

DESEMBRE DE 2024

N. 5

Μαθημα



En este número...

Article: Helge von Koch: Una vida eclipsada per una corba

Article: Monstres matemàtics (I): La corba de Koch

Problemes per a pensar

Entretenimats!

Alumnat del Lluís Vives participa a la fase local de l'OME

La Reial Societat Matemàtica Espanyola ha convocat la LXI edició de l'Olimpiada Matemàtica Espanyola que se disputarà a Gijón (Principat d'Astúries) entre el 27 i el 30 de març de 2025. Prèviament, els participants hauran d'haver superat una fase local que es celebra en cada districte universitari d'Espanya.

La Comunitat Valenciana comptarà amb 6 participants, un per cadascuna de les cinc universitats públiques del sistema universitari valencià, més el millor segon classificat de la fase local.

La fase local a la Comunitat Valenciana es celebrarà el proper 17 de gener a la Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de l'Edificació de la UPV en sessions de matí i vesprada i, com és habitual en els últims anys, comptarà amb una nodrida presència d'alumnat de l'IES Lluís Vives: Vora una vintena d'alumnes d'entre tercer de l'ESO i 2n de batxillerat participaran en esta competició tractant de donar el millor d'ells mateixos.



Dos alumnes de l'institut participen a l'European Statistical Competition

Les alumnes Berta Lorenzo i Laura Valero, les dos de 2n de batxillerat participen enguany a la Competició Estadística Europea, organitzada per l'Institut Nacional d'Estadística (INE) i l'Oficina Europea d'Estadístiques, Eurostat. Berta i Laura, tutoritzades per José Das, professor del projecte d'Estadística de l'institut, formen l'equip SerLorVal.

La competició es disputa en dos fases: La primera, a nivell nacional, organitzada per l'INE i per la Societat d'Estadística i Investigació Operativa (SEIO) té, al seu temps dos parts: La primera, a celebrar entre el 15 de desembre i el 14 de gener consistix a la realització de 3 tests sobre estadística i probabilitat, el primer sobre coneiximents teòrics, el segon sobre la consulta i ús de bases de dades oficials (principalment l'INE i l'Eurostat) i, per últim, el tercer, sobre la interpretació d'un informe estadístic.

La segona part consistix en l'explotació d'una base de dades, facilitada per l'organització als equips que hagen superat la primera part. Cada equip haurà d'elaborar una presentació de 8 diapositives on ha de plasmar les ferramentes i tècniques estadístiques emprades, així com els principals resultats i les conclusions que es poden traure.

El jurat, format per 6 integrants, valorarà els treballs i nomenarà un guanyador, que optarà a la fase Europea de la competició i quatre finalistes.

La revista Mathema estrena nova imatge corporativa i presència en Xarxes Socials

Des d'este mes, la revista Mathema disposa de un nou canal de difusió amb l'estrena del seu compte d'instagram: **mathema.revista**

Se tracta d'un pas més en l'estratègia de la publicació de fer més accessibles les matemàtiques i la tasca que es fa a l'institut cap als membres de la comunitat educativa, oferint notícies, avisos i contingut complementari o similar al de la revista en PDF però d'una forma més atractiva per als joves.

Aprofitant la inauguració del compte, s'ha volgut dissenyar un logo atractiu per a la imatge de perfil i s'ha comptat amb Maribel Donato, artista gràfica amb gran experiència en la creació de logotips i dissenys d'imatges corporatives. Partint d'uns esbossos en paper i llapis, uns dissenys inicials i les aportacions en forma d'opinions, crítiques, idees de molts alumnes del centre, s'ha arribat a la imatge que podem veure a la dreta i que esperem que vos agrade.

El compte d'instagram és d'accés pública però, així i tot, esperem que ens seguïu per a que esteu al dia de les novetats i que participeu activament amb l'enviament de comentaris.



Imatge del logo de la revista, foto del perfil del compte d'Instagram mathema.revista, dissenyat per l'artista gràfica de Requena Maribel Donato i que ha comptat amb les aportacions d'opinions i idees d'un grup de col·laboradors format per alumnes del centre, als que volem agrair, desde estes línies, les seues aportacions i la seua tasca desinteressada.



