Nombre:
Grupo:

Competencias clave nivel 2

Matemáticas

GESO 2: Unidades 6 a 10

https://ceice.gva.es/es/web/formacion-profesorado/unitats-didactiques-competencies-clau-nivell-2-servef

https://labora.gva.es/es/competencias-clave

Unidad Didáctica 6. Cuerpos geométricos

¡Escalada de dodecaedros!

Pilar fue al parque. Sus hijos juegan con estos dodecaedros. ¿Cuántos pentágonos hacen falta para construir los dodecaedros?

En esta unidad se muestran estrategias y herramientas para que:

- Identifiques que es un poliedro y sus elementos: caras, aristas y vértices.
- Conozcas los poliedros regulares.
- Dibujes el desarrollo en el plano de un poliedro para aplicarlo a la construcción de piezas.
- Identifiques algunos sólidos de revolución: cilindro, cono y esfera.
- Comprendas el concepto de volumen.

Con todos estos recursos podrás resolver fácilmente el problema de los dodecaedros y otros similares.

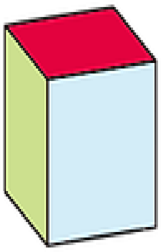
Has de repasar

-Los conceptos básicos de geometría de figuras en el plano y las unidades de medida.

Índice

1. <u>Poliedros. Elementos y relación de Euler</u>

Los cuerpos geométricos aparecen en nuestra vida cotidiana a menudo. Construimos casas y muebles basándonos en composiciones de un tipo de cuerpo geométrico que tiene unas características especiales: *el poliedro*.



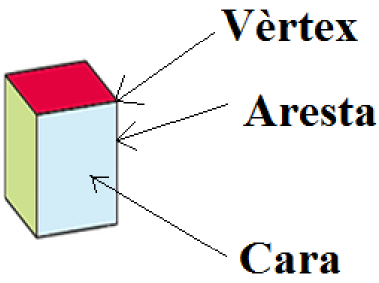
Un *poliedro* es una parte del espacio delimitada por superficies planas, de forma que el volumen delimitado por estas es finito, es decir, un poliedro es un cuerpo geométrico tridimensional cuyas caras son polígonos. Cada uno de estos polígonos se denomina cara.

Observa que "poli" significa mucho y "edro" significa cara o plano.

El espacio donde vivimos tiene tres dimensiones: el largo, ancho y alto. De hecho, nosotros somos seres tridimensionales. En cambio, el plano involucra dos dimensiones el largo y el ancho. A veces, interesa más una dimensión que otra, por ejemplo, cuando tenemos un hilo si no importa el grosor, nada más consideramos el largo.

¿Dónde aparecen los cuerpos geométricos?

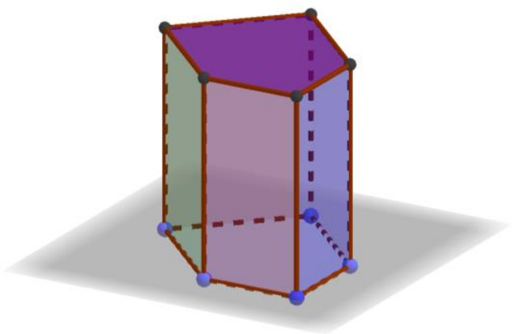
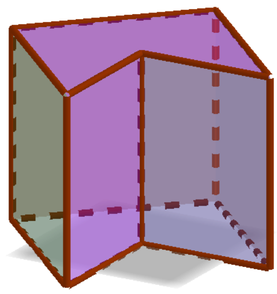
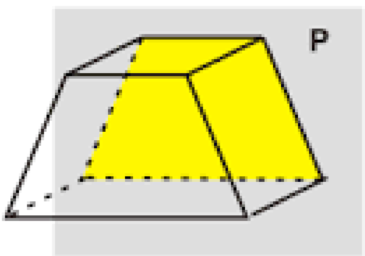
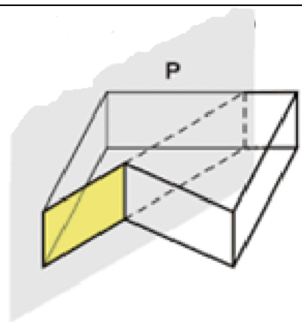
			
			



Los elementos de un poliedro son *las caras, las aristas y los vértices*. *Las aristas* son los segmentos en los cuales coinciden *las caras* (los lados de las caras) y *los vértices* son los puntos donde coinciden dos aristas (los vértices de las caras).

Un poliedro se denomina *convexo* si el segmento que une dos puntos que están dentro de este poliedro, queda dentro del poliedro. En caso contrario, se denomina *cóncavo*.

Otro carácter de poliedro convexo es que cuando prolongamos una cara, esta no corta el poliedro en ningún punto que no pertenece a esta cara.

Convexo	Cóncavo
	
	

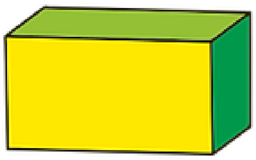
En todos los poliedros convexos se cumple la conocida fórmula de Euler que relaciona les caras, aristas y vértices.

La fórmula de Euler para los poliedros dice que en un poliedro convexo la suma de caras más vértices es igual al número de aristas más dos unidades, es decir:

$$C + V = A + 2$$

Equivalentemente, $$C - A + V = 2$$

Caras→Dimensiones=2	Aristas→Dimensiones=1	Vértice→Dimensiones=0

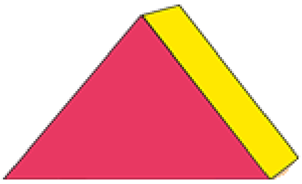


En este poliedro, el número de caras es 6, el de aristas es 12 y el de vértices es 8.

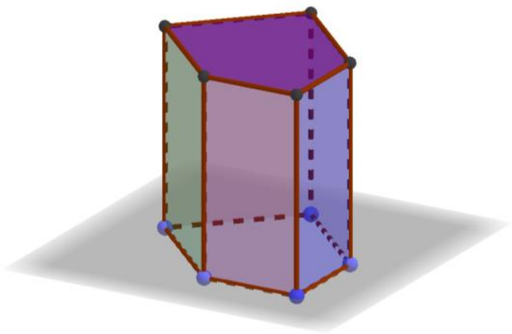
6-12+8=2

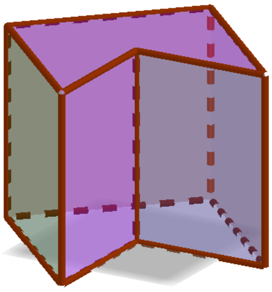
Actividad propuesta

1. Comprueba que se cumple la fórmula de Euler para el poliedro.



Existen poliedros cóncavos que cumplen este teorema, por ejemplo, los poliedros siguientes tienen los dos 7 caras, 15 aristas y 10 vértices y cumplen la fórmula para que 7-15+10=2. El de la izquierda es convexo y el de la derecha es cóncavo (pero no tiene agujeros).

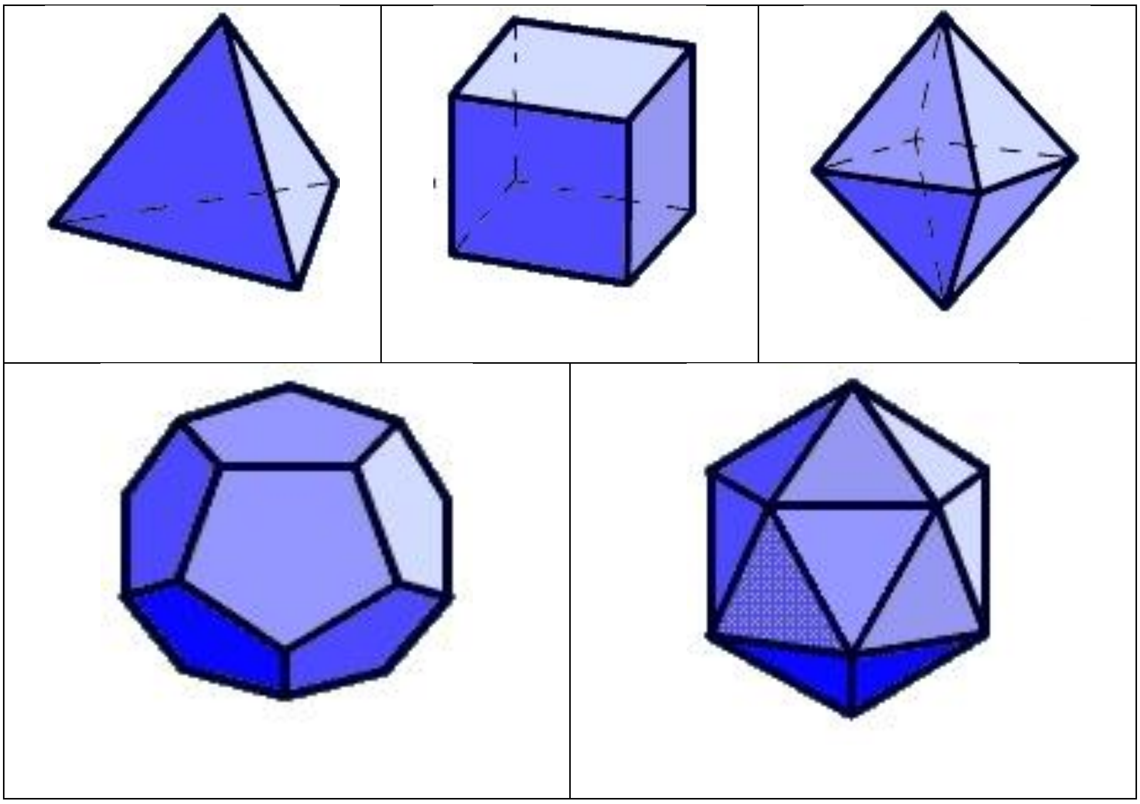




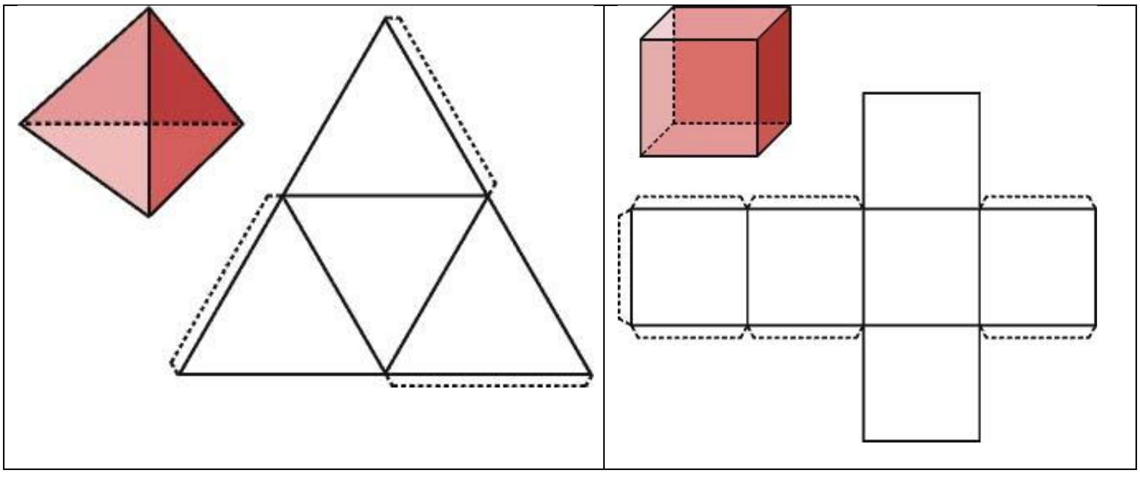
2. Poliedros regulares

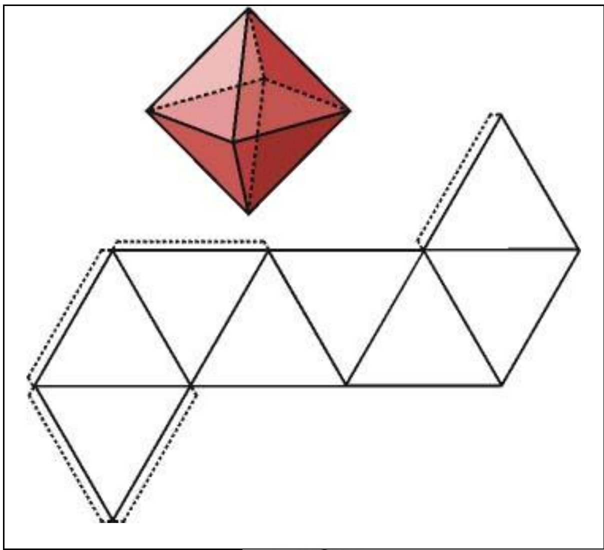
Un poliedro es regular si todos los polígonos que forman el poliedro son regulares y además tienen el mismo número de lados. Nada más se pueden formar poliedros regulares con triángulos, cuadrados y pentágonos. Hay 5 nada más:

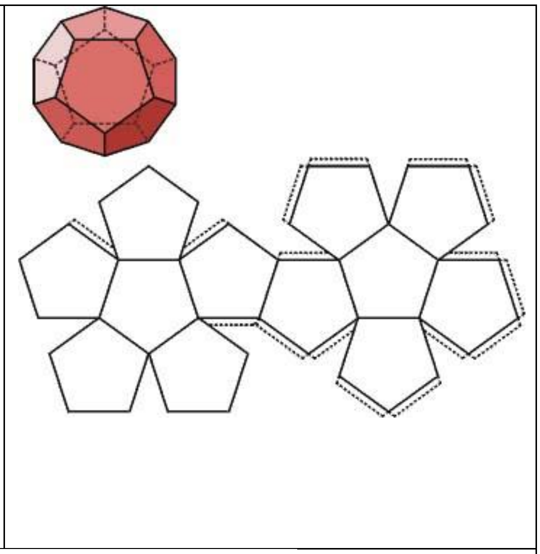
- *Tetraedro,* formado por 4 triángulos,
- *Cubo o hexaedro,* formado por 6 cuadrados,
- *Octaedro,* formado por 8 triángulos,
- *Dodecaedro,* formado por 12 pentágonos,
- *Icosaedro*, formado por 20 triángulos.

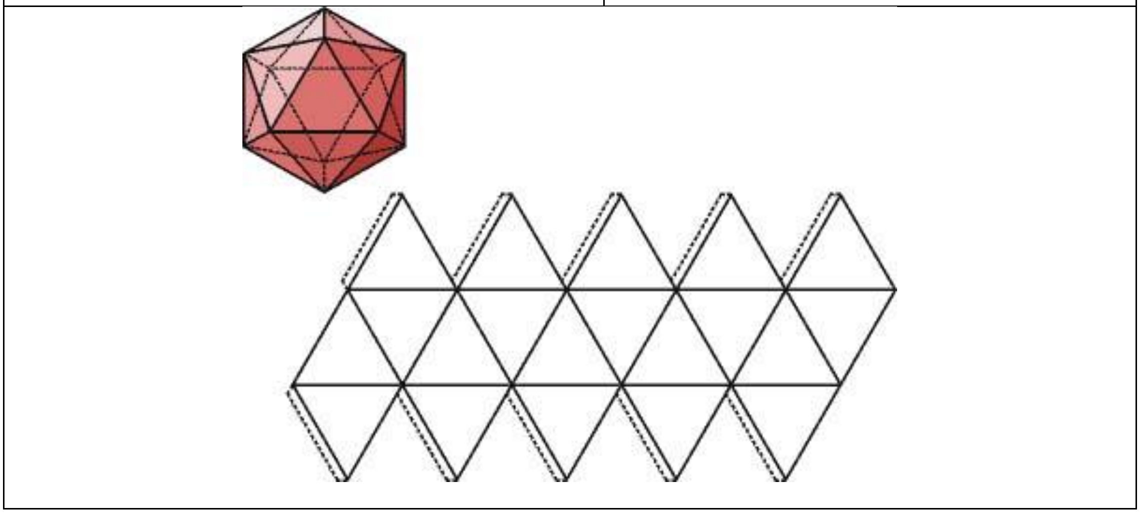


Todos los poliedros regulares se pueden construir con el desarrollo de sus caras en el plano.









Actividad resuelta

- Comprueba que se cumple la fórmula de Euler para los poliedros regulares

Poliedro	Caras	Aristas	Vértices	Caras-Aristas+Vértices
Tetraedro	4	6	4	2
Hexaedro	6	12	8	2
Octaedro	8	12	6	2
Dodecaedro	12	30	20	2
Icosaedro	20	30	12	2

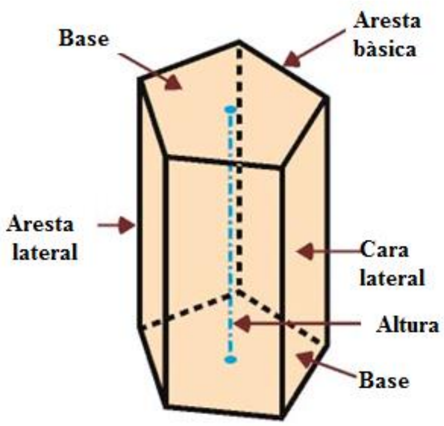
Volviendo al problema inicial

Pilar va al parque. Sus hijos jugaron con estos dodecaedros. ¿Cuántos pentágonos han hecho falta para construir los dodecaedros?

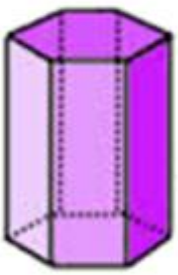
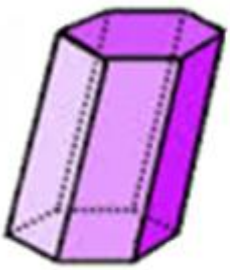
Cada dodecaedro tiene 12 pentágonos, por tanto, se han utilizado 36 pentágonos, pero, si consideramos que las caras por donde están unidos no cuentan, entonces, hay 32 pentágonos.

