ple d'aigua, mentre que els altres dos estan buits.

Serieu capaços de mesurar exactament 1 L d'aigua utilitzant com a mesura exclusivament les capacitats dels pitxers, únicament vessant aigua d'un pitxer a un altre?

la solució en el pròxim número...



Mirant el calendari: Solució

Com que el presoner puja els dies dels mesos imparells i baixa els dies de mesos imparells, haurem de tindre en compte la seua posició al final dels mesos de gener, març, maig, juliol, setembre i novembre. A més, hi haurà una pauta de regularitat pel caràcter cíclic del calendari, només alterada pels anys amb 366 dies.

La posició cada final de mes el primer any és 31(G)-3(F)-34(Mç)-4(Ab)-35(Mg)-5(Jn)-36(Jl)-5(Ag)-35(S)-4(O)-34(N)-3(D). D'esta manera, al llarg d'un any de 365 dies l'increment global és de 3 dies i el màxim s'assolix al final de juliol.

D'altra banda, la posició cada final de mes dels anys amb 366 dies (mesurats des del punt inicial) és 31(G)-2(F)-33(Mç)-3(Ab)-34(Mg)-4(Jn)-35(Jl)-4(Ag)-34(S)-3(O)-33(N)-2(D), i així, al llarg d'un any de 365 dies l'increment global és de 3 dies i el màxim s'assolix també al final de juliol.

Sabent esta pauta, anem a vore en quin mes de juliol superem l'escaló 100, partint del 36 (al que s'arriba el primer any) i sumant els increments anuals:

36(2001) - 39(2002) - 42(2003) - 44(2004*) - 47(2005) - 50(2006) - 53(2007) - 55 (2008*) - 58(2009) - 61(2010) - 64(2011) - 66(2012*) - 69(2013) - 72(2014) - 75(2015) - 77(2016*) - 80(2017) - 83(2018) - 86(2019) - 88(2020*) - 91(2021) - 94(2022) - 97(2023) - 99(2024*) - 102 (2025)

* Els anys amb 366 dies estan marcats amb un asterisc

Per tant, la primera vegada que s'assolix l'escaló 100 és en algun moment entre juliol de 2024 i juliol de 2025. Analitzem ixe període observant l'escaló on s'acaba cada mes:

99(7/2024) - 68(8/2024) - 98(9/2024) - 67(10/2024) - 97(11/2024) - 66(12/2024) - 97(1/2025) - 69 (2/2025) - 100(3/2025) - 70(4/2025) - 101(5/2025) - 71(6/2025) - 102 (7/2025)

Com se pot observar, la primera vegada que s'arriba a l'escaló 100 és el 31 de març de 2025 (ja li falta molt poquet per a la llibertat!), mentre que si l'exigència haguera segut aplegar només al 99 ja portaria lliure des del 31 de juliol de 2024.

Entretenimates!

Acabem esta publicació amb un recull de propostes lúdiques per a entretenir-se amb les matemàtiques. Cada mes presentarem una oferta amb pel·lícules, llibres, jocs, etc. per a què exerciteu la ment. Esperem que la disfruteu!

Un llibre

El nom de Felix Klein (1849-1925) no és en l'actualitat tan familiar com els d'altres matemàtics del segle XIX i primeres dècades del XX. No obstant això, va ser un dels matemàtics més destacats d'aquella època, responsable de valuoses contribucions en camps com la geometria, teoria de funcions i matemàtica aplicada. Especialment recordada és la manera d'entendre la geometria que va defensar en la conferència amb la qual va prendre possessió, en 1872, de la seua primera càtedra, en la Universitat de Erlangen. En topologia, el seu cognom està vinculat a un objecte tan curiós com fecund matemàticament: la "botella de Klein", superfície tancada d'una sola cara i sense límits. La seua competició científica (1880-1882) amb Henri Poincaré, en el domini de les funcions automorfes és llegendària. De fet, la intensitat de la pugna va ser tal que li va produir una aguda crisi d'esgotament, de la qual es va recuperar però havent perdut la gran capacitat creativa que fins llavors havia mostrat. Es va obrir llavors una nova etapa en la seua carrera, en la qual va brillar com a organitzador i líder matemàtic des de la Universitat de Göttingen, a la qual es va incorporar en 1886, afegint als seus anteriors assoliments matemàtics altres relacionats amb l'ensenyament de la seua disciplina. El llibre que es presenta en este volum (mai abans traduït a l'espanyol), reunides les dos parts en què inicialment va ser publicat, pertany a ixe àmbit de l'obra de Klein. És tot un clàssic pòstum (perquè va aparèixer -1926 i 1927- després de la mort del seu autor): *Lecciones sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX*. Constitueix un document preciós: ni més ni menys que la reconstrucció històrica de l'extraordinari desenvolupament que va tindre lloc durant el segle XIX en la matemàtica, realitzada per un dels seus protagonistes. Del segle XIX i també de les dos primeres dècades del XX, especialment d'aquells assoliments relacionats amb les teories especial i general de la relativitat einsteinianes, que s'ajustaven particularment bé a l'esperit del seu Programa de Erlangen.