Revista Mathema
Edició on-line
ISSN: 3020-9803
Edita: IES Lluís Vives
Responsable: José Das
València, Desembre de 2024

Helge von Koch: Una vida eclipsada per una corba

José R. Das López

Catedràtic de Matemàtiques. Cap del departament de Matemàtiques de l'IES Lluís Vives

e-mail: jr.das@edu.gva.es

Resum: El nom de Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924) va essencialment lligat a la definició d'una corba fractal, la del famós flocc de neu. L'objecte matemàtic, tot i la seua difusió en l'art i de les seues múltiples representacions, és un objecte matemàtic de gran interès i, a més, va aombrar la resta de la seua obra, en especial el treball dedicat a la teoria analítica de funcions i a la teoria de nombres, camp en el que va obtenir resultats que, més de 100 anys després encara no han segut superats. En este article repassarem alguns dels fets que marcaren la seua vida independentment de la definició de la corba que el va fer famós.

Enguany es complixen 100 anys de la mort del matemàtic suec Niels Fabian Helge von Koch (Estocolm, 25 de gener de 1870 - 11 de març de 1924), conegut per la definició d'una de les primeres corbes fractals: el flocc de neu o corba de Koch. En este article coneixerem una miqueta més de la seua vida.

Orígens familiars

Helge von Koch pertanyia a una família von Koch de Livònia amb diversos membres destacats. Era nét del Ministre d'Hisenda. Nils Samuel von Koch (1801–1881), el pare del qual, Nils von Koch, va ser ennoblit *von Koch*; i Frances Lisa Lewin. Era fill del tinent coronel del cos de Salvament a cavall i també novel·lista Richert Vogt von Koch (1838-1913) i d'Agathe Wrede, nascuda en la família Wrede af Elimä. Va tindre dos germans que van destacar en diferents camps: el compositor Sigurd von Koch i el polític social Gerhard Halfred von Koch.

Després de l'examen de matriculació (examen d'estudiant) en l'Högre realläroverket d'Estocolm en 1887, von Koch es va matricular el mateix any com a estudiant en la Universitat d'Estocolm on va ser deixeble de Gösta Mittag-Leffler. No obstant, com que a la Universitat d'Estocolm encara no tenia la possibilitat de graduar alumnes, a l'any següent (1888) es va matricular a la Universitat d'Uppsala on, en 1892 va obtenir el seu doctorat amb una tesi doctoral que consistia en els dos articles "*Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires*" (publicat en *Acta Mathematica* 1891) i "*Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires*" (publicat en *Acta Mathematica* 1892). Esta tesi també li va valdre una beca docent en la Universitat d'Estocolm aqueix mateix any. En 1905 va ser nomenat professor de matemàtiques pures en el Kungliga Tekniska högskolan (TKH on va succeir a Ivar Otto Bendixson), però va renunciar al lloc, quan en 1911 va succeir a Gösta Mittag-Leffler com a professor de matemàtiques pures en la Universitat d'Estocolm. Un any abans, en 1910 Koch s'havia convertit en membre de l'Acadèmia de Ciències.

Obra matemàtica

Helge von Koch es va distingir per una activitat d'escriptura matemàtica significativa tant en qualitat de continguts com en abast. Bàsicament cobreix tres àrees diferents: D'una banda, en 1885, Henri Poincaré havia establert unes bases sòlides per a la teoria dels determinants infinits. A instàncies de Mittag-Leffler, von Koch, en relació amb Poincaré, va abordar el problema d'utilitzar esta teoria per a obtenir una representació aritmètica de les solucions d'una equació diferencial lineal amb coeficients racionals i uns altres del tipus més general, i en 1891 va presentar la solució completa a este problema. Això li va donar a von Koch motius per a aprofundir i desenvolupar encara més la teoria dels determinants infinits, i pot ser considerat el principal coneixedor del seu temps en esta part important, en gran part creada per ell, de l'anàlisi superior.

D'altra banda, von Koch va portar el difícil i intricat problema de la freqüència dels nombres primers un pas més enllà que els autors que, després de Bernhard Riemann, havien tractat esta qüestió. Va obtenir l'aproximació més precisa assolida fins hui per al nombre de nombres primers entre dos límits triats arbitràriament.

von Koch va escriure diversos treballs sobre teoria de números. Entre altres coses, en 1901 va aconseguir demostrar que la hipòtesi de Riemann és equivalent a la variant forta del teorema dels nombres primers.



Imatge 1. Retrat de Nils Fabian Helge von Koch, prè de l'arxiu de retrats de personatges suecs <https://portrattarkiv.se/>.