3. <u>Elementos de prismas y pirámides</u>

Un prisma es un poliedro formados por dos caras paralelas que son polígonos iguales denominados bases y tantas caras laterales, que son paralelogramos, como lados tienen las bases.



La altura del prisma es la distancia entre las bases. Hay prismas *rectos y oblicuos.*

Recto	Oblicuo
	

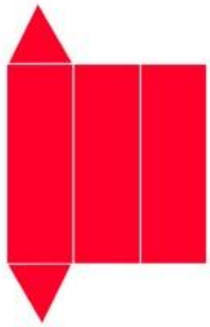
En los prismas rectos las caras laterales son rectángulos y la altura coincide con la medida de las aristas laterales.

Un prisma se denomina *regular* si las bases son dos polígonos regulares.

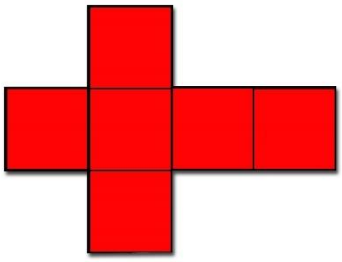
Un prisma se denomina en función de los polígonos de la base. Así, si la base es un triángulo tendremos un *prisma triangular*, si es un cuadrilátero el prisma se denominará *cuadrangular*, si es un rombo, *prisma rómbico*, si es un hexágono, el prisma se denomina *hexagonal*, etc.

Los prismas cuadrangulares pueden tener otros nombres como *paralelepípedo*, si todas las caras son romboides; *ortoedro*, si las caras son rectángulos, es decir, en forma de caja. Si todas las caras del paralelepípedo son cuadradas, entonces, se denomina cubo o hexaedro.

Este es el desarrollo de un prisma triangular.



Actividad resuelta



Calcula el área de la cartulina que necesitan para hacer el desarrollo en el plano de una caja con forma de cubo de arista 9 cm.

Solución. Calcular el área de 6 cuadrados de 9 cm de lados.

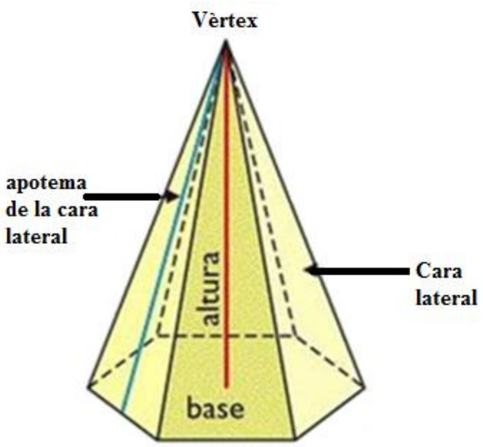
$$6 \cdot 9^2 = 486cm^2$$

Pirámide

Una *pirámide* es un poliedro con una sola base formada por un polígono cualquiera y triángulos en sus caras laterales con un vértice en común que se denomina *vértice de la pirámide*.

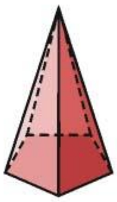
La altura de la pirámide es la distancia del vértice a la base.

Un tetraedro es un caso particular de pirámide.

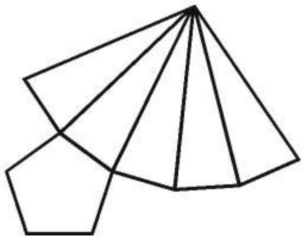


Cuando la base de la pirámide es un polígono regular y el vértice se proyecta sobre el centro de la base, se dice que la pirámide es *regular*. En este caso, las caras laterales son triángulos isósceles iguales.

Dependiendo del número de lados de la base de la pirámide, esta se denomina *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc.



Este es el desarrollo en el plano de una pirámide de base pentagonal.



Actividad propuesta

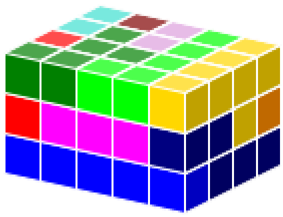
2. Dibuja el desarrollo en el plano de una pirámide de base cuadrada, cuyas caras laterales son triángulos equiláteros.

4. Concepto de volumen

Suponemos que tenemos estas cajas con forma de cubo. Si cada caja tiene un volumen de 1 dm^3, entonces, para saber el volumen total, cuentan el número de cajas. **Así, el volumen total es de 64 dm^3.**

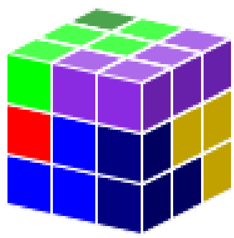
El volumen de un cuerpo es la cantidad de espacio que ocupa.

Un decímetro cúbico es el volumen de un cubo de arista 1 dm. Un centímetro cúbico es el volumen de un cubo de arista 1 cm.



Si cada cubo tiene de arista 1 cm, su volumen es 1 centímetro cúbico, como hay 48 cubos, deducimos que el volumen es igual a 48 cm^3.

Actividad propuesta



3. Calcula el volumen de la figura, sabiendo que cada cubo tiene una arista de 1 cm.

Cuando se trata de una caja y tenemos el largo, ancho y alto, entonces, para calcular el volumen multiplicamos los valores de las tres dimensiones que han de estar expresadas en la misma unidad de medida, es decir, todas en metros o todas en centímetros, etc. La unidad de medida resultante es la que teníamos elevada al cubo.

Ejemplo

Una caja que tiene de ancho 7 cm, de largo 10 cm y altura 8 cm tiene un volumen de 560 cm^3. Dividimos entre 1000 para pasar a dm^3,

$$560cm^3 = 0{,}56dm^3 = 0{,}56l,$$

entonces 1 decímetro cúbico equivale a 1 litre.

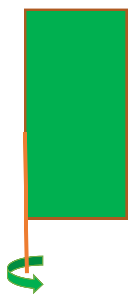
Actividad propuesta

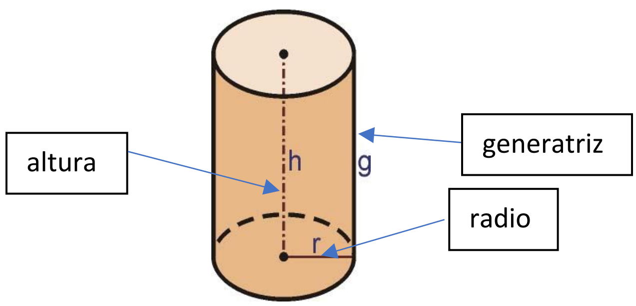
4. Calcula los litros que caben en una caja de 20 cm de ancho, 10 cm de largo y 5 cm de alto.

5. <u>Elementos del cilindro, el cono y la esfera</u>

Los cuerpos de revolución son cuerpos geométricos, como los cilindros, conos y esferas, que se obtienen haciendo girar en línea recta o curva alrededor de una recta fija denominada eje. La línea que gira se denomina generatriz.

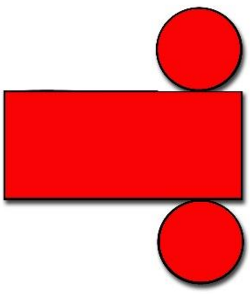
Un cilindro se genera girando un rectángulo alrededor de uno de sus lados.



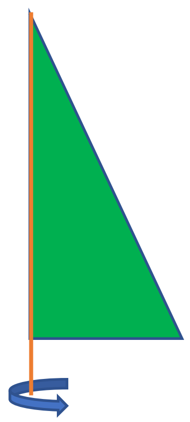


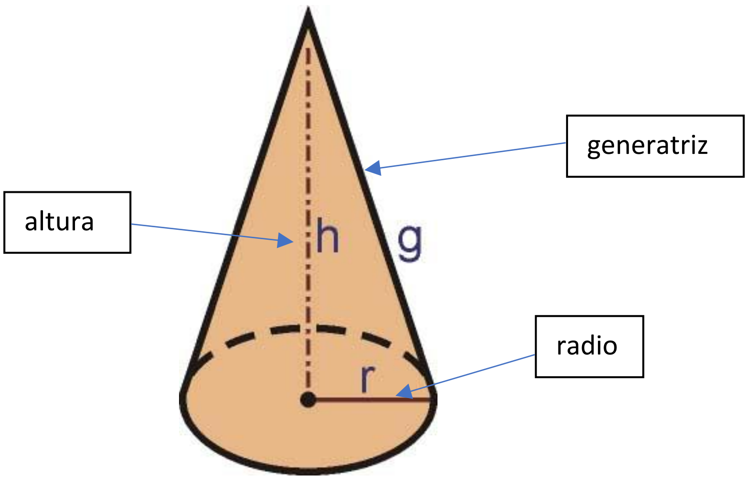
Un cilindro es un prisma recto, pero ahora las bases son círculos.

De un cilindro cualquiera se puede hacer el desarrollo en el plano. Este se compone de un rectángulo y dos círculos.

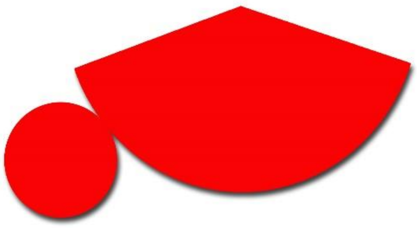


Un cono se genera girando un triángulo rectángulo alrededor de alrededor de uno de sus catetos.



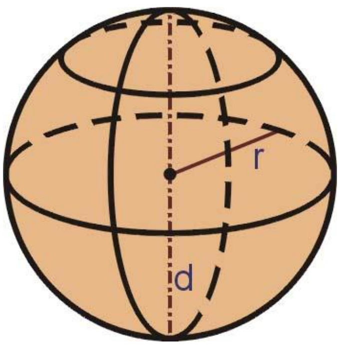


Un cono es como una pirámide regular, pero ahora la base es un círculo. De un cono se puede hacer el desarrollo en el plano.



Una esfera se genera cuando hacemos que un semicírculo gire alrededor de su diámetro. El radio del semicírculo es el radio de la esfera.

Cuando cortamos una esfera por un plano, todos los cortes son círculos. Si el plano por el que se corta pasa por el centro de la esfera, obtenemos un círculo máximo. El radio de un círculo máximo es el radio de la esfera.

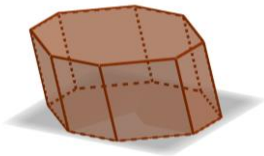
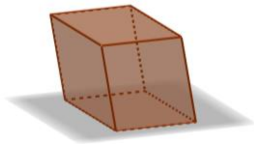


De una esfera no se puede hacer el desarrollo en el plano.

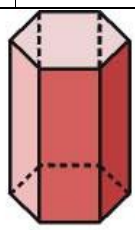
En la esfera terrestre, los meridianos se corresponden con círculos máximos. Los paralelos son las circunferencias que quedan al cortar la esfera terrestre con planos perpendiculares al eje que pasa por los polos. El ecuador es el único paralelo que es un círculo máximo.

Actividades finales

1. Completa

			
Caras			
Aristas			
Vértices			

2. a)Dibuja el desarrollo del prisma



b) ¿Cuántas caras tiene?

c) ¿Cuántas aristas?

d) ¿Cuántos vértices?

3. Completa les frases sobre poliedros regulares

a) El ___________________tiene 4 caras que son ________________.

b) El ___________________tiene ___ caras que son cuadrados.

c) El ___________________tiene 8 caras que son ________________.

d) El ___________________tiene ___ caras que son pentágonos.

e) El ___________________tiene 20 cares que son_______________.

4. Di si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) El mayor número de caras de un poliedro regular es 20.

b) No es puede hacer un poliedro regular nada más con hexágonos.

c) Las aristas de un polígono regular no son todas de la misma longitud.

d) Todos los poliedros se hacen con el mismo tipo de polígono.

5. Dibuja el desarrollo de un prisma, la base del cual es un rectángulo de longitudes 3 cm × 5 cm y que mide 8 cm de altura.

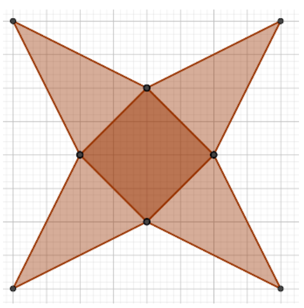
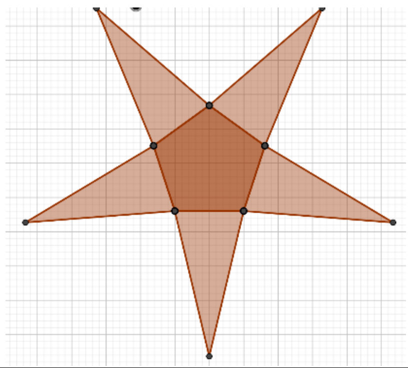
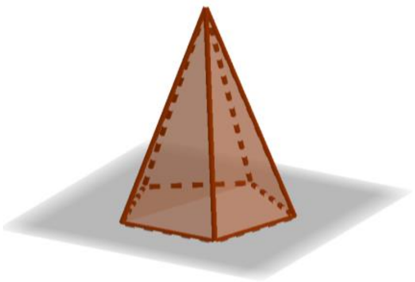
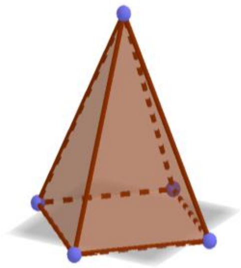
6. Calcula la superficie de cartulina que necesitamos para hacer:

a) Un tetraedro regular de aristas de 5 cm. (Toma de altura de los triángulos 4,3 cm).

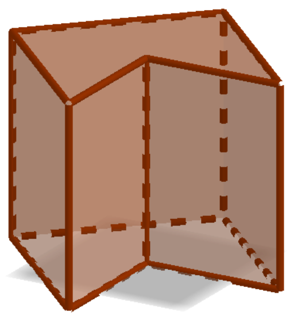
b) Un hexaedro regular de aristas de 7 cm.

c) Un dodecaedro regular de aristas de 6 cm. (Toma de apotema de los pentágonos 4,1 cm).

7. Identifica cada poliedro con su desarrollo.

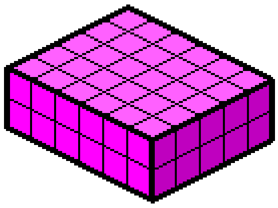
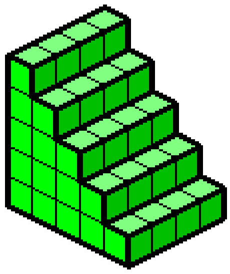
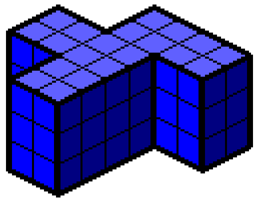
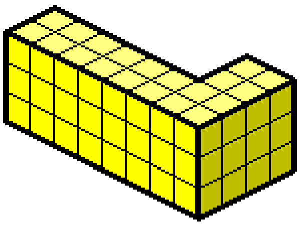
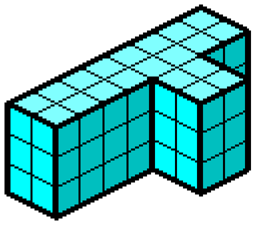
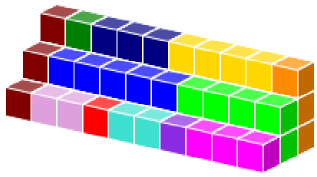
 a)	 b)
 1)	 2)

8. Dibuja el desarrollo del poliedro:

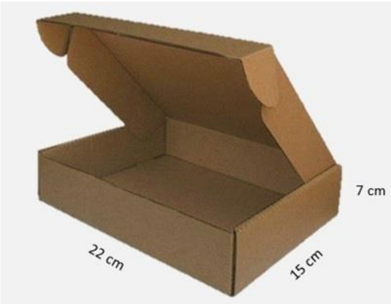


9. Estima el volumen de un aula de colegio en m^3 y en litros.

10. Calcula el volumen de cada figura sabiendo que cada cubo representa 1 cm^3.

a) 	b) 	c) 
d) 	e) 	f) 

11. Calcula el volumen de la caja en cm^3, en m^3 y en litros:



12. Describe la forma de estos objetos. ¿Qué cuerpos geométricos aparecen?

a)	b)	c)
		

13. ¿Cuántos litros caben en una piscina de 25 m de largo, 10 m de ancho y 1,5 m de profundidad?

14. Repasa las unidades de medida y completa:

a) En un cubo de 1 dm de arista caben _______cubos de 1 cm de arista.

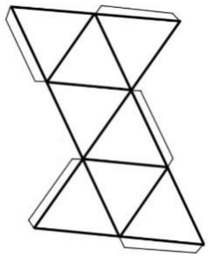
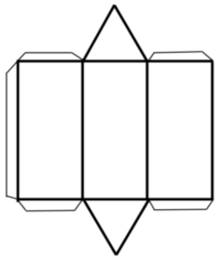
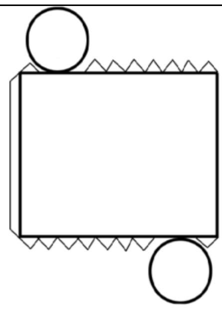
b) En un cubo de 1 m de arista caben _________litros.

c) En un cubo de 1 dm de arista caben ________litros.

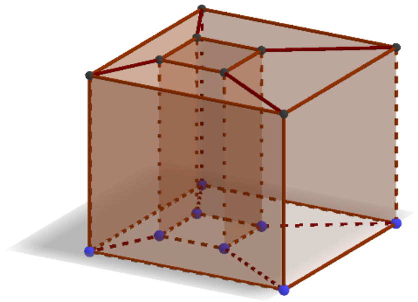
d) Un cubo de 1 dm de arista tiene un volumen de ______.

e) Un cubo de 4 m de arista tiene un volumen de ______.

15. Di a que cuerpos geométricos corresponden los desarrollos siguientes:

a)	b)	c)
		

16. ¿Se cumple la fórmula de Euler en este poliedro con un agujero?

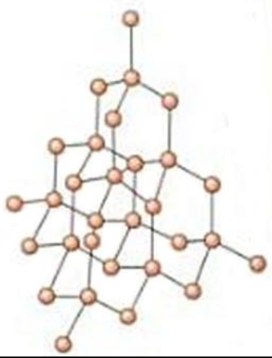
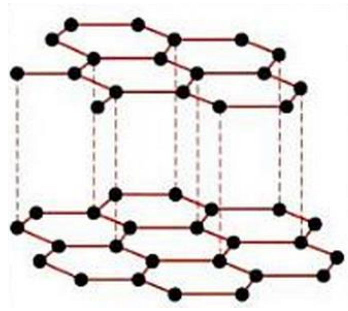


Indicación: Observa que tiene 32 aristas y 16 caras.

Sabias que…

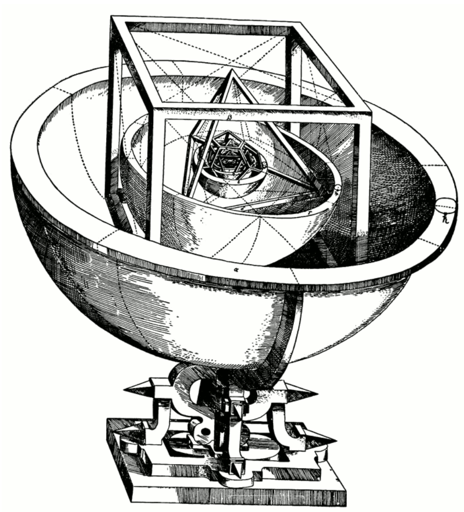
- El diamante y el grafito (material con el que se fabrican los lápices) tienen la misma composición química pero diferente estructura cristalina, es decir, los átomos de carbono se disponen de diferente forma.

En el caso del diamante forman tetraedros y en el caso del grafito forman prismas de base hexagonal.

a) Diamante	b) Grafito
	

- Los poliedros ja se conocían en el neolítico, prueba de eso son estos poliedros de un yacimiento de Escocia.

Platón (griego, 427-347 a. C.) asoció los elementos de la naturaleza con poliedros regulares. Según él, el fuego está formado por tetraedros; el aire, de octaedros; el agua de icosaedros; la tierra de cubos; y como todavía es posible una quinta forma, Dios ha utilizado esta, el dodecaedro pentagonal, para que sirva de límite al mundo.



Más tarde, Johannes Kepler (alemán 1571-1630) propuso un Sistema Solar en el que los planetas giraban alrededor del Sol en unas esferas contenidas en los poliedros regulares. A Mercurio no le correspondía ningún poliedro, pero sí que tenía Venus, La Tierra, Marte, Júpiter y Saturno. En esta época solamente se conocían 6 planetas. Esta teoría no es válida, pero a partir de ella Kepler, dedujo sus tres leyes famosas, las leyes de Kepler, que permiten explicar correctamente los movimientos orbitales de todos los planetas.

Calculadora científica 

Tecla para calcular el cubo de un número x^3 En la mayoría de las calculadoras has de pulsar primero la tecla SHIFT
También es equivalente $x^{\blacksquare}$ 3

Para calcular 45^3:

45 SHIFT x^3

Resultado: 91125

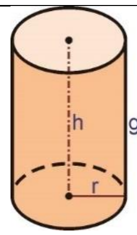
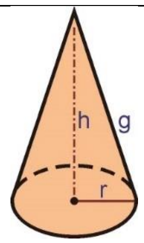
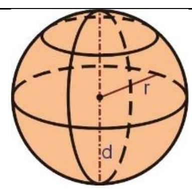
Actividad propuesta

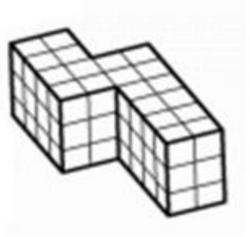
1. Calcula el volumen de un cubo de 56 cm de arista.

2. Completa la tabla

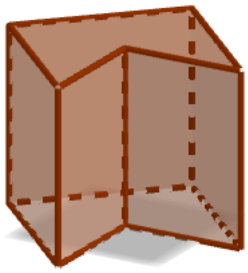
x	0	23	100	64	25	1	1000
x^3							

Resumen

<table>
<tr><th>Nombre del concepto o propiedad</th><th>Definición</th><th colspan="3">Ejemplo</th></tr>
<tr><td>Poliedro</td><td>Un poliedro es una parte del espacio delimitada por superficies planas.</td><td colspan="3">Un cubo es un poliedro.</td></tr>
<tr><td>Elementos de un poliedro</td><td colspan="4">Caras (son polígonos), aristas (son segmentos) y vértices (son puntos)</td></tr>
<tr><td>Fórmula de Euler</td><td colspan="4">$Caras - Arestes + Vèrtexs = 2$
Se cumple para cualquier poliedro que no tenga agujeros.</td></tr>
<tr><td>Poliedros regulares</td><td colspan="4">Todos los polígonos que forman el poliedro son regulares y además tienen el mismo número de lados. Nada más se pueden formar poliedros regulares con triángulos, cuadrados y pentágonos. Hay 5: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.</td></tr>
<tr><td>Prisma</td><td>Es un poliedro formados por dos bases iguales y paralelas, y por caras laterales que son romboides. En los prismas rectos, las caras laterales son rectángulos.</td><td colspan="3">Una caja de zapatos es un prisma.</td></tr>
<tr><td>Pirámide</td><td>Es un poliedro con una sola base formada por un polígono cualquiera, y sus caras laterales son triángulos.</td><td colspan="3">Las pirámides de Egipto.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Cuerpos redondos</td><td colspan="4">Algunos de estos son:
el cilindro, el cono, y la esfera.</td></tr>
<tr><td>
</td><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

Volumen de un cuerpo	Es la cantidad de espacio que ocupa.	 Si cada cubo tiene de arista 1 cm, como hay 60 cubos pequeños, deducimos que el volumen es igual a 60 cm^3.

Autoevaluación



1. Completa el número de caras, aristas y vértices de:
   a) 7 caras, 11 aristas y 8 vértices.
   b) 4 caras, 15 aristas y 10 vértices.
   c) 7 caras, 15 aristas y 10 vértices.
   d) Ninguno de los anteriores.
2. ¿Cómo se denomina el poliedro regular que tiene 20 caras?:
   a) vintaedro b) icosaedro c) cubo d) hexaedro
3. Si cada cubo pequeño tiene 1 cm de arista. ¿Cuál es el volumen que tiene el cuerpo de la figura?

   a) 72 cm^3
   b) 70 cm^3
   c) 60 cm^3
   d) 80 cm^3
4. ¿Cuántos litros de agua caben en un depósito de ancho 0,5 m, de largo 1 m y de alto 1,5 m?
   a) 750 l b) 0,75 l c) 7500 l d) 3000 l
5. ¿Cuántos poliedros regulares diferentes podemos hacer con 32 triángulos equiláteros iguales?
   a) 6 b) 5 c) 4 d) 3
6. ¿Cuántos rectángulos necesitan para construir una caja con cartulina sin tener en cuenta las pestañas para enganchar las caras?
   a) 6 b) 8 c) 12 d) 4

7. La pirámide de Keops de Egipto tiene una base cuadrada. ¿Cuántas caras tiene?

a) 4 b) 5 c) 3 d) Ninguna de las anteriores

8. Para coser una funda para este cojín necesitan cortar:

a) El desarrollo de un cilindro
b) Un polígono curvo y dos círculos
c) Dos círculos iguales y un rectángulo
d) a) y c) son verdaderas

9. Señala la afirmación falsa

a) Una esfera tiene un desarrollo en el plano.
b) Un prisma tiene dos bases que son paralelas.
c) Las caras laterales de un prisma recto son rectángulos.
d) Un cubo es también un prisma recto de base cuadrada.

10. En un vértice de un dodecaedro concurren

a) 5 caras b) 6 caras c) 2 caras d) 3 caras

11. Si un poliedro tiene agujeros, entonces el resultado de caras-aristas+vértices es

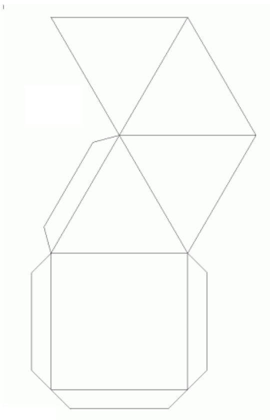
a) siempre es 2 b) siempre es 0 c) siempre es 4 d) No es 2

12. Para hacer esta luz utilizan unas varillas de plástico en las aristas. ¿Cuántas varillas de plástico se necesitan?

a) 3 b) 6 c) 4 d) 5

Solucionario. Actividades propuestas

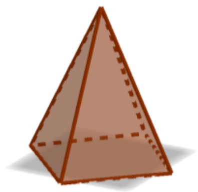
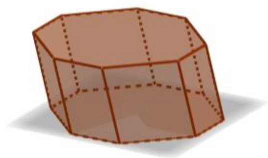
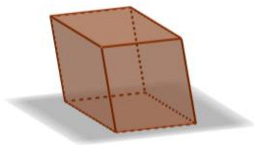
1. C=5, A=9, V=6; 5-9+6=2
2.



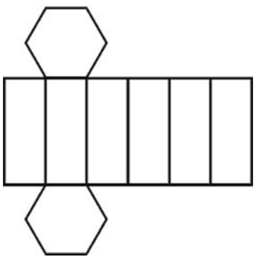
3. 9 cm^3
4. 1000 cm^3=1 l

Solucionario. Actividades finales

1. Completa

			
Caras	5	10	6
Aristas	8	24	12
Vértices	5	16	8

2. a)



b) 8 caras

c) 18

d) 12

3. Completa las frases sobre poliedros regulares

a) El__tetraedro_______tiene 4 caras que son____triángulos________.

b) El __cubo o hexaedro ___tiene_6_ caras que son cuadrados.

c) El __octaedro________tiene 8 cares que son__triángulos_________.

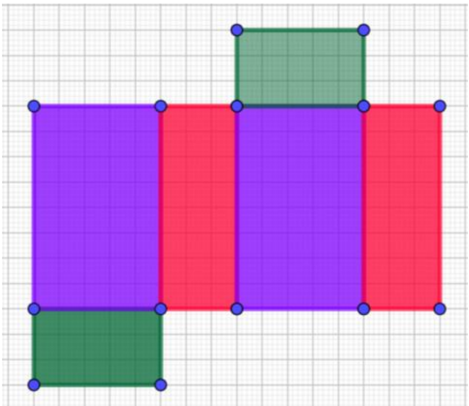
d) El __dodecaedro _____tiene _20__ caras que son pentágonos.

e) El __icosaedro_______tiene 20 caras que son__triángulos________.

4. Di si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) V b) V c) F d) F

5.



6. a) Cada triángulo tiene de superficie $A = \frac{5 \cdot 4{,}3}{2} cm^2$. Como hay 4 triángulos, multiplicamos por 4 y nos quedan 43 cm^2.

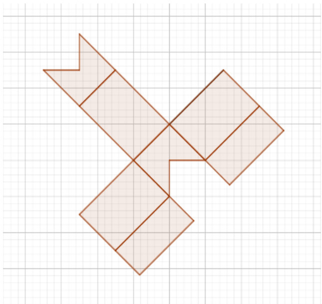
b) Como tiene 6 cuadrados, el área total es $6 \cdot 7^2 cm^2 = 294 cm^2$.

c) Cada pentágono tiene una superficie $A = \frac{Perímetreapotema}{2} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 4{,}1}{2} cm^2$.

Como hay 12 pentágonos, multiplicamos por 12 y nos quedan 738 cm^2.

7. a)→2) b)→1)

8.



9. Mide el largo, ancho y alto en la misma unidad (cm) y multiplica.

10. Calcula el volumen de cada figura sabiendo que cada cubo representa 1 cm^3.

a) 60 cm^3	b) 60 cm^3	c) 60 cm^3
d) 60 cm^3	e) 60 cm^3	f) 60 cm^3

11. Multiplicamos los valores de las tres dimensiones (largo, ancho y alto):

$22 \cdot 15 \cdot 7 cm^3$=2310 cm^3=2,31 dm^3=2,31 l=0,00231 m3.

12. a) Prisma recto de base cuadrada

b) Prisma recto de base triangular

c) Pirámide de base cuadrada.

13. $25 \cdot 10 \cdot 1{,}5 m^3 = 375 m^3 = 375000 l$

14.

a) En un cubo d'1 dm de arista caben _1000__cubos de 1 cm de arista.

b) En un cubo d'1 m de arista caben __1000_____litros.

c) En un cubo d'1 dm de arista cabe __1______litro.

d) Un cubo de 1 dm de arista tiene un volumen de __1 l =1 dm^3____.

e) Un cubo de 4 m de arista tiene un volumen de __64 m^3=64000 l____.

15.

a) Octaedro	b) Prisma recto de base triangular	c) Cilindro

16. No, observa que tiene 16 vértices. Por tanto, 16-32+16=0. Recuerda que esta fórmula se cumple para poliedros sin agujeros.

Solucionario. Actividades calculadora

1. 175616 cm^3.

2. Completa la tabla

x	0	23	100	64	25	1	1000
x^3	0	12167	1000000	262144	15625	1	1000000000

Solucionario. Autoevaluación

1c) 2b) 3c) 4a) 5d) 6a) 7b) 8d) 9a) 10d) 11d) 12b)

Unidad Didáctica 7. Magnitudes proporcionales. Porcentajes. Escalas

¡Las rebajas!

Andrés tiene dos chicos gemelos de un mes. Quiere ir a las rebajas a comprar ropa. En una tienda le dan 3 por 2 y en otra le hacen el 40 % de descuento. Quiere comprar 3 pijamas para cada uno. Si un pijama cuesta 6 euros sin rebaja, ¿cuánto costarán todos en cada caso? ¿Dónde es mejor ir?

En esta unidad se muestran estrategias y herramientas para que:

- Realices cálculos en los que intervengan magnitudes proporcionales.
- Entiendas el significado del porcentaje de una cantidad.
- Construyas objetos a partir de planos, mapas y maquetas.

Has de repasar:

-El concepto de fracción y las operaciones con fracciones y decimales.

Índice

1. Razón y proporción

En la vida cotidiana aparecen comparaciones entre valores de dos magnitudes diferentes, por ejemplo, cuando vamos al supermercado hay carteles que indican los precios para cada kilo o por cada unidad. Eso es una razón, más concretamente, una *razón* es el cociente de un número a entre otro número b de manera que los dos corresponden a valores ralacionados de diferentes magnitudes:

$$\frac{a}{b}$$

El número a se denomina *antecedente* y el número b se denomina *consecuente*.

Ejemplos:

- La razón entre el precio total de los tomates y el número de kilos que compro. Podemos decir, “he comprado tomates a razón de 3 euros por cada dos kilos”. Por tanto, la razón es

$$\frac{3}{2}$$

- La razón entre el salario que gano y el número de horas trabajadas durante los meses de junio, julio y agosto. Las fechas de esta tabla demuestran que la razón es diferente en cada mes.

	Junio	**Julio**	**Agosto**
Salario (€)	1440	1500	2000
Horas (h)	160	150	100
Cociente	$\frac{1440}{160}$	$\frac{1500}{150}$	$\frac{2000}{100}$
Resultado del cociente €/h	9	10	20

Una *proporción* es una igualdad de dos razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Para su colocación, los números a y d se denominan *extremos* y los números b y c, *medios*.

En una proporción, se cumple que el producto de extremos es igual al producto de medios, es decir, $a \cdot d = c \cdot d$.

Ejemplos

- María está en el bosque de excursión con sus amigos y quiere realizar una actividad con los niños. Propone averiguar la altura de dos árboles muy altos. Lo único que utilizará es un listón de madera de 1 m. La estrategia que seguirán es medir las sombras porqué:

$$\frac{alturaarbreA}{ombraarbreA} = \frac{alturaarbreB}{ombraarbreB} = \frac{alturallistófusta}{ombrallistófusta}$$

Ahora mismo, el listón de madera puesto de forma vertical tiene una sombra de

0,50 m.

La sombra del árbol A es de 2 m y la sombra del árbol B es de 3 m. Por tanto,

$$\frac{alturaarbreA}{2} = \frac{1}{0,5}$$
$$\frac{alturaarbreB}{3} = \frac{1}{0,5}$$

Así pues,

$$alturaarbreA = \frac{1}{0,5} \cdot 2 = 4m$$
$$alturaarbreB = \frac{1}{0,5} \cdot 3 = 6m$$

María tiene que explicar que la altura del árbol en esta hora del día es el doble de la medida de su sombra.

- Si el precio de una fotocopia es de 7 céntimos tenemos la tabla siguiente de precios:

Precio	7	14	21	28	35	42	49
Fotocopias	1	2	3	4	5	6	7

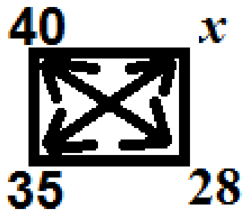
Como puedes observar $\frac{7}{1} = \frac{14}{2}; \ \frac{28}{4} = \frac{35}{5}$

Actividad propuesta

1. Completa la tabla, sabiendo que el kilo de patatas está a 0,8 €.

€			2,4				
kg	1	2		4	5	6	7

Actividad resuelta



- Averigua el valor desconocido en las proporciones:

a) $\frac{40}{35}=\frac{x}{28}$ $\qquad 35\cdot x=40\cdot 28\leftrightarrow x=\frac{40\cdot 28}{35}\leftrightarrow x=32$

b) $\frac{60}{25}=\frac{12}{x}$ $\qquad 60\cdot x=25\cdot 12\leftrightarrow x=\frac{25\cdot 12}{60}\leftrightarrow x=5$

c) $\frac{x}{10}=\frac{10}{25}$ $\qquad 25\cdot x=10\cdot 10\leftrightarrow x=\frac{10\cdot 10}{25}\leftrightarrow x=4$

d) $\frac{4}{x}=\frac{6}{15}$ $\qquad 6\cdot x=4\cdot 15\leftrightarrow x=\frac{4\cdot 15}{6}\leftrightarrow x=10$

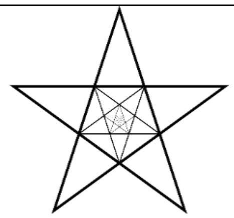
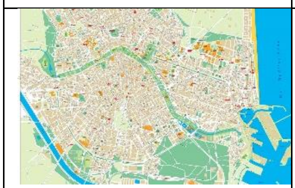
Hemos utilizado que el producto de los extremos es igual al producto de los medios. El número que está en la diagonal donde está la variable x es el que pasa a dividir. Es razonable porqué si, por ejemplo, 6 veces x es igual a 60, eso significa que x es la sexta parte de 60 que es 10.