Finalment, va dedicar importants treballs a la teoria de funcions pròpiament dita. Va derivar ací, en relació amb les investigacions de Mittag-Leffler sobre la representació aritmètica d'una branca única i regular d'una funció analítica, una expressió aritmètica unificada per a una funció de caràcter racional, que representa la funció per a cada punt regular, i no conté cap altres elements de la funció a més dels coeficients d'un desenvolupament de Taylor al voltant d'un punt regular triat arbitràriament.

Entre els seus treballs més importants es poden citar els inclosos en la revista *Acta Mathematica* fundada per Mittag-Leffler: "*Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires*" (part 15), "*Sur la Distribution des nombres premiers*" (d. 24) i "*Sur le prolongement analytique d'une série de Taylor*" (part 27).

Bibliografia

- [1] Usmáriz, U.; Usmátiz, P.: *Diccionario biográfico de matemáticos*, Publicado en web, 2012.
- [2] Elgar, G.: *Classics on Fractals*, Addison-Wesley, 1993.
- [3] Koch, H.: *Sur une Application des Déterminants Infinis à la Théorie des Équations Différentielles Linéaires*. *Acta Mathematica* **15** (0): 53-63, 1891.

Monstres matemàtics (I): La corba de Koch

José R. Das López

Catedràtic de Matemàtiques. Cap del departament de Matemàtiques de l'IES Lluís Vives

e-mail: jr.das@edu.gva.es

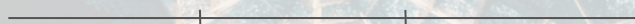
Resum: Niels von Koch va definir en un article de 1904 “una corba contínua que no poseeix tangents i obtinguda pels mètodes de la geometria elemental”. Esta corba formava part d’un conjunt d’objectes que, al principi del segle XX rebien el nom de monstres matemàtics. Anem a vore la seua construcció geomètrica des del primer pas, així com algunes representacions artístiques basades en esta corba i també variacions en el seu disseny.

En 1904, Niels von Koch va escriure l'article “*Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire*”, publicat a la revista Arkiv för Matematik Astronomi och Fysik [2] on presenta un exemple d’una corba que, construïda mitjançant mètodes de geometria elemental no tenia cap punt amb recta tangent.

Per a construir-la, se partix d’un segment:



ixe segment es dividix en tres parts iguals:



Sobre el segment central s'alça un triangle equilàter:



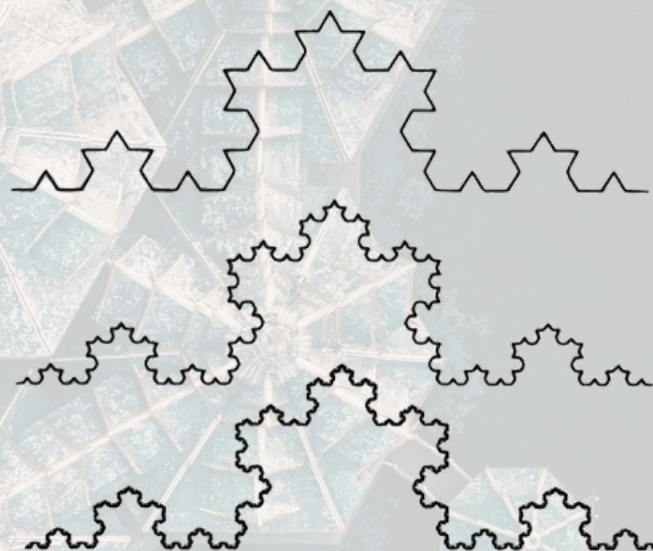
Per últim, eliminem la base d'ixe triangle:



La construcció del floquet de neu es completa efectuant de manera reiterada estos pasos sobre cada segment de la figura. D'esta manera, la imatge anterior seria el pas 1.