Actividad propuesta

2. Averigua el valor desconocido

a) $\frac{6}{9}=\frac{x}{15}$	b) $\frac{3}{12}=\frac{5}{x}$	c) $\frac{x}{40}=\frac{2}{10}$	d) $\frac{100}{x}=\frac{40}{12}$

¿Dónde aparecen las proporcionalidades?

			 Menys
	+ % IVA		

2 Regla de tres simple directa

Dos magnitudes ai b son *directamente proporcionales* con razón de *proporcionalidad* k cuando el cociente $\frac{a}{b}$ es siempre igual a k.

$$\frac{a}{b} = k$$

Observa, que en este caso al aumentar una magnitud (doble, triple, etc.) también aumenta el valor de la otra (doble, triple, etc.).

Por ejemplo, el precio total de los tomates que compro y el número de kilos son magnitudes directamente proporcionales. Si compro el doble de kilos, entonces el precio será el doble, si compro el triple, el precio será el triple y así sucesivamente. En cambio, el salario y el número de horas trabajadas puede ser que no sean magnitudes directamente proporcionales, dependerá del tipo de trabajo. En algunos casos, el salario depende del rendimiento. Por ejemplo, en la recogida de patatas puede depender del número de sacos y no del número de horas y por tanto, el cociente del salario entre el número de horas no da siempre lo mismo.

En el ejercicio del número de fotocopias, la razón de proporcionalidad es 7, que es el precio en céntimos por unidad.

Ahora te propongo una manera práctica de organizar la información en la situación siguiente:

Pau se dedica al transporte de verduras y frutas de cosechas pequeñas. Él recuerda que el año pasado necesitó 8 viajes para transportar 120 cajas de albaricoques. Ahora, tiene que transportar 315. ¿Cuántos viajes necesitará?

Observa que a más cajas, más viajes necesitará. El número de cajas y el número de viajes son magnitudes directamente proporcionales.

En el método de la regla de tres hay que colocar los valores de una magnitud en la misma columna:

$$\left.\begin{array}{lcc} 120\, caixes & ------\rightarrow & 8 viatges \\ 315\, caixes & ------\rightarrow & x \end{array}\right\}$$

Como la razón entre cajas y número de viajes es siempre la misma, la ecuación que tenemos que plantear es:

$$\frac{120}{315} = \frac{8}{x}$$

Es el mismo orden de colocación, quitando que ponemos el signo igual y las rayas de las fracciones.

Ahora, hay que recordar que es una proporción y, por tanto, el producto de los extremos es igual al producto de los medios: $120 \cdot x = 8 \cdot 314$, y de aquí:

$$x = \frac{8 \cdot 315}{120};$$

Fíjate que es equivalente a plantear la proporción,

$$\frac{120}{8} = \frac{315}{x}$$

Hacemos el cálculo:

$$x = 21 \text{ viajes.}$$

También podemos calcular las cajas que puede llevar en un viaje y después dividir el total de cajas que ha de transportar entre el número de cajas de un viaje. Este método se denomina *reducción a la unidad de la magnitud*. En este caso,

$$120 : 8 = 15$$

$$315 : 15 = 21$$

¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre cajas y viajes?

La respuesta es 15.

Actividades resultas:

- Marina tiene dos ofertas de telefonía móvil. Con la compañía A, tiene que pagar 0,25 € por cada 3 minutos y con la compañía B tiene que pagar 1 € por cada 15 minutos. Si las dos compañías calculan la tarifa por minutos, ¿qué compañía resulta más barata?

Datos:

Minutos	Precio	Compañía A
3	0,25 €= 25 céntimos	

Minutos	Precio	Compañía B
15	1 €=100 céntimos	

Estrategia: Calcular el número de minutos que podemos hablar por 1€ en la compañía A.

$$\left.\begin{array}{lcr} x & ------\rightarrow & 100\ c\grave{e}ntims \\ 3minuts & ------\rightarrow & 25\ c\grave{e}ntims \end{array}\right\}$$

Planteamiento: $\frac{x}{3} = \frac{100}{25}$

Resolución: $x = 12$.

Respuesta: Es mejor la compañía B, porque da más minutos por 1 €.

Hay otras estrategias, como calcular el precio de un minuto en cada compañía.

Actividad propuesta

3. Un tren recorre 350 km en 2 horas, ¿cuántos kilómetros recorrerá en 3 horas?

4. Pepe cobra 200 euros por cada 3 máquinas vendidas. ¿Cuánto cobrará si vende 21 máquinas?

Actividad resuelta

- La libra esterlina está a 1,12 euros. ¿Cuántas libras son 336 euros?

£ -------------> €

1 ------------> 1,12

x ------------> 336

Se trata de una regla de tres simple directa.

$$\frac{1}{x} = \frac{1{,}12}{336}$$

Por tanto, tiene $x = 336 : 1{,}12 = 300£$.

Actividad propuesta

5. Teniendo en cuenta que 1 €=0,86 $, realiza los siguientes cambios de moneda:

a) 860 $= €	b) 10 € = $	c) 50 € = $

3. <u>Regla de tres simple inversa</u>

Suponemos que queremos pintar una masía de 48 habitaciones. Un pintor puede pintar una habitación por día. Si contrato un pintor tardará 48 días, pero si contrato 2 pintores, entonces, en 24 días acabarán el trabajo. En este caso, el número de pintores y el número de días que son necesarios son magnitudes inversamente proporcionales. Si aumenta el número de pintores (el doble, el triple, etc.), disminuye el número de días, (la mitad, la tercera parte, etc.), más concretamente, dos magnitudes a y b son *inversamente proporcionales* con *razón de proporcionalidad* k cuando el producto $a \cdot b$ es siempre igual a k.

$$a \cdot b = k$$

Si aumentamos el valor de una disminuye el valor de la otra.

¿Cuánto tardarán 6 pintores en realizar la misma tarea?

Planteamos el problema con el esquema de regla de tres.

$$\left.\begin{array}{lcc} 2\, pintors & ------\rightarrow & 24 dies \\ 6\, pintors & ------\rightarrow & x \end{array}\right\}$$

El producto del número de pintores por el número de días es constante. Por tanto, la ecuación que tenemos que plantear es,

$$\frac{6}{2} = \frac{24}{x}$$

$$\underbrace{6 . x}_{\text{n. pintores multiplicado por los días}} = \underbrace{2 . 24}_{\text{n. pintores multiplicado por los días}}$$

Por tanto, $x = \frac{2 \cdot 24}{6} \leftrightarrow x = 8 días$.

Fíjate que se resuelve de la misma forma que en el caso de la regla de tres simple directa, excepto en la colocación de los números en la ecuación $\frac{6}{2} = \frac{24}{x}$.

Aquí no hemos guardado el orden del esquema de la regla de tres, sino que hemos invertido los valores de los pintores. Has de hacer una sola inversión. El resto de resolución es la misma que en el caso directo.

Pintores	1	2	3	4	6	8	12	16	24	48
Días	48	24	16	12	8	6	4	3	2	1
Pintores×Días	48	48	48	48	48	48	48	48	48	48

En este problema el número de habitaciones, 48, es igual al número de pintores que hay cada día multiplicado por el número de días.

Actividad resuelta

- Un ciclista tarda 8 horas en recorrer la distancia entre dos poblaciones. Ha hecho una parada de 2 horas y ha ido a 15 km/h. ¿Cuánto tardará si hace el mismo recorrido a una velocidad de 12 km/h si la parada es de 1 hora?

Datos: Pedalea 6 h a la velocidad de 15 km/h. Ahora va a 12 km/h y la parada es de 1 hora.

Las magnitudes que relacionamos son el tiempo y la velocidad. Son magnitudes inversamente proporcionales, a más velocidad, menor tiempo.

Planteamiento:

$$\left.\begin{array}{lcl} 6\ hores & ------\rightarrow & 15\ km/h \\ x & ------\rightarrow & 12\ km/h \end{array}\right\}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{12}{15}$$

Hemos invertidos los datos de una de las columnas cuando hemos planteado la ecuación.

Resolución: $x = \frac{6 \cdot 15}{12} \leftrightarrow x = 7{,}5$

Tenemos que sumar la hora que está parado.

Respuesta: 8,5 horas, es decir 8 horas y 30 minutos.

Actividad propuesta

6. Tres grifos tardan en llenar una piscina 15 horas. ¿Cuánto tardan en llenar la piscina 5 grifos del mismo caudal?

4. Porcentajes. Aumentos y disminuciones

- **El porcentaje y la regla de tres simple directa**

Cuando r de cada 100 unidades tienen una cierta propiedad decimos que el r por cien de las unidades tiene esta propiedad y escribimos $r\%$.

Ahora, si tenemos una cantidad Q, ¿cuántas tienen esta propiedad?

Planteamos la regla de tres,

Parte -----------> Total

r -----------> 100

x -----------> Q

Las magnitudes parte y total son directamente proporcionales porque el cociente entre la parte y el total es constante, es decir, siempre da el mismo número. Observa que a mayor parte, mayor total.

$$\frac{r}{100}=\frac{p}{Q} \qquad \frac{r}{p}=\frac{100}{Q}$$

De donde deducimos que $r\%$ de una cantidad Q se calcula mediante la fórmula:

$$r\%\ de\ Q=\frac{r\cdot Q}{100}$$

Eso significa que para calcular el $r\%$ de una cantidad Q, primero multiplicamos el número r por la cantidad Q, y después el resultado de esta multiplicación lo dividimos entre 100.

Actividad resuelta

- Calcula los porcentajes siguientes: a) 6% de 50 b) 8% de 400.

a) 6% de 50=$\frac{6\cdot 50}{100}=3$

b) 8% de 400=$\frac{8\cdot 400}{100}=32$

Actividad propuesta

7. Calcula los porcentajes siguientes:

a)3% de 500	b)8% de 700	c)10% 500
d)5% de 900	e)4% de 150	f)7% de 2000

Porcentaje como fracción de una cantidad. Observa que $\frac{r}{100}$ de la cantidad Q es igual al $r\%$ de dicha cantidad.

El 8 % 100 de 230 es igual que $\frac{8}{100} de 230$, es decir, $\frac{8}{100} \cdot 230$. Por tanto,

$$8\% \text{ de } 230 = \frac{8}{100} \cdot 230 = \frac{8 \cdot 230}{100} = 18{,}4$$

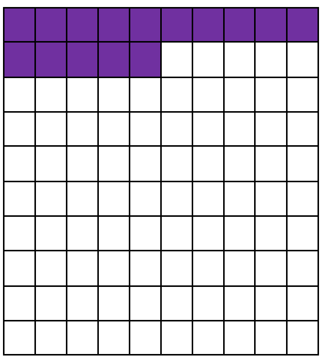
Actividad propuesta

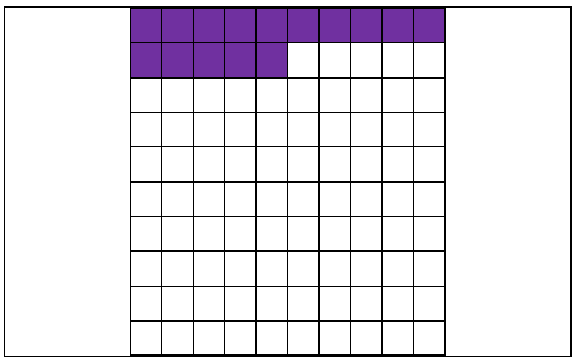
8. Completa la tabla

Porcentaje	**Fracción**	**Cálculo**
9% de 300	$\frac{9}{100} de 300$	
3% de 15		
8% de 1000		
18% de 500		

Actividad resuelta

- Imagínate que tienes 200 cajas y en cada caja tienes 5 €. Si coges los dineros que hay en el 15% de las cajas, ¿cuánto dinero has de coger?





Con este dibujo está claro que el 15 % de 200 es 30. Ahora,

$$30 caixes \times 5\,€/caixa = 150€$$

- Una máquina fabrica al día 850 juguetes de plástico de los cuales 17 presentan algún defecto. ¿Qué porcentaje de juguetes defectuosos fabrica la máquina?

Podemos plantear la regla de tres,

Parte ---------------------> Total

r ---------------------> 100

17 ---------------------> 850

$\frac{r}{17} = \frac{100}{850}$. De aquí obtenemos $r = \frac{1700}{850} \leftrightarrow r = 2$.

El porcentaje de juguetes defectuosos es del 2 %.

Actividades propuestas

9. El embalse de Forata en Valencia tiene una capacidad de 37 hm^3. ¿Cuántos litros de agua tiene si está al 30% de su capacidad?

Aumento porcentuales

Aumentar el r por ciento de una cantidad Q significa sumar a la cantidad Q, el r% de la cantidad Q, es decir,

$$Q + el r \% de Q.$$

- Si un producto vale 100 € y aumenta su valor 20 %, entonces, ahora vale 120 €.
- Si un producto vale 200 € y aumenta su valor el 20 %, es decir, aumenta 40 €, entonces, vale 240 €. Fíjate que el 120% de 200 es 240.

Ejemplo

- El precio de unos zapatos es de 30 euros. Hay que añadir el 21% de IVA al precio. ¿Cuál es el precio final?

Calculamos el 21% de 30 y sumamos el resultado a 30,

$$\frac{30}{100} \cdot 21 = 6{,}3; \quad 30 + 6{,}3 = 36{,}3€.$$

Planteamiento mediante regla de tres.

Sin IVA ----------------> Con IVA

100 € ----------------> 121 €

30 € ----------------> Q_a

$$Q_a = \frac{121 \cdot 30}{100} = 36{,}3€$$

La cantidad aumentada con el IVA es 36,3 €.

Actividad resuelta

- Mario ha olvidado pagar un impuesto municipal de 80 euros y por eso ha de pagar un 5% de recargo. ¿Cuánto ha de pagar ahora?

Calculamos el 5 % de 80,

$$5\ \% de 80 = \frac{5 \cdot 80}{100} = 4.$$

Sumamos, $80 + 4 = 84$.

Respuesta. Mario ha de pagar 84 € ahora.

Actividades propuestas

10. Aumenta las cantidades en 8 %

a) 240	b) 4500	c) 7000	d) 800

Disminuciones porcentuales

Disminuir el r por ciento una cantidad Q significa quitar a la cantidad Q, el r% de la cantidad Q, es decir, $Q - el\, r\%\ de\ Q$.

Si un producto vale 100 € y lo rebajan el 20 % ahora vale 80 €.

Si un producto vale 200 € y lo rebajan el 20 %, entonces te rebajan 40 € y ahora vale 160 €. Fíjate que el 80 % de 200 es igual a 160.

Ejemplos:

El precio de un libro es de 30 euros. Si tiene una rebaja del 7%, ¿cuál es el precio final?

Calculamos el 7% de 30 y restamos el resultado a 30,

$$\frac{7}{100} \cdot 30 = 2{,}1; \qquad 30 - 2{,}1 = 27{,}9.$$

El precio final es 27,9 €.

Planteamiento mediante regla de tres directa: de cada 100 € te rebajan 7 €, es decir, si una cosa vale 100 €, entonces te cuesta

Precio ------------> Precio con descuento

100 ------------> 93

30 -----------> Q_d

$$Q_d = \frac{30 \cdot 93}{100} = 27{,}9$$

Actividades resueltas

- Compré un vestido, me cobraron 340 € y me dijeron que me habían rebajado un 15%. ¿Cuánto valía el vestido sin rebajar?

  Precio -------------> Precio con descuento

  100 -------------> 85

  x ------------> 340

$$x = \frac{100 \cdot 340}{85} = 400$$

El vestido valía 400 € sin rebajar.

- **Día sin IVA y día de rebajas.**

  Lucía quiere comprar un ordenador nuevo. Actualmente vale 605 € con IVA incluido del 21 %. Mañana es el día sin IVA y al día siguiente habrá una rebaja del 21 %. ¿Cuándo es mejor comprarlo?

Día sin IVA

Precio sin IVA ----------------> Precio con IVA incluido

100 ----------------> 121

x ---------------> 605

$$x = \frac{100 \cdot 605}{121} = 500$$

Día de rebajas

Precio rebajado --------------> Precio con IVA incluido

79 --------------> 100

y --------------> 605

$$y = \frac{79 \cdot 605}{100} = 477{,}95$$

Por tanto, es mejor comprar el ordenador el día de rebajas.

Volviendo al problema inicial

En la primera tienda:

Pagará 4 pijamas. Por tanto, el precio final es $4 \times 6 = 24€$.

En la segunda tienda:

Pagará 6 pijamas. Por tanto, el precio es $6 \times 6 = 36€ menys el descompte$.

$Descompte = 40 \times 36 : 100 = 14{,}4$.

Se hace la resta: 36-14,4=21,6

Conclusión: Es mejor ir a la segunda tienda.

Actividades propuestas

11. Aplica una rebaja del 15 % a los precios siguientes:

a) 350 €	b) 500 €	c) 450 €	d) 2000 €

5. Escalas

La escala es la relación matemática que existe entre las dimensiones del dibujo que representa la realidad sobre el plano o un mapa y las dimensiones reales.

Las escalas se escriben en forma de razón donde el antecedente incida el valor en el plano y el consecuente el valor en la realidad. Por ejemplo, la escala 1:300 significa que 1 cm del plano equivale a 300 cm en el original.

Ejemplos: 1:1, 1:10, 1:500, 6:1, 100:1

Tipos de escalas numéricas

Escala natural: Es la escala que utilizan cuando el tamaño del objeto en el dibujo coincide con la realidad, es decir, E. 1:1.

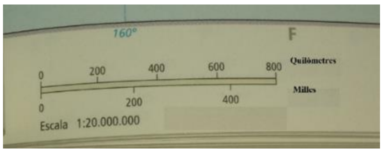
Escala de reducción: Se utiliza cuando el tamaño físico en el plano es menor que el de la realidad. Esta escala se utiliza para representar piezas (E.1:2 o E.1:5), planos de viviendas (E:1.50), mapas físicos de territorios, que pueden ser escalas como E.1.50.000 o E.1.100.000. Para conocer el valor real de una dimensión hay que multiplicar la medida en el plano por el valor del denominador.

Escala de ampliación: Se utiliza cuando hay que hacer el plano de piezas muy pequeñas o para los detalles de un plano. Por ejemplo, E. 2:1 o E. 100:1. En este caso, el valor del numerador es más alto que el valor del denominador. Para conocer el valor real se divide la medida del dibujo entre el numerador.

También, se utilizan **las escales unidad por unidad** donde se expresa la escala por una igualdad de unidades. Por ejemplo, 1 cm = 4 km, que significa que 1 cm en el dibujo equivale a 4 km de la realidad.

Además, existe la escala gráfica que es la representación dibujada de escala unidad por unidad, donde cada segmento muestra la relación entre la longitud de la representación y la de la realidad.

A veces en el propio dibujo se ponen las medidas reales.



Actividad resuelta

- En un mapa a escala 1:20.000.000 la distancia entre dos ciudades es de 10 cm. ¿Cuántos km hay entre estas?

Mapa		Realidad
1 cm	---------->	20.000.000 cm
10 cm	---------->	x

$$x = 10 \cdot 20.000.000 = 200.000.000\ cm = 2.000\ km$$

Actividad propuesta

12. En un mapa a escala 1:15.000.000 la distancia entre dos ciudades es de 5 cm. ¿Cuántos hay entre estas?

Actividades finales

1. Calcula les recetas para 6 personas:

a)Espagueti con pesto para 4 personas

275 g de pasta,
Un puñado de hojas de albahaca fresca,
4 dientes de ajos,
3 nueces picadas,
100 ml de aceite de oliva,
75 g de queso parmesano rallado,
sal y pimienta al gusto.

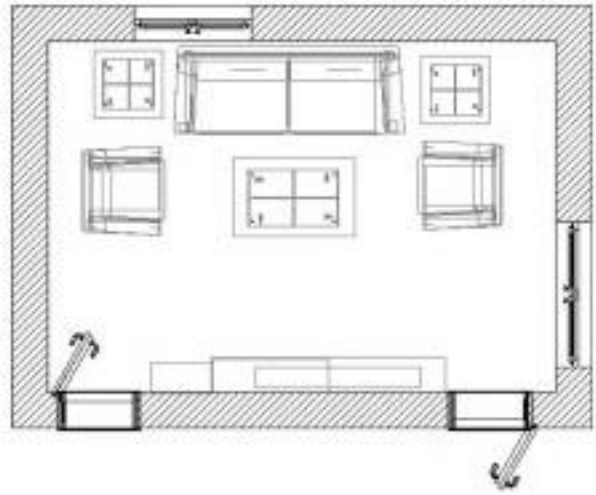
b)Fideuá para 4 personas

400 g de fideos gruesos de fideuá,
200 g de rape,
2 sepias,
8 langostinos,
2 dientes de ajo,
4 tomates muy maduros,
una cucharada de pimentón rojo dulce, azafrán en brizna, sal,
100 ml de aceite de oliva,
caldo de pescado (aproximadamente 1,5 litros).

c)Alcachofas rellenas de Benicarló con gambas de Vinaroz para 4 personas

8 alcachofas,
1/2 kg de gambas peladas,
1 cebolla,
1/2 l de caldo de pescado,
100 g de harina,
50 g de mantequilla,
sal, pimienta y nuez moscada.

2. Según el plano que está a 1:75, ¿es posible colocar un sofá un sofá de 2,3 m de largo?



3. Tres amigos comparan lotería. Uno de ellos pone 5 €, otro 20 € y otro 15 €. Les toca un premio de 10.000 €.
    a) Calcula la fracción de dinero invertido de cada uno.
    b) Calcula el porcentaje invertido por cada uno.
    c) Calcula los dineros del premio que corresponde a cada uno.
4. En los Estados Unidos de América nacen 6000 niños cada día. ¿Cuántos niños nacen en un año?
5. Para 3 kg de manzanas y 4 kg de peras he pagado 12,5 €. Si las peras cuestan a 2€/kg, ¿cuánto cuestan 2 kg de manzanas y uno de peras?
6. El rendimiento de la pintura que he comprado es de 8 m^2 por litro. Tengo que pintar una habitación que tiene 2 m de altura, 4 m de ancho y 4 m de largo. Si no tengo en cuenta, la ventana y la puerta, para que me sobre una poca pintura, ¿cuántos litros necesitaré?

7. Por 4 horas de faena, Maite ha cobrado 60 €. ¿Cuánto cobrará por 3 horas?

8. Agustín cobra el 4% de las ventas que realiza. Este mes ha vendido 300 ordenadores a 600 euros cada uno. ¿Cuánto dinero ha ganado?

9. Carmen se ha comprado un vestido de novia que valía 1200 euros y se lo han dejado en 1080 euros.

a) ¿Cuántos euros le han descontado?

b) ¿Qué porcentaje supone la rebaja?

c) ¿Cuál es la fracción del porcentaje?

10. En el plano de una casa, la sala tiene 9 cm de largo y 8 cm de ancho. Si en la realidad la sala mide 4,5 m de largo, ¿cuál es el ancho real?

11. Un motorista recorre 20 m en un segundo. ¿Cuál es la velocidad en kilómetros por hora?

12. En una granja, el 20 % de los animales son pollos. Si saben que hay 30 pollos, ¿cuál es el número total de animales?

13. Han dicho en las noticias de televisión que el pan ha subido un 10 %. Si una barra costaba 60 céntimos, ¿cuánto cuesta ahora?

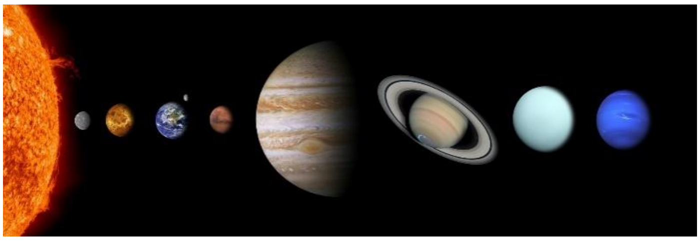
14. El 4 % de los cerdos son de pata negra. ¿Cuántos cerdos hay si los de pata negra son 12?

15. Una camisa cuesta 25 €. ¿Cuánto pagaré si me hacen una rebaja del 30 %?

16. Tenemos agua oxigenada de 60 volúmenes, es decir, que la concentración de agua oxigenada es del 60%, eso supone que en 100 ml de disolución hay 60 ml de agua oxigenada y 40 ml de agua destilada. Si tenemos 100 ml de disolución de agua oxigenada de 60 volúmenes y añadimos 100 ml de agua destilada, ¿qué porcentaje quedará de agua oxigenada ahora?

Sabias que…

- Si la Tierra fuera una bola de 1 cm de diámetro, entonces el Sol sería una bola de más de un metro.



	Diámetro en km	Número de veces el diámetro de La Tierra
Sol	1.391.016 de km	109,05 veces
Mercurio	4.880 km	0,38 veces
Venus	12.104 km	0,95 veces
La Tierra	12.756 km	1
Marte	6.794 km	0,53 veces
Júpiter	142.984 km	11,21 veces
Saturno	108.728 km	8,52 veces
Urano	51.118 km	4,01 veces
Neptuno	49.532 km	3,88 veces

El Universo tiene 13.800.000.000 años y los primeros humanos aparecieron hace 2.500.000 años. Eso quiere decir, que si el Universo tuviese 24 horas, entonces los primeros humanos hubiesen aparecido hace 16 segundos.

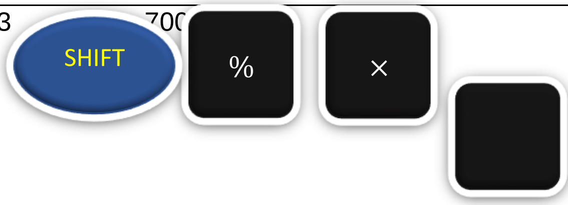
Para comprobar esta fecha puedes plantear la regla de tres y resolverla con ayuda de la calculadora:

Recuerda que para pasar horas a segundos tienes que multiplicar por 3.600.

El índice de masa corporal (IMC) es una razón matemática de la masa en kg y la altura en metros al cuadrado de un individuo, $\frac{massa}{altura^2}$

El rango recomendado está entre 18,5 i 24,99 en adultos. Por ejemplo, una persona de altura 1,6 m y masa 58 kg tiene de IMC 22,66.

Calculadora científica 

Para calcular un porcentaje puedes utilizar las teclas de producto y división.	
Algunas calculadoras tienen la tecla del porcentaje.	
$3\%de700 = \frac{3\cdot 700}{100} = 21$	3 700 100 
Ahora con la tecla de porcentaje (En algunas calculadoras no hace falta la tecla SHIFT).	3 700 

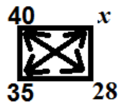
Actividades propuestas

1. Calcula mentalmente y con la calculadora

a) $3\%de200$	b) $6\%500$	c) $20\%de50$

Resumen

Nombre del concepto o propiedad	***Definición***	***Ejemplo***
Razón	Cociente entre los valores de dos magnitudes asociadas a un fenómeno u objeto.	Razón entre el precio de un saco de patatas y el número de kg

Proporción	Una *proporción* es una igualdad de dos razones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Los números a y d se denominan *extremos* y los números b i c, *medios*. $a \cdot d = c \cdot d$	 $\frac{40}{35} = \frac{x}{28}$ $x = \frac{40 \cdot 28}{35} \leftrightarrow x = 32$
Magnitudes directamente proporcionales	Dos magnitudes a i b son directamente proporcionales con razón de proporcionalidad k cuando el cociente, $\frac{a}{b}$ es siempre igual a k. $\frac{a}{b} = k$ Si se aumenta una magnitud, aumenta la otra. Si disminuye una magnitud, disminuye la otra.	El precio total de los tomates y los kg que compre.
Magnitudes inversamente proporcionales	Dos magnitudes a y b son inversamente proporcionales con razón de proporcionalidad k cuando el producto $a \cdot b$ es siempre igual a k. $a \cdot b = k$ Si disminuye una magnitud, aumenta la otra. Si aumenta una magnitud, disminuye la otra.	Número de obreros que descargan un camión y el número de horas.
Regla de tres simple directa	Se plantea entre magnitudes directamente proporcionales. En el método de la regla de tres hay que colocar en cada columna los valores de una misma magnitud. Se resuelve colocando los términos en el mismo orden. *Un transportista necesita 8 viajes para llevar 120 cajas. ¿Cuántos viajes necesitará para llevar 315 cajas?* $\left.\begin{array}{lcc} 120 caixes & \rightarrow & 8 viatges \\ 315 caixes & \rightarrow & x \end{array}\right\}$ $\frac{120}{315} = \frac{8}{x}$ $x = 21 viatges.$	

Regla de tres simple inversa	Se plantea entre magnitudes inversamente proporcionales. En el método de la regla de tres hay que colocar en cada columna los valores de una misma magnitud. Se resuelve haciendo una inversión de los valores de una de las columnas. *3 obreros descargan un camión en 2 horas. ¿Cuánto tardarán 4 obreros?* $\left.\begin{array}{lcl} 3obrers & ---\rightarrow & 2hores \\ 4obrers & ---\rightarrow & x \end{array}\right\}$ $\frac{4}{3}=\frac{2}{x}$ $x=1{,}5hores$	
Porcentajes	El $r\%$ de una cantidad Q se calcula mediante la fórmula: $r\%deQ=\frac{r\cdot Q}{100}$ ES equivalente a hacer $\frac{r}{100}$ de Q	5% de 400= $\frac{5\cdot 400}{100}=20$
Aumentos porcentuales	Aumentar el r por ciento una cantidad Q significa sumar a la cantidad Q, el $r\%$ de la cantidad Q, es decir, $Q+elr\%deQ$.	Aumenta el 3% la cantidad de 500. 500+3% de 500. Nos queda 515. Es equivalente a calcular el 103 % de 500.
Disminuciones porcentuales	Disminuir el r por ciento una cantidad Q significa quitar a la cantidad Q, el $r\%$ de la cantidad Q, es decir, $Q-elr\%deQ$.	Rebaja el 20 % la cantidad de 40 €. 40-20% de 40 Nos queda 32 €.
Escalas	La escala es la relación matemática que existe entre las dimensiones del dibujo que representa la realidad sobre un plano o un mapa y las dimensiones reales.	1:300 Significa que 1 cm en el mapa equivale a 300 cm de la realidad.

Autoevaluación

1. Una corona noruega equivale a 0,10 €. ¿Cuántas coronas equivalen a 5 euros?

a) 0,05 coronas b) 500 coronas c) 0,5 coronas d) 50 coronas

2. Una caja de naranjas de 6 kg se venden por 7,2 €. ¿Cuánto vale 1 kg de naranjas?

a) 1,23 € b) 1,2 € c) 0,83 € d) 1,02 €

3. Doce pintores pintan un edificio en 9 días. ¿Cuántos días tardarán 4 pintores?

a) 27 días b) 36 días c) 25 días d) 3 días

4. Una camisa cuesta sin rebajar 33 euros. Mañana la rebajarán el 20 %. ¿Cuánto costará?

a) 39,6 € b) 31 € c) 26,4 € d) 27 €

5. Hoy es el día sin IVA del 21 %. Una bicicleta que ayer costaba 1210 €, ¿cuánto cuesta hoy?

a) 955,9 € b) 1000 € c) 1100 € d) 1189 €

6. Dos socios de una empresa se reparten 4000 euros de beneficios. Si a uno de ellos le pertenece el 20% de la empresa, ¿cuánto corresponde a cada uno?

a) 80 € i 3920 € b) 800 € i 3200 € c) 800 € i 3600 € d) 20 € i 3980 €

7. En un pueblo el 15 % tiene los ojos azules. Si en el pueblo hay 4.000 personas, ¿cuántos tienen los ojos azules?

a) 600 personas b) 60 personas c) 260 personas d) 300 personas

8. En un mapa dos ciudades están separada 4 cm. Si el mapa está a escala 1: 200.000, ¿cuántos kilómetros hay entre las dos ciudades en la realidad?

a) 2000 km b) 20 km c) 8 km d) 800.000 km

9. El 8 % de una cantidad es igual a 40. ¿Cuál es esta cantidad?

a) 500 b) 320 c) 3,2 d) 400

10. Un televisor costaba 900 euros y ahora cuesta 630. ¿Cuál ha sido el porcentaje de rebaja?

a) 70 % b) 25 % c) 3 % d) 30 %

11. Dos personas de cada 25 tienen un grupo sanguíneo 0 negativo. ¿Qué porcentaje supone?

a) 2% b) 8% c) 25% d) 4%

12. Expresa en forma de fracción el 7 %:

a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{7}{1}$ c) $\frac{7}{10}$ d) $\frac{7}{100}$

Solucionario. Actividades propuestas

1.

€	0,8	1,6	2,4	3,2	4	4,8	5,6
kg	1	2	3	4	5	6	7

2. a)$x = 10$ b)$x = 20$ c)$x = 8$ d)$x = 30$

3. 350 Km ----------> 2 h

x Km ----------> 3 h $x = \frac{350 \cdot 3}{2} \leftrightarrow x = 525\ km$

4. 200 € --------------> 3

X -------------> 21 $x = \frac{21 \cdot 200}{3} \leftrightarrow x = 1400$ €

5.

a) 860 $= 1000 €	b) 10 € = 8,6 $	c) 50 € = 43 $

6. Regla de tres inversa. Al plantear la proporción hacemos una inversión.

3 ---------------> 15 h

5 ---------------> x $\frac{5}{3} = \frac{15}{x} \leftrightarrow x = 9\ h$

7.

a) 15	b) 56	c) 50
d) 45	e) 6	f) 140

8.

Porcentaje	Fracción	Cálculo
9% de 300	$\frac{9}{100} de 300$	27
3% de 15	$\frac{3}{100} de 15$	0,45
8% de 1000	$\frac{8}{100} de 1000$	80
18% de 500	$\frac{18}{100} de 500$	90

9. 30 % de 37 hm^3= 11,1 hm^3=11100 dm^3= 11100 l

10. a) 259,2 b) 4860 c) 7560 d) 864

11. a) 297,5 b) 425 c) 382,5 d) 1700

12. 1 cm ----------> 15.000.000 cm

5 cm ----------> x $x = 75.000.000\ cm = 750\ km$

Solucionario. Actividades finales

1. Multiplicamos las cantidades por 6/4=1,5.
   a) 412 g de pasta, 1,5 puñados de hojas de albahaca fresca, 6 dientes de ajos, 4,5 nueces picadas, 150 ml de aceite de oliva, 112,5 g de queso parmesano.
   b) 600 g de fideos, 300 g de rape, 3 sepias, 12 langostinos, 3 dientes de ajo, 6 tomates muy maduros, 1,5 cucharadas de pimentón dulce, azafrán en brizna, sal, 150 ml de aceite de oliva, 2,25 de caldo de pescado.
   c) 12 alcachofas, ¾ kg de gambas peladas, 1,5 cebollas, ¾ l de caldo de pescado, 150 g de harina, 75 g de mantequilla, sal, pimentón y nuez moscada.
2. 1 cm -----------> 75 cm

   X -----------> 230 cm $x = 3{,}07$.