Este seria el pas 2, on pot apreciar-se que en cadascun dels quatre segments que formen el pas 1 s'ha realitzat la mateixa transformació, però a escala $1/3$. Així, en cada pas, el número de segments es multiplica per 4 i la longitud de la corba per $4/3$. D'esta manera, es fàcil de vore que la corba anirà allargant-se fins a l'infinit conforme anem fent més i més iteracions. En la següent imatge podem vore l'evolució dels primers passos:

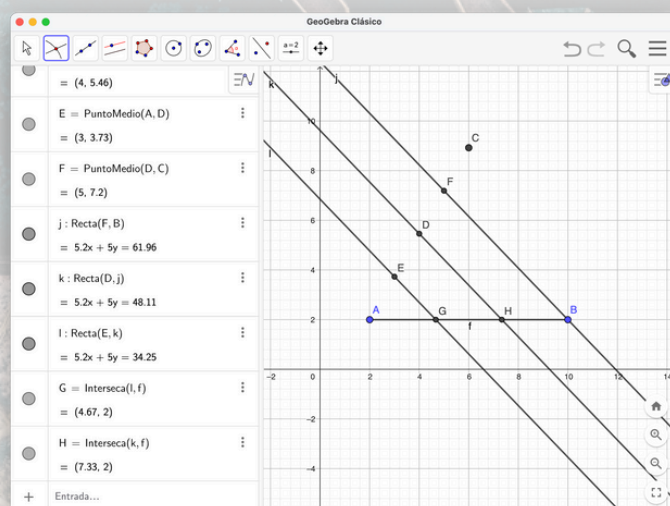


Imatge 1. Passos $n=3$, $n=4$ i $n=5$ de la corba de Koch.

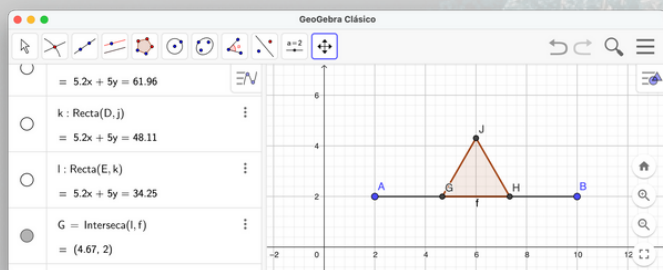
Com pot observar-se a la imatge 1, amb només unes poques iteracions (a la imatge es mostra fins la 5) ja obtenim una figura totalment rugosa i en la que ens seria impossible continuar a mà: pensem que hi ja ha 1024 segments i, per tant, hauriem de repetir el procediment descrit 1024 vegades.

La corba de Koch amb GeoGebra

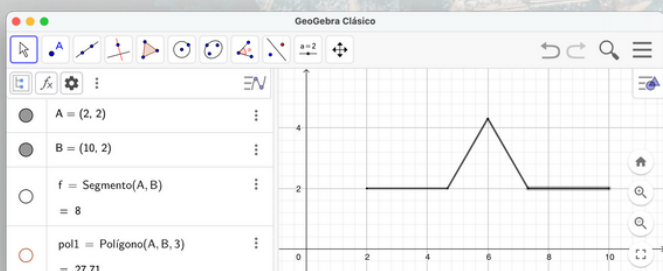
Com que es tracta d'un procés iteratiu el més senzill és crear una ferramenta *ad hoc* en GeoGebra on donem com a entrada els punts extrems d'un segment i que faça la transformació que hem vist abans: dividir el segment en tres parts. Per a aconseguir-ho usem el teorema de Tales: dibuixem una línia auxiliar amb tres punts equiespaiats D , E i F , que usem per a dividir el segment original en tres part mitjançant dos punts interns: G i H .



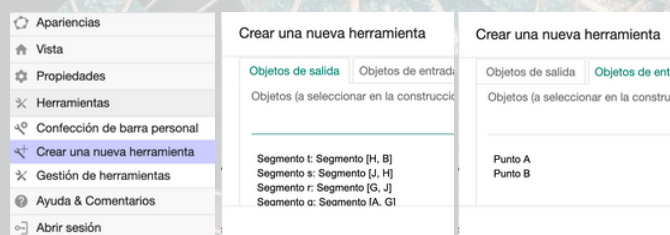
Una vegada trobats els punts G i H , la resta d'objectes auxiliars els podem eliminar i procedir a alçar un triangle equilàter sobre el segment GH :



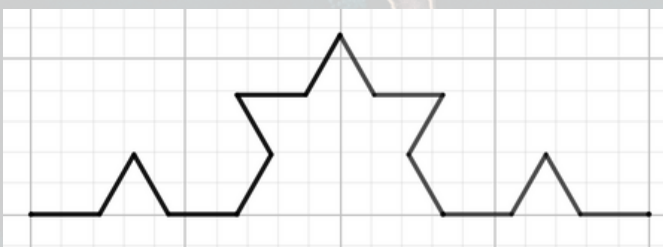
Ara ja tenim els cinc punts clau del següent pas de la corba de Koch i podem traçar els quatre segments AG , GJ , JH i HB :