   Sí, porque el largo del dibujo mide más de 3,07 cm.
3. a) Total invertido=40 €. Fracciones: $\frac{5}{40}; \frac{20}{40}; \frac{15}{40}$. Simplificadas: $\frac{1}{8}; \frac{1}{2}; \frac{3}{8}$

   b) 1 ----------> 8

   x ----------> 100 $x = 12{,}5$

   1 ------------> 2

   x ------------> 100 x= 50

   3 -------------> 8

   X ------------> 100 $x = 37{,}5$ Respuesta: 12,5 %, 50% i 37,5 %.

   c)1250, 5000 i 3750
4. $6000 \times 365 = 2190000$
5. Las manzanas valen a 1,5 €/kg. Total 5 €.
6. Contando el techo ha de pintar 5 cuadrados de lado 4 m, por tanto ha de pintar una superficie de 80 m^2.

   8 m^2 ----------> 1 litro

   80 m^2 ----------> x $x = 10 litres$

7. 4 h ----------> 60 €

3 h ----------> x $x = 45€$

8. $4\%\ de\ 300 \cdot 600 = 7200$ €.

9. a) 120 b) 10% c) $\frac{10}{100}$ también $\frac{1}{10}$.

10. 9 cm ----------> 4,5 m

8 cm ----------> x x = 4 m

11. 1 h = 3600 s

20 m ----------> 1 s

X ----------> 3600 s $x = 72000\ m = 72\ km$

$velocitat = 72\ km/h$

12. 20 -----------> 100

30 -----------> x $x = 150$. Observa que $20\% de x = 30$.

13. 66 céntimos.

14. $4\%\ de\ x = 12$. 4 ---------------> 100

12 --------------> x $x = 300$

15. 17,5 €

16. $\frac{60}{200} = \frac{30}{100}$. El 30 %. La disolución queda rebajada a 30 volúmenes.

Solucionario. Actividades Calculadora

a) $3 \cdot 200 : 100 = 6$	b) $6 \cdot 500 : 100 = 30$	c) $20 \cdot 50 = 100 = 10$

Solucionario. Autoevaluación

1d) 2b) 3a) 4c) 5b) 6b) 7a) 8c) 9a) 10d) 11a) 12 d)

Unidad Didáctica 8. Iniciación al álgebra. Ecuaciones de primer grado

¡La naranja!

Joan vende las naranjas de su huerta situada al sur de Valencia, por internet 2,5 €/ kg y también es pianista. Le han contratado para hacer diversos conciertos en el Teatro del Liceo e Barcelona en el mes de diciembre por lo cual no podrá ocuparse del negocio de las naranjas. Así pues, decide contratar a Marcos para que se ocupe. Le dará 1/3 del total de la venta. Si Joan espera obtener 8.000 €, ¿cuántos kilogramos esperar vender el mes de diciembre?

En esta unidad se muestran estrategias y herramientas para que:

- Extraigas información sobre la relación entre las variables que intervienen en una expresión matemática que describe un fenómeno físico.
- Resuelvas ecuaciones de primer grado.
- Plantees y resuelvas problemas en los cuales el valor de una variable es desconocido.

Has de repasar:

-Les operaciones con números enteros y fracciones.

Índice

1. Expresión algebraica. Monomio y polinomio

Esta unidad supone una generalización del modelo numérico. Trabajaremos con números y letras. Las letras se refieren a números que no conocemos. Más concretamente, una *expresión algebraica* es un conjunto de números y variables (letras) entre los cuales existen las operaciones de suma, resta, producto, división, potencia o raíz.

Ejemplo:

$$3xy^2 - \frac{5}{z}$$

Observa que la operación producto no suele escribirse entre las variables y los números. Tenemos que entender:

$$3 \cdot x \cdot y^2 - \frac{5}{z}$$

Como puede ver, hay tres variables, x, y, z, pero, en esta unidad nos centraremos en expresiones algebraicas con una sola variable y que además son de un tipo especial: ***monomios*** y ***polinomios***.

¿Dónde aparecen las expresiones algebraicas?

Física $E = m \cdot c^2$	**Porcentajes** **%**		
			

Un *monomio* en la variable x con coeficiente real es una expresión algebraica de la forma:

$$ax^n$$

donde a es el número decimal (positivo o negativo), fracción o entero conocido cualquiera, n es un número entero positivo o cero y x es la variable o indeterminada, es decir, el número que no es conocido.

El monomio x^0 se identifica con el número *1*.

El número a se denomina *coeficiente* o *parte numérica del monomio*. Se dice que x^n es *la parte literal* del monomio.

Ejemplos de monomio

$3x^5$	$2x$	$-7x^3$
$3{,}5x$	$\frac{3}{2}x^2$	$-3{,}6x^8$
4 porque $4 = 4x^0$	0 porque $0 = 0x^{100} = 0x^9$	$\frac{-4}{9}x$

Si a es diferente de cero, entonces, se dice que n es el *grado del monomio*.

Si a es cero, entonces, el grado del monomio se dice que es infinito. Este es el símbolo del infinito: ∞.

Fíjate que $x^{2,5}$ es una expresión algebraica pero no es un monomio porque el exponente de la variable tiene que ser un número entero positivo o cero. Pasa igual con $\frac{7}{x}$, que es una *fracción algebraica* de monomios pero, no es un monomio.

Cuando escribimos x, nos referimos al monomio $1x^1$, y cuando escribimos $-x$, nos referimos al monomio $-1x^1$. Piensa que cuando escribimos por ejemplo 5, es equivalente a hacer la potencia 5^1.

Actividad resuelta

- Completa

Monomio	Coeficiente	Grado
$-3x$	-3	1
0	0	infinito
5	5	0, porque $5 = 5x^0$
$12x^{20}$	12	20
$-4x$	-4	1
$9x^6$	9	6
$\frac{2}{3}x^2$	$\frac{2}{3}$	2

Actividad propuesta

1. Completa

Monomio	Coeficiente	Grado
$-4x$		
0		
9		
$15x^8$		
$6x$		
$10x^3$		
$\frac{5}{2}x^6$		

Dos monomios en la indeterminada x se dice que son *semejantes* si tienen la misma parte literal. Por ejemplo, $3x$ y $7x$ son semejantes, así como también, $8x^2$ i $25x^2$. En cambio, no son semejantes x^2 y $5x$.

Observa que dos monomios son semejantes cuando el exponente de la letra x es el mismo en los dos.

Actividad propuesta

2. Completa con sí o no

Monomios	¿Semejantes?	Monomios	¿Semejantes?
a) $6x$ i $6x^2$		b) $7x^{10}$ i $-6x^{10}$	

- **Operaciones con monomios:**

Dos monomios que sean **semejantes** se pueden sumar o restar. Para sumar dos monomios semejantes se suman los coeficientes y se deja igual la parte literal.

Para restar dos monomios semejantes se restan los coeficientes y se deja igual la parte literal.

Ejemplos

$$4x^5 + 6x^5 = 10x^5$$

$$14x^7 - 6x^7 = 8x^7$$

Hay que tener en cuenta que los coeficientes pueden ser enteros negativos y por eso tenemos que utilizar las reglas de la suma y la resta de números enteros.

$$-4x^5 + 12x^5 = 8x^5$$

Actividad propuesta

3. Realiza las operaciones siguientes con monomios:

a) $x + 2x - 4x + 8x$	b) $3x - 4x + 7x + 4x$	c) $-2x^2 + x^2$	d) $3x^5 + 6x^5$

- **Multiplicación**

El producto de dos monomios no nulos en la indeterminada x es igual a un monomio, el coeficiente del cual es el producto de los coeficientes y el grado es la suma de los grados.

El producto del monomio nulo por un monomio cualquiera es el monomio nulo.

Ejemplos:

$$4x^5 \cdot 6x^2 = 24x^7$$

$$0 \cdot 6x^8 = 0$$

Actividad resuelta

- Realiza las operaciones siguientes con monomios:

a) $x \cdot 1 = x$	b) $1 \cdot x = x$	c) $-1 \cdot x^2 = -x^2$
d) $x \cdot x = x^2$	e) $x \cdot x^2 = x^3$	f) $x^2 \cdot x^8 = x^{10}$
g) $(3x^2) \cdot (-2x^2) = -6x^4$	h) $-8x^2 \cdot 5x = -40x^3$	i) $4 \cdot 6x^2 = 24x^2$

Actividad propuesta

4. Realiza las operaciones siguientes con monomios:

a) $2x \cdot 4x$	b) $6 \cdot 4x$	c) $-8 \cdot 4x^2$
d) $x \cdot 7x$	e) $0 \cdot 5x^2$	f) $5x^2 \cdot 6x^8$
g) $(-4x^2) \cdot (-9x^2)$	h) $-x^2 \cdot 9x$	i) $-4 \cdot (-6x^2)$

- **División**

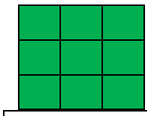
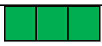
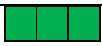
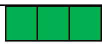
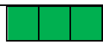
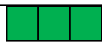
Aplicando las propiedades de simplificación de fracciones pueden hacer divisiones:

$(20x^5):(2x^3) = \frac{20x^5}{2x^3} = \frac{2 \cdot 10 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{2 \cdot x \cdot x \cdot x} = 10x^2$	Se dividen los coeficientes y se restan los exponentes. Se simplifican los factores repetidos en el numerador y el denominador. Se da un monomio.
$(5x):(10x) = \frac{5x}{10x} = \frac{5 \cdot x}{2 \cdot 5 \cdot x} = \frac{1}{2}$	El cociente es un número.
$(2x^3):(20x^5) = \frac{2x^3}{20x^5} = \frac{1}{10x^2}$	Se da una fracción algebraica. No es un monomio.

¿Por qué nada más se pueden sumar o restar monomios que sean semejantes?

Observa la ilustración siguiente. ¿Cuántas cajas hay?

Suponemos que tenemos cajas agrupadas y denominamos x al número de cajas en una fila.

	+		+		+		+		+	
$\underbrace{}_{3^2}$		$\underbrace{}_{5 \cdot 3}$								
x^2	+	$x+x+x+x+x = x^2+5x$								

Hay 9+15=24 cajas. Como ves, no se pueden sumar monomios con diferente parte literal. No tiene sentido poner $6x$ni $6x^2$. En este caso, dejaos la expresión x^2+5x, que se denomina polinomio.

Algunas frases para recordar la suma de monomios:

-Dos mesas más dos mesas son cinco mesas. (Aquí, mesa es la variable x.)

-No se pueden sumar peras con manzanas. (No se pueden sumar x con x^2.)

Concepto de polinomio y nomenclatura

- **Un polinomio** es la suma o resta de diversos monomios no semejantes.
- Cada uno de los monomios que componen un polinomio se denominan *término*.
- *Los coeficientes de un polinomio* son todos los coeficientes de los términos que componen un polinomio.
- Es denomina *polinomio nulo* al polinomio que tiene todos sus términos iguales a cero.
- *El grado de un polinomio* no nulo es el máximo de los grados de los términos no nulos que componen el polinomio.
- El grado de un polinomio nulo es infinito.
- El término que no tiene variable se denomina *termino independiente*.

Ejemplo: Los coeficientes del polinomio $6x^3+2x-14$ son 6,0,2,-14 porque es igual a $6x^3+0x^2+2x-14$.

El grado es 3 y el termino independiente es -14.

Actividad propuesta

5. Completa la tabla.

Polinomio	Coeficientes	Grado
$7x^3-5x+2$	**7,0,-5,2**	**3**
$2x^3-x^2-6x+2$		
$-2x^3+8$		
x^6-5x^2+2x		
$4x^2-x$		
$8x^5+9x^4-5x^3+x+1$		
$2x^4-x^3+x-1$		
$x+1$		

- **Valor numérico**

Cuando sustituimos la x de un polinomio por un número concreto y realizamos los cálculos obtenemos un número que se denomina *valor numérico* del polinomio.

Ejemplo: Calcula el valor numérico de $3x^2$ para $x=-2$

Cambia x por (-2). Es importante que pongas los paréntesis, ya que es un número negativo.

Substituimos x por (-2)	$3\cdot(-2)^2$
Calculamos la potencia	$3\cdot 4$
Calculamos el producto	12

Decimos que el valor numérico de $3x^2$ para $x=-2$ es 12.

Actividad resuelta

- Calcula el valor de $3x^2+7x+5$ para $x=-4$

Substituimos x por (-4)	$3\cdot(-4)^2+7\cdot(-4)+5$
Calculamos la potencia	$3\cdot 16+7\cdot(-4)+5$
Calculamos el producto	$48-28+5$
Calculamos las sumas y las restas	25

Actividades propuestas

6. Calcula el valor de $3x+5$ para $x=-3$.

7. Calcula el valor de $6x^2$ para $x=4$.

2. Traducción al lenguaje algebraico

Traducir al lenguaje algebraico significa expresar el lenguaje natural con variables, números y operaciones.

Ejemplos:

Cuatro menos un número	$4-x$
El cuádruple de un número	$4x$
La cuarta parte de un número	$\frac{x}{4}$
El quíntuple de un número dividido entre 3	$5x:3$
Dos números es diferencien en 4 unidades	$x-y=4$

Actividad resuelta

- Traduce al lenguaje algebraico

La mitad de un número menos su tercera parte.	$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}$
Número de persones casadas después de celebrarse x matrimonios.	$2x$
Repartir una fortuna entre 7 hermanos.	$\frac{x}{7}$
Contenido de 12 botellas de agua de igual capacidad.	$12x$
Doble de edad más 25 años.	$2x+25$
Dos quintos de un número.	$\frac{2}{5}x$
El triple de un número más 1.	$3x+1$
Un número menos 3.	$x-3$
Tres octavos de un número.	$\frac{3}{8}x$
La edad de Joan pasados 16 años.	$x+16$
La edad de Pere hace 4 años.	$x-4$
El 7 por ciento de una cantidad.	$0{,}07x$ También $\frac{7}{100}x$
Aumentar una cantidad el 21 por cien	$1{,}21x$ También $x+\frac{21}{100}x$

Disminuir una cantidad el 3 por cien	$0{,}97x$ También $x - \frac{3}{100}x$

Actividad propuesta

8. Traduce al lenguaje algebraico

a) Una cantidad aumentada el 67%.	b) La suma de tres números consecutivos es mayor que veinte.
c) Una cantidad disminuida el 6%.	d) El triple de un número más su mitad es igual a veintiséis.
e) La suma de dos números por su diferencia es igual a cinc.	f) Dos tercios de la suma de dos números más trece veces su diferencia.
g) Un número menos su predecesor.	h) Una cantidad aumentada el 7%.
i) Una cantidad disminuido el 30%.	j) La suma de dos números por su diferencia es igual a ocho.

3. <u>Ecuaciones de primer grado</u>

Una *ecuación* es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se cumple para ciertos valores de las variables. Si se cumple para cualquier valor que se ponga en las variables o incógnitas, entonces se dice que es una *identidad*.

Por tanto, una ecuación consta de dos lados o miembros separados por el signo de igualdad.

Podemos identificar una ecuación con una balanza que tiene dos bandejas con objetos y que está equilibrada. Cada bandeja es un lado de la igualdad.

Ejemplo de ecuación

$$3xy^2 - \frac{5}{z} = 8xz + 9$$

ES una ecuación de diversas variables. Pero, en esta unidad nada más trabajaremos con ecuaciones con la indeterminada x y además serán ecuaciones de primer grado, es decir, no tendremos $x^2, x^3, x^4, etc.$, nada más x.

Ejemplo de ecuación de primer grado

$$14x + 3 = 2x - 8$$

La solución de una ecuación en la variable x es un número tal que al substituir en la ecuación la variable x por este valor y realizar las operaciones indicadas queda en los dos lados de la igualdad el mismo número.

Los miembros de una ecuación son las expresiones que aparecen a cada lado del signo igual.

Los términos de una ecuación son las expresiones de cada miembro que están separadas por los signos más y menos.

En la ecuación $14x + 3 = 2x - 8$, los términos son: $14x; 3; 2x; -8$, el primer miembro o lado de la izquierda es $14x + 3$ y el segundo miembro o lado de la derecha es $2x - 8$.

Una ecuación de primer grado con una incógnita en su forma *reducida* es una ecuación de la forma

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números conocidos con $a \neq 0$, es decir, tienen en el primer lado de la igualdad, un polinomio de grado 1, y por eso, se denominan ecuaciones de primer grado.

Ejemplo

$$5x + 15 = 0$$

Por tanteo, la solución es $x = -3$.

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Ejemplo

Las ecuaciones $2x = 10$ y $6x = 30$ tienen la misma solución $x = 5$. Por tanto, decimos que son equivalentes.

Actividad propuesta

9. En la ecuación $2x + 3 = 6x + 1$ identifica el primer miembro, el segundo miembro, los términos y la incógnita.

4. **<u>Resolución de ecuaciones de primer grado</u>**

Resolver una ecuación es encontrar la solución, es decir, descubrir el valor que ha de tomar la variable x. Con tanteo podemos resolver muchas ecuaciones, pero hay estrategias para la resolución, que están basadas en la aplicación **de operaciones** elementales, que son aquellas operaciones que transforman una ecuación en otra equivalente.

1.Sumar (o restar) a los dos miembros de la igualdad un mismo número.

2.Multiplicar (o dividir) a los dos miembros de la igualdad un número diferente de cero.

Para comprender eso piensa en la balanza y lo que puedes o no puedes hacer para que siempre esté equilibrada.

- **Tipo 1:** $x + b = 0; x - b = 0$**.** Aplicamos la operación elemental 1.

En $x + b = 0,$ trasponemos b, (restamos b en los dos miembros)

Por ejemplo: $x + 6 = 0$, La solución es $x = -6$.

En $x - b = 0,$ trasponemos $-b$, (sumamos b en los dos miembros)

Por ejemplo: $x - 6 = 0$, La solución es $x = 6$.

- **Tipo 2:** $ax = b; \frac{x}{a} = b$**.** Aplicamos la operación elemental 2.

En $ax = b$, pasamos a al denominador del segundo miembro (dividimos entre a).