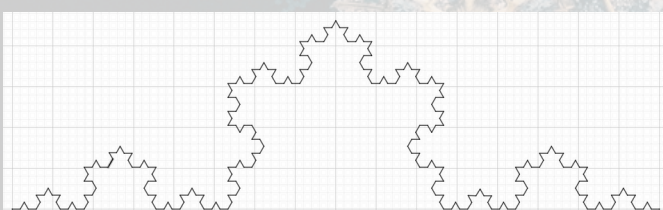
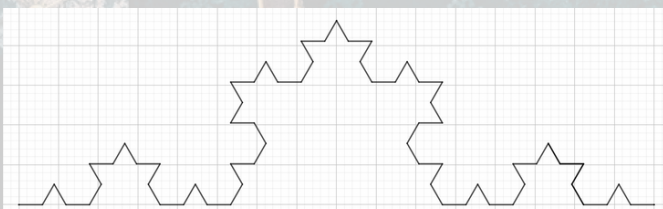
Ara guardem tot el procés com a ferrament



Si triem la nova ferrament i seleccionem els extrems de cada segment obtenim el primer pas de la corba:

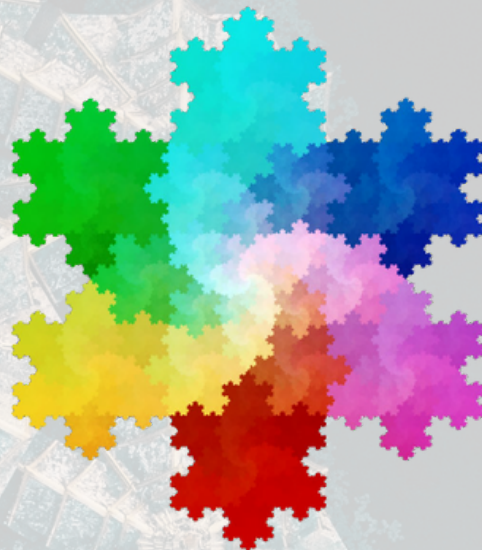


i així, podem repetir el procés indefinidament:



Variacions de la Corba de Koch

La corba de Koch dóna per a molta representació artística. La més habitual és desenvolupar-la no a partir d'un segment si no dels costats d'un triangle equilàter invertit (Imatge 1):



Imatge 1. Representació colorejada de la corba de Koch generada a partir d'un triangle equilàter invertit.

I si no utilitzem un triangle equilàter, sinó una altra figura? Si en lloc d'un equilàter dibuixàrem una forma quadrada, així:



obtindríem el que s'anomena saltitxa de Minkowski:



D'esta manera podem obtenir infinitat de possibilitats, canviant els polígons pels que es substitueix el segment del mig, modificant els angles d'estos polígons, etc.

Bibliografia

- [1] Elgar, G.: *Classics on Fractals*, Addison-Wesley, 1993.
- [2] Koch, H.: Sur une Application des Déterminants Infinis à la Théorie des Équations Différentielles Linéaires. *Acta Mathematica* **15** (0): 53-63, 1891.

Un problema de consum responsable

Tot i que el següent problema va ser proposat en la fase local de l'Olimpíada Matemàtica Espanyola de 2001 no són necessaris massa coneiximents matemàtic per a resoldre'l. Ànim!

L'encarregat del far de Finisterre ha rebut la comunicació que hi haurà un tall del subministrament elèctric i ha de fer funcionar el far amb ajuda del generador alimentat amb gasoil. Aqueix generador consumeix 6 litres de gasoil cada hora i mig litre més cada vegada que cal posar-ho en marxa (inicialment, està parat). En les 10 hores exactes que durarà la nit, el far no pot deixar de funcionar durant més de 10 minuts seguits. I quan funciona ha de fer-ho durant almenys 15 minuts seguits. Quants litres de gasoil necessita, com a mínim, per a complir amb les normes de funcionament del far?

la solució en el pròxim número...



Alliberament de presos: Solució

Podem assegurar que se salven 29 presos, tots menys el primer.

En efecte, l'estratègia es basa en que el primer dels presos pot vore el gorro dels altres 29. No tenim ni idea de quants hi ha de cada color, però sabem que d'un color hi haurà una quantitat de gorros parella i de l'altre imparella. Sols han de acordar que, per exemple, el preso 1 dirà en alt el color del que veu una quantitat, per exemple, imparella. Suposem que xilla: **NEGRE!**

No sabem si haurà tingut la sort o no d'encertar i, per tant, de salvar-se. Però el pres número 2 ja sap que el 1 veu una quantitat imparella de gorros negres, així que només ha de comptar. Si compta un número parell de gorros negres és que el seu també ho és i per això el 1 veu un número imparell. Si, pel contrari, compta una quantitat imparella de negres, és que el seu, és blanc.

El presoner número 3 haurà de comptar quants gorros veu de cada color i sumar un al compte del color que acaba d'indicar el número 2. El seu gorro serà del color que arrodonisca el compte per a tindre una quantitat imparella de gorros negres i una parella de gorros blancs.

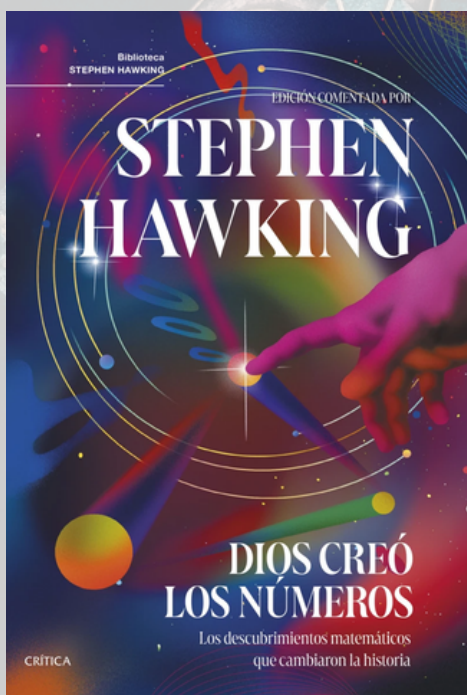
Així, en general, qualsevol presoner haurà de dur el compte dels colors que van dient els presos que el precedeixen i afegint-los al gorros que pot vore dels que queden per davant en la fila.

Si no perden el compte es garantix el salvament de, al menys, 29 dels 30 presoners independentment del número de gorros de cada color i de la seua distribució. Respecte al primer, se salvarà o no depenent de la sort que tinga: hi ha un 50% de probabilitats de encertar el color del gorro que duu.

Entretenimates!

Acabem esta publicació amb un recull de propostes lúdiques per a entretenir-se amb les matemàtiques. Cada mes presentarem una oferta amb pel·lícules, llibres, jocs, etc. per a què exerciteu la ment. Esperem que la disfruteu!

Un llibre



Presentem un llibre què és un recull d'altres publicacions recopilades i comentades pel gran científic Stephen Hawking. El títol fa referència a un famós aforisme de Leopold Kronecker, matemàtic alemany del segle XIX que deia "Déu va crear els números. L'Home tota la resta".

Des del comerç per internet fins als vols espacials, les matemàtiques regeixen quasi tots els aspectes de la nostra vida en aquesta era postindustrial. D'altra banda, tant les revolucions intel·lectuals com la nostra pròpia percepció del món són filles de revolucions en el pensament matemàtic.

Les obres de Karl Weierstrass, Georg Cantor, George Boole, Alan Turing, Kurt Gödel i uns altres grans matemàtics s'han construït sobre l'obra dels seus predecessors, des dels matemàtics babilonis, i elles, al seu torn, alimenten les noves teories que desenvolupen els investigadors contemporanis.

Stephen Hawking sosté que si les meravelles del món antic van ser físiques, les del nostre propi temps són les obres de l'intel·lecte:

"En la línia de *A hombros de gigantes*, dedicada a les grans obres de la Física i l'Astronomia, el gran científic Stephen Hawking ens presenta en aquest llibre els 31 assoliments fonamentals del pensament matemàtic, des de la geometria bàsica fins a la teoria dels números transfïnits. El professor Hawking ha analitzat dos mil cinc-cents anys d'història de les matemàtiques per a oferir-nos:

- Una biografia dels dèsset majors genis matemàtics.
- Una introducció al significat de les seues investigacions.
- La solució als diferents problemes que es van plantejar."

Títol: Dios creó los números. Autor: Stephen Hawking. ISBN: 978-84-9199-627-9. Editorial: Crítica. Sèrie: Drakontos. Any: 2024.