Por ejemplo, $6x = 30$, La solución es $x = \frac{30}{6}$; es decir, $x = 5$.

En $\frac{x}{a} = b$, pasamos a al numerador del segundo miembro (multiplicamos por a)

Por ejemplo, $\frac{x}{6} = 30$. La solución es $x = 30 \cdot 6$; es decir, $x = 180$.

- **Tipo 3:** $ax + b = 0$

La solución es: $x = \frac{-b}{a}$.

Por ejemplo, la solución de la ecuación $5x + 15 = 0$ es $x = -3$.

Actividades propuestas

10. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $2x + 6 = 0$	b) $5x - 10 = 0$
c) $-3x + 9 = 0$	d) $-x + 8 = 0$
e) $-2x = -14$	f) $-2x = 14$
g) $\frac{x}{2} = -14$	h) $\frac{x}{2} = 14$

- **Tipo 4:** **Ecuaciones sin reducir**

Por ejemplo, $3x - 6 + 4x - 4 = 2x - x + 3 + 11$

Colocamos los términos con x en el primer lado de la igualdad, teniendo en cuenta que cambiamos el signo si hacemos un cambio de lado. Este procedimiento se denomina transposición de términos. Estamos aplicando la operación elemental 1. Tenemos pues,

$$3x + 4x - 2x + x = 3 + 11 + 4 + 6$$

Así, queda, $6x = 24$**.**

Ahora pasamos 6 al otro miembro, $x = \frac{24}{6}$**,** y simplificando, obtendremos $x = 4$.

Actividades propuestas

11. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $4x - 7 = 2 - 5x$	b) $6x - 3x = x + 8$

- **Tipo 5:** **Ecuaciones con paréntesis**

$$-(3x - 6) = -3x + 6$$

También haremos servir la propiedad distributiva para multiplicar un número por un polinomio entre paréntesis.

Por ejemplo, si tenemos que hacer $3 \cdot (x - 2)$, multiplicamos 3 por x y 3 por -2, y así tenemos $3x - 6$.

Recuerda que el cálculo del opuesto es equivalente a multiplicar por -1, por tanto, $-(3x-6)=-3x+6$

Ejemplos

- Resuelve $3\cdot(x-2)=15$

Aplicamos la propiedad distributiva	$3x-6=15$
Colocamos los términos con x en el primer lado de la igualdad, teniendo en cuenta que cambiamos el signo si hacemos un cambio de lado. Este procedimiento se denomina transposición de términos.	$3x=15+6$
Simplificamos en los dos lados de la igualdad.	$3x=21$
Aislamos x.	$x=\frac{21}{3}$
Simplificamos.	$x=7$

- Resuelve $7-(1-2x)=10$

Aplicamos la propiedad distributiva.	$7-1+2x=10$
Colocamos los términos con x en el primer lado de la igualdad, teniendo en cuenta que cambiamos el signo si hacemos un cambio de lado. Este procedimiento se denomina transposición de términos.	$2x=10-7+1$
Simplificamos en los dos lados de la igualdad.	$2x=4$
Aislamos x.	$x=\frac{4}{2}$
Simplificamos.	$x=2$

Actividades propuestas

12. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x-3)-(3x-1)=6$	b) $12\cdot(x-1)-8\cdot(x-2)=6$

Como ves, hay un punto (el signe de la multiplicación) entre el número y el paréntesis que se puede omitir y tienes que entender que hay una multiplicación, es decir, es común escribir $12(x-1)-8(x-2)=6$

➢ Tipo 6: Ecuaciones con denominadores

La estrategia consiste en multiplicar todos los términos por el mínimo común múltiplo de los denominadores o por algún múltiplo común y a continuación simplificar.

Ejemplo resuelto: resuelve $\frac{x}{5}+\frac{x}{3}=40$

Calculamos el m.c.m. de los denominadores. En este caso, es 15.	
Multiplicamos los dos miembros por 15.	$15\cdot\frac{x}{5}+15\cdot\frac{x}{3}=15\cdot 40$
Simplificamos.	$3x+5x=600$
Reducimos los monomios.	$8x=600$
Aislamos x.	$x=\frac{600}{8}$
Simplificamos.	$x=75$

Actividades propuestas

13. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x+\frac{6}{8}=\frac{x}{2}+2$	b) $\frac{3x}{2}-3=\frac{9}{2}-\frac{9}{4}$
c) $\frac{3x}{7}-3=\frac{6}{7}$	d) $\frac{5x}{9}-\frac{5}{6}=\frac{10x}{9}-\frac{5}{2}$

Actividad resuelta

- Resuelve las ecuaciones

a) $\frac{11}{20}=\frac{44}{x}$	b) $\frac{x-3}{5}=\frac{x+4}{4}$

En los dos casos pueden aplicar la propiedad de equivalencia de fracciones. Recuerda que dos fracciones son equivalentes si el producto de medios es igual al producto de extremos, es decir, si son iguales los productos cruzados.

a) $11x=20\cdot 44\leftrightarrow x=\frac{880}{11}\leftrightarrow x=80$

b) $4\cdot(x-3)=5\cdot(x+4)\leftrightarrow propietatdistributiva 4x-12=5x+20$

$$4x-5x=20+12$$
$$-x=32$$
$$x=-32$$

5. Resolución de problemas mediante ecuaciones

Cuando queremos resolver un problema que tiene un enunciado donde hay un valor desconocido pueden plantear una ecuación.

Hay que extraer los datos conocidos y denominar x al dato desconocido. Después, planteamos una ecuación, mediante la traducción al lenguaje algebraico del enunciado. A continuación, resolvemos la ecuación e interpretamos la solución para dar respuesta a la pregunta del problema.

Ejemplo

La suma de un número con el doble y la mitad de esta da 175.

Número $--\rightarrow x$ Doble $---\rightarrow 2x$ Mitad $---\rightarrow \frac{x}{2}$

Ecuación: $x + 2x + \frac{x}{2} = 175$

Multiplicamos por 2 $2x + 4x + x = 350$

Reducimos $7x = 350$

Aislamos x $x = \frac{350}{7}$

Simplificamos $x = 50$

Respuesta: El número es 50.

Volviendo al problema inicial

Joan vende las naranjas de su huerta situada al sur de Valencia, por internet a 2,5 €/ kg y también es pianista. Le ha contratado para hacer diversos conciertos en el Teatro del Liceo de Barcelona en el mes de diciembre, por lo que no podrá ocuparse del negocio de las naranjas. Así pues, decide contratar a Marcos para que se ocupe. Le dará 1/3 del total de la venta. Si Joan espera obtener 8.000 €, ¿cuántos kilogramos espera vender el mes de diciembre?

Dates: Precio de venta 2,5 €/kg. Marcos $\frac{1}{3}$ de las ventas. Joan espera obtener 8000 € que corresponden a $\frac{2}{3}$ de las ventas.

Estrategia. Tomamos x el número de kg vendidos y planteamos una ecuación. Teniendo en cuenta que Joan se queda con $\frac{2}{3}$:

$$\frac{2}{3} \cdot 2,5 \cdot x = 8000$$

Resuelven la ecuación:

$$x = \frac{8000 \cdot 3}{2 \cdot 2,5}; \qquad x = 4800$$

Respuesta: espera vender 4800 kg.

Actividades propuestas

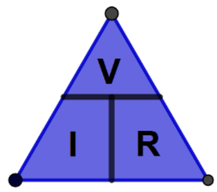
14. El doble de un número menos 8 unidades es igual a 82. ¿Qué número es?

15. Tenemos 23 billetes en total entre billetes de 50 € y billetes de 20 €. En total, tenemos 790 €. ¿Cuántos billetes de cada clase tenemos?

16. Hemos comprado 16 cuentos iguales y hemos pagado con un billete de 100 € y nos han devuelto 36 €. ¿Cuánto vale cada cuento?

Actividades finales

1. La ley de Ohm se expresa mediante la ecuación $R = \frac{V}{I}$. Si R=5 ohms y la intensidad de 2 amperios, entonces tenemos la ecuación $5 = \frac{V}{2}$. Calcula el voltaje, es decir, calcula V.



2. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $5x + 9 = 44$	b) $9 \cdot (x - 1) = 81$
c) $\frac{x}{15} + x = \frac{2x}{5} + 10$	d) $3 \cdot (x + 7) = 240$
e) $\frac{5}{2x+1} = \frac{1}{x-1}$	f) $3x + 9 = 33$
g) $9 \cdot (x + 4) = 5 \cdot (4x - 4) + 1$	h) $\frac{x}{8} = 1$
i) $2 \cdot (x + 6) - 3 \cdot (x + 2) = x + 4$	j) $3 \cdot (x - 4) = 4 \cdot (2x - 3) + 5$
k) $7x + 4 - 2x = 3 + 3x - 7$	l) $6 + \frac{x}{4} = 7$
m) $\frac{x-5}{4} = 1$	n) $4 + \frac{x}{7} = 20$
o) $8x - 6 + 2x = 6x + 14$	p) $5x - 2 - (2x + 3) = 2x - 7$
q) $\frac{8x}{3} + \frac{10x}{6} - \frac{5}{3} = \frac{2x}{3} + 2$	r) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = \frac{3x}{4} + \frac{1}{4}$

3. Comprueba si $x = 8$ es solución de la ecuación $3x - 22 = 2$.

4. Inventa una ecuación de primer grado que no tenga solución.

5. Inventa una ecuación de primer grado que tenga infinitas soluciones, es decir, una igualdad que sea una identidad.

6. Alejandro tiene un salario formado por una parte fija de 600 euros más el 5 por ciento de las ventas. Si este mes ha ganado 2500 euros, ¿a cuánto ascienden las ventas?

7. Marta y Sonia han montado un negocio. Marta puso la tercera parte del capital. Ahora ha tenido beneficios. Si a Marta le corresponden la tercera parte y ha ganado 2400 euros. ¿Cuántos dineros han sido los beneficios?

8. En un rectángulo, la base mide 5 cm más que la altura. Si el perímetro mide 58 cm, calcula les dimensiones del rectángulo.

9. La suma de las edades de una familia compuesta por un padre, una madre y dos gemelas es 107. La madre tuvo a las gemelas a los 36 años y el padre tiene 3 años más que la madre. ¿Cuántos años tiene cada uno?

10. Un repartidor de paquetes ha dejado la quinta parte de kilos, pero todavía ha de repartir un total de 40 kg. ¿Cuántos kilogramos tenía a primera hora de la mañana?

11. Frederic ha comprado 20 bolígrafos. Ha pagado con un billete de 50 euros y le han devuelto 38 euros. Escribe una ecuación que permita calcular el precio de un bolígrafo.

Sabias que…

Mohammed Ibn Musa Al-Khwarizmi (780-850), es el más conocido de los matemáticos árabes y se dice que es el padre del álgebra.

Se sabe poco de su vida quitando que vivió en la primera mitad del siglo IX y que trabajó en la biblioteca del califa de Bagdad.

Escribió libros sobre geografía, astronomía y matemáticas. En su obra Aritmética ("Algoritmi de numere indorum") explica con detalle el funcionamiento del sistema decimal y del cero que usaban en la India.

Hay que destacar la obra de contenido algebraico "*Hisab al-yabr wa'l muqqabala*", considerada uno de los primeros libros de álgebra. En este libro se utiliza la palabra “cosa” para referirse a la incógnita “x”. Por ejemplo, el triple de una cosa, en lugar de $3x$. En árabe la pronunciación de cosa suena como “shay'”. De ahí procede la “x” de ahora.

Calculadora científica 

Algunas calculadoras científicas permiten introducir una ecuación completa y tienen una tecla denominada CALC que da la solución. También existen páginas donde introduces la ecuación y te da la solución con pasos como:

https://www.cymath.com/sp/

Puedes comprobar la solución a partir de las teclas de producto, división, suma, resta, paréntesis e igual.

Resuelve la ecuación: $\frac{6\cdot(x-4)}{2} = 9$

¿**7** es solución?

6

El resultado es 9 que es el que tenemos en el segundo miembro de la igualdad. Por tanto, 7 es la solución de la ecuación.

Actividad propuesta

Comprueba que la solución de la ecuación $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 5$ es 6.

Resumen

Nombre del concepto o propiedad	***Definición***	***Ejemplo***
Expresión algebraica	Es un conjunto de números y variables (letras) entre las que existen las operaciones de suma, resta, producto, división, potencia o raíz.	$7xy + \frac{8xy}{z}$
Monomio	Es una expresión algebraica de la forma ax^n.	$-8x^3$
Monomios semejantes	Son los que tienen la misma parte literal.	$3x^2$ i $-8x^2$
Polinomio	Es una suma de monomios no semejantes.	$5x^3 - 8x + 2$

Valor numérico	Es el resultado de substituir la x por el número y hacer las operaciones. Si el número es negativo se pone paréntesis.	El valor numérico de $7x$ para $x = -2$ es -14
Suma de monomios semejantes	Se sumen los coeficientes y se deja la misma parte literal.	$3x + 7x = 10x$ $7x^3 + 11x \rightarrow$ NO se puede reducir más
Multiplicación de monomios	El producto de dos monomios es un monomio. Se multiplican los coeficientes y se suman los grados.	$5x \cdot 8x^2 = 40x^3$
Ecuación	Es una igualdad que se cumple nada más que para algunos valores de las letras.	$3x = -2x + 10$
Partes de una ecuación	Miembros o lados de la igualdad: son las expresiones que aparecen a cada lado del signo igual. Términos: son los sumandos que forman los miembros. Incógnitas: son las letras, los valores de las cuales queremos obtener. Soluciones: son los valores que hay que dar a las letras para que se cumpla la igualdad.	$3x = -2x + 10$ 1r miembro:$3x$ 2n miembro: $-2x + 10$ Términos: $3x; -2x; 10$ Incógnita: x Solución: $x = 2$

Autoevaluación

1. Si al triple de un número le quitamos 8 da 52. ¿Cuál es el número?

a) 47 b) 22 c) 20 d) 14

2. Expresa en lenguaje algebraico: el triple de un número, x, más dos unidades:

a) $3+x+2$ b) $2\cdot x+3$ c) $3x+2$ d) $3\cdot x\cdot 2$

3. La solución de la ecuación $4x-5(x-1)=4-2x és$:

a) -1 b) 2 c) 0 d) 1

4. Un rotulador cuesta 70 céntimos más que un lápiz. ¿Cuánto cuesta cada uno si por 4 lápices y 3 rotuladores he pagado 4,90 €?

a) Un lápiz 0,40€ y un rotulador 1,10€ b) Un lápiz 0,30€ y un rotulador 1 €

c) Un lápiz 0,20€ y un rotulador 0,9 d) Ninguna de las anteriores

5. María, Carmen y Ferran reciben 2400 € por haber trabajado de monitores en un campamento de niños. Si María ha trabajado el triple de días que Ferran y Carmen el doble que Ferran, ¿cómo habrá que hacer el reparto?

a) María 800€, Carmen 500 € y Ferran 250 €

b) María 900€, Carmen 600 € y Ferran 300 €

c) María 1500€, Carmen 1000 € y Ferran 500 €

d) María 1200€, Carmen 800 € y Ferran 400 €

6. La valla que rodea una huerta de forma rectangular mide 120 m. Tiene 10 m más de largo que de ancho. ¿Cuáles son las medidas?

a) 45 m de ancho y 55 m de largo

b) 25 m de ancho y 35 m de largo

c) 20 m de ancho y 30 m de largo

d) Ninguna de las anteriores

7. Tres números suman 800. La mitad es el triple del menor y el más grande es el cuádruple del menor. ¿Cuál de estas expresiones nos permite obtener el número menor?

a) $4x+3x+x=800$ b) $4x+3x+800=x$

c) $4+3+800x=2$ d) $3x+x=-4x-800$

8. El valor numérico del monomio $\frac{7}{4}x^2$ para $x=-2$ es

a) -7 b) 3,5 c) -3,5 d) 7

9. La mitad de un número más la tercera parte de este número es igual a 100. ¿Cuál es el número?

a) 400 b) 120 c) 240 d) 20

10. Cuál es la solución de $\frac{12}{15} = \frac{16}{x}$

a) 10 b) 40 c) 20 d) 4

11. La suma de dos números es 40 y su diferencia es 24. ¿Qué ecuación permite calcular el número menor?

a) $x + 24 = x + 40$ b) $x + x = 40 + 24$

c) $x + x + 40 = 24$ d) $x + x + 24 = 40$

12. Calcula $-9x^2 \cdot \frac{1}{3}x^4$

a) $-3x^6$ b) $-3x^5$ c) $3x^6$ d) $-27x^8$

Solucionario. Actividades propuestas

1.

Monomio	Coeficiente	Grado
$-4x$	-4	1
0	0	Infinito
9	9	0
$15x^8$	15	8
$6x$	6	1
$10x^3$	10	3
$\frac{5}{2}x^6$	$\frac{5}{2}$	6

2. a) No b) Sí

3. a) $7x$ b) $10x$ c) $-x^2$ d) $9x^5$

4. Realiza las operaciones siguientes con monomios:

a) $8x^2$	b) $24x$	c) $-32x^2$
d) $7x^2$	e) 0	f) $5x^2 \cdot 6x^8 = 30x^{10}$
g) $36x^4$	h) $-9x^3$	i) $24x^2$

5.

Polinomio	Coeficientes	Grado
$7x^3 - 5x + 2$	**7,0,-5,2**	**3**
$2x^3 - x^2 - 6x + 2$	2,-1,-6,2	3
$-2x^3 + 8$	-2,0,0,8	3
$x^6 - 5x^2 + 2x$	1,0,0,0,-5,2,0	6
$4x^2 - x$	4,-1,0	2
$8x^5 + 9x^4 - 5x^3 + x + 1$	8,9,-5,0,1,1	5
$2x^4 - x^3 + x - 1$	2,-1,0,1,-1	2
$x + 1$	1,1	1

6. $3 \cdot (-3) + 5 = -9 + 5 = -4$

7. $6 \cdot 4^2 = 6 \cdot 16 = 96$

8.

a) $1{,}67x$	b) $x + x + 1 + x + 2 > 20$
c) $0{,}94x$	d) $3x + \frac{x}{2} = 26$
e) $(x + y) \cdot (x - y) = 5$	f) $\frac{2}{3} \cdot (x + y) + 13 \cdot (x - y)$
g) $x - (x - 1)$	h) $1{,}07x$
i) $0{,}7x$	j) $(x + y) \cdot (x - y) = 8$

9. El primer miembro es $2x + 3$, el segundo miembro es $6x + 1$, los términos son $2x, 3, 6x, 1$ y la incógnita es x.

10.

a) $x = -3$	b) $x = 2$
c) $x = 3$	d) $x = 8$
e) $x = 7$	f) $x = -7$
g) $x = -28$	h) $x = 28$

11. a) $x = 1$ b) $x = 4$
12. a) $x = -4$ b) $x = 0{,}5$
13. a) $x = 2{,}5$ b) $x = 3{,}5$
c) $x = 9$ d) $x = 3$
14. La ecuación que planteamos es $2x - 8 = 82$. La solución es $x = 45$.
15. Sea $x =$ número de billetes de 50€.
Entonces, $23 - x =$ número de billetes de 20€
Planteamos la ecuación $50x + 20 \cdot (23 - x) = 790$. La solución es $x = 11$.
Por tanto, hay 11 billetes de 50 € y 12 billetes de 20 €.
16. Sea $x =$ número de cuentos. Plantean la ecuación $16x + 36 = 100$. La solución es $x = 4$. Por tanto, cada cuento vale 4 €.

Solucionario. Actividades finales

1. V=10 voltios.

2.

a) $x = 7$	$b)$ $x = 10$
$c)$ $x = 15$	$d)$ $x = 73$
$e)$ $x = 2$	$f)$ $x = 8$
$g)$ $x = 5$	$h)$ $x = 8$
i) $2x + 12 - 3x - 6 = x + 4;$ $-2x = -2; x = 1$	j) $3x - 12 = 8x - 12 + 5;$ $-5x = 5; x = -1$
$k)$ $x = -4$	$l)$ $24 + x = 28; x = 4$
$m)$ $x = 9$	$n)$ $x = 112$
$o)$ $x = 5$	$p)$ $x = -2$
q) $16x + 10x - 10 = 4x + 12;$ $22x = 22; x = 1$	r) $4x + 2x + x = 6x + 2;$ $x = 2$

3. $3 \cdot 8 - 22 = 24 - 22 = 2.$ Se cumple la igualdad, por tanto, es la solución.

4. Por ejemplo, $x + 4 = x + 5$.

5. Por ejemplo, $2 \cdot (x + 3) = 2x + 6$.

6. Salario=2500, ventas=x. Planteamos la ecuación $600 + 0{,}05x = 2500$.

Resolvemos la ecuación: $0{,}05x = 1900 \leftrightarrow x = \frac{1900}{0{,}05} \leftrightarrow x = \frac{190000}{5} \leftrightarrow x = 38000$.

Respuesta: Las ventas han sido de 38000 €

7. Planteamos la ecuación, $\frac{1}{3}x = 2400$, la solución es $x = 7200$.

Por tanto, han obtenido 7200 euros de beneficios.

8. Sea x la longitud de la altura. Planteamos la ecuación, $x + x + 5 + x + x + 5 = 58$. La solución es $x = 12$. Por tanto, la altura mide 12 cm y la base 17 cm.

9. Edad de las gemelas=x; edad de la madre=$36 + x$; Edad de padre= $39 + x$. Planteamos la ecuación, $2x + 36 + x + 39 + x = 107$. La solución es 8.

Respuesta. Las gemelas tienen 8 años, la madre 44 y el padre 47.

10. Sea x el número de kilogramos al principio de la mañana. Planteamos la ecuación:

$$\frac{x}{5} + 40 = x \leftrightarrow x + 200 = 5x \leftrightarrow x = 50$$

Respuesta: Tenia 50 kg.

11. Denominamos x al precio de un bolígrafo. Planteamos la ecuación, $20x + 38 = 50$. (La solución es $x = 0{,}6$€. El ejercicio pide solamente la ecuación)

Solucionario. Actividades Calculadora

6 ÷ 3 + 6 ÷ 2

El resultado es 5 que es el que tenemos en el segundo miembro de la igualdad. Por tanto, 6 es la solución de la ecuación.

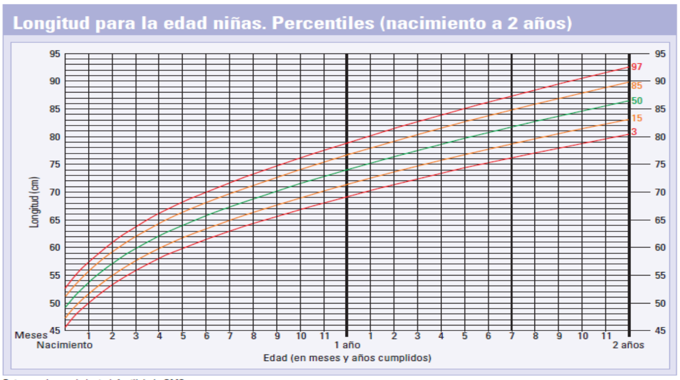
Solucionario. Autoevaluación

1c) 2c) 3a) 4a) 5d) 6b) 7a) 8d) 9b) 10c) 11d) 12 a)

Unidad Didáctica 9. Tablas y gráficas

¡Mi hija!

Nuria y José han sido padres hace dos meses de una niña. Tienen que anotar en la tabla de crecimiento el dato de la altura de 58 cm ¿Dónde han de ponerla?



Patrones de crecimiento infantil de la OMS.

El médico ha calculado que la niña medirá 88 cm cuando tenga 2 años. ¿Va todo bien?

En esta unidad se muestran estrategias y herramientas para que:

- Formules modelos matemáticos que resuelvan problemas reales del mundo de los negocios, las ciencias y la sociedad.
- Interpretes correctamente las informaciones que no aportan las gráficas que están presentes en los manuales técnicos de cualquier rama profesional.

Has de repasar:

-La representación en la recta numérica de números enteros.

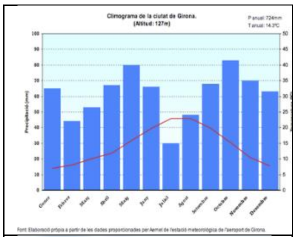
Índice

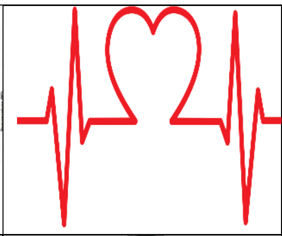
1. Introducción

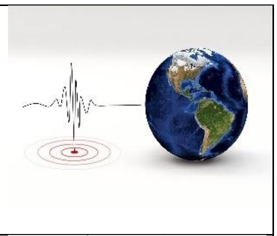
En los medios de comunicación es común encontrarse con gráficas para explicar noticias referidas a asuntos económicos y sociales. Algunos ejemplos son los gráficos referidos a los parados de larga duración, la evolución de la intención de voto, la popularidad del presidente del gobierno, el grado de satisfacción de los ciudadanos sobre un fecho concreto, etc. También tenemos tablas para saber la talla de ropa, las kilocalorías que aporta cada alimento, tablas que relacionan el tiempo con el espacio recorrido, tablas para determinar la posición de un objeto sobre una superficie, etc. Los gráficos se utilizan en las Ciencias para representar fenómenos y relacionar los valores de diversas magnitudes.

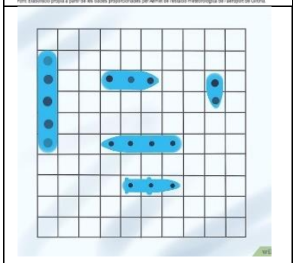
El sistema de representación se debe al filósofo, matemático y físico francés René Descartes, también denominado en escritura latina *Renatus Cartesius*.

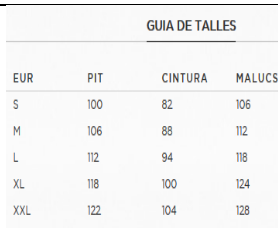
¿Dónde aparecen las tablas y gráficas?





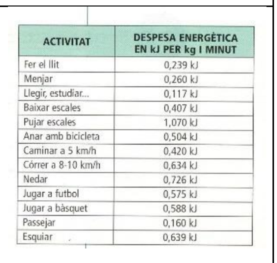






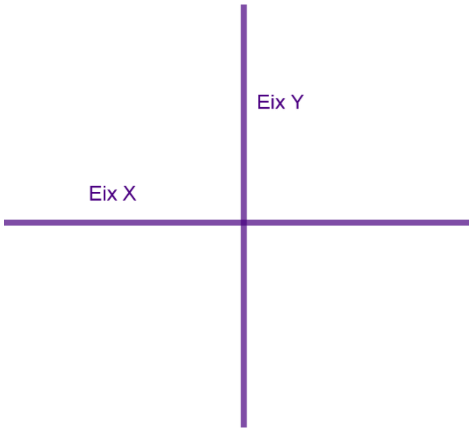
GUIA DE TALLES

EUR	PIT	CINTURA	MALUCS
S	100	82	106
M	106	88	112
L	112	94	118
XL	118	100	124
XXL	122	104	128



ACTIVITAT	DESPESA ENERGÈTICA EN kJ PER kg I MINUT
Fer el llit	0,239 kJ
Menjar	0,260 kJ
Llegir, estudiar...	0,117 kJ
Baixar escales	0,407 kJ
Pujar escales	1,070 kJ
Anar amb bicicleta	0,504 kJ
Caminar a 5 km/h	0,420 kJ
Córrer a 8-10 km/h	0,634 kJ
Nedar	0,726 kJ
Jugar a futbol	0,575 kJ
Jugar a bàsquet	0,588 kJ
Passejar	0,160 kJ
Esquiar	0,639 kJ

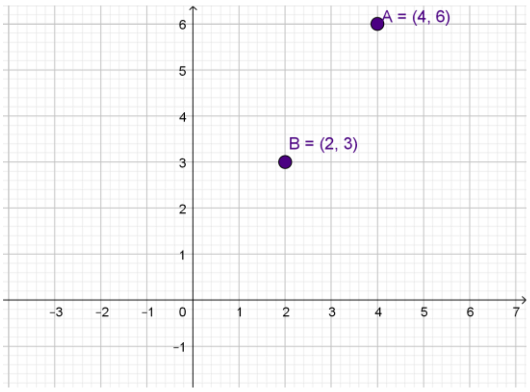
2. Coordenadas en el plano cartesiano



Los ejes cartesianos o ejes de coordenadas son dos rectas perpendiculares.

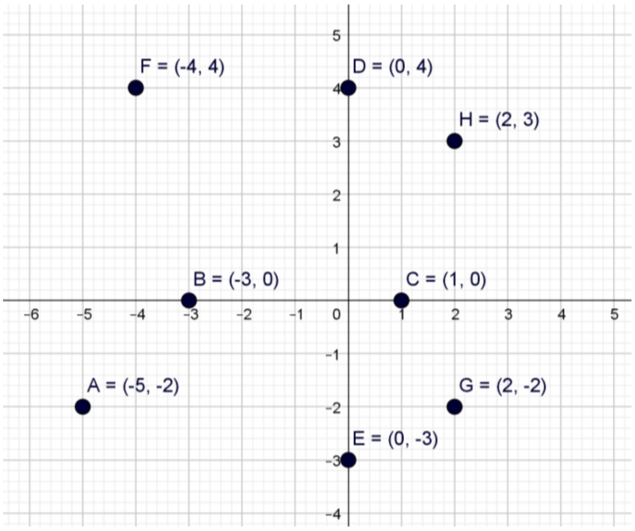
El eje horizontal se denomina *eje X* o *eje de abscisas* i el eje vertical se denomina *eje Y* o *eje de ordenadas*.

El punto *O*, donde se cortan los dos ejes, se denomina *origen de coordenadas*.

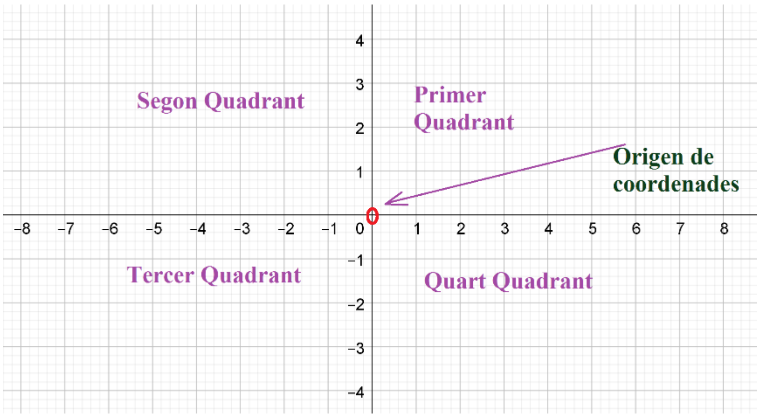


Estos ejes y el punto O forman un sistema de referencia cartesiano. Cada punto del plano se designa por dos coordenadas: la coordenada correspondiente al eje X y la coordenada correspondiente al eje Y, siempre en este orden. Los puntos se designan con letras mayúsculas: A, B, C, etc.

El origen de coordenadas tiene coordenadas (0,0). Hemos representado los puntos A=(4,6) y B=(2,3).



En un punto, la primera coordenada indica las unidades que nos desplazamos a la izquierda (si el número es negativo) o a la derecha (si el número es positivo), partiendo del origen de coordenadas. La segunda coordenada nos indica las unidades que nos desplazamos hacía arriba (si el número es positivo) o hacía abajo (si el número es negativo) partiendo del origen de coordenadas. Los puntos sobre el eje X siempre tienen ordenada igual a 0. Los puntos sobre el eje Y siempre tienen abscisa igual a 0.



Los ejes de coordenadas dividen el plano en *cuatro cuadrantes.*
El punto de coordenadas (-5,-2) está en el tercer cuadrante.

Actividades propuestas

1. Representa los puntos siguientes:

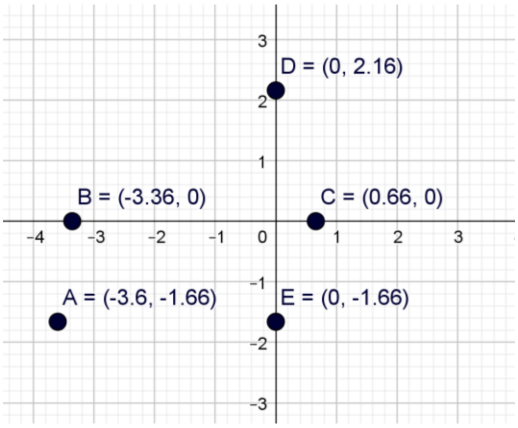
A=(0,5), B=(1,-1), C=(4,-3), D=(-1,0), E=(0,-2), E=(-4,-1)

2. Representa los puntos siguientes:

A=(0,2), B=(2,0), C=(4,0), D=(6,2), E=(4,4), F=(2,4)

Si unes los puntos, ¿qué figura obtienes?

También se pueden representar puntos que tengan coordenadas decimales. En este caso para evitar confusión, suele utilizarse el signo ";" para separar la abscisa y la ordenada. Por ejemplo, (-3,6;-1,66).



Actividad propuesta

3. Representa los puntos siguientes:

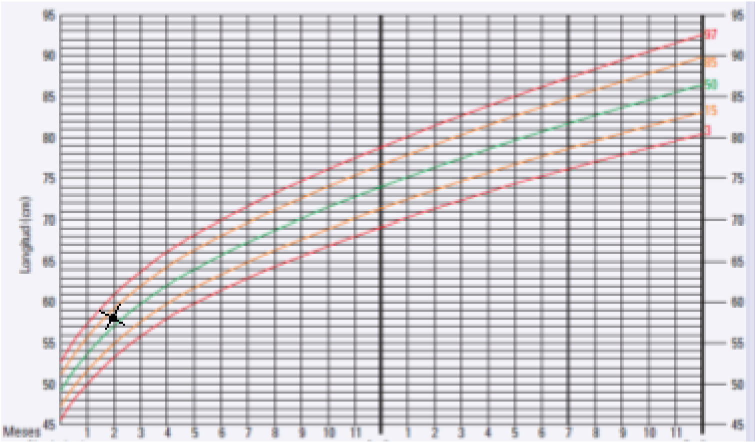
A=(3,5;0,5), B=(-2,5;-4), C=$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$.

3. **Tablas de valores y representación gráfica**

Volviendo al problema inicial

Nuria y José han sido padres hace dos meses de una niña. Tienen que anotar en la tabla de crecimiento el dato de la altura de 58 cm. ¿Dónde ha de ponerla? El médico ha calculado que la niña medirá 88 cm cuando tenga 2 años. ¿Va todo bien?

En el eje horizontal se representan los meses y en el eje vertical la altura. Por tanto, tenemos que representar el punto (2,58).



Todo va bien, porque el dato queda por encima de la curva el percentil 50 (color verde) que para 12 meses indica 87 cm aproximadamente.

Una tabla de valores es una tabla en la cual situamos ordenadamente las cantidades correspondientes de dos magnitudes relacionadas. Se pueden colocar de manera horizontal o vertical.

Ejemplo

- Cuando viajamos a velocidad constante, las magnitudes espacio y tiempo son directamente proporcionales.

Tiempo (h)	1	2	3	4
Espacio (Km)	80	160	240	320

La razón de proporcionalidad de las magnitudes espacio y tiempo es

$$k = \frac{80}{1} = \frac{160}{2} = \frac{240}{3} = \frac{320}{4},$$

que es la velocidad, es decir, 80 km/h.

- En una tienda de Ayora venden miel por 7 € el kg.

  La venden en envases de 125 g, 250 g, 500 g, 750 g y 1000 g. Se añade el precio del envase que es de 50 céntimos. La tabla de valores siguientes relaciona el peso de la miel con su precio e incluye el precio del envase.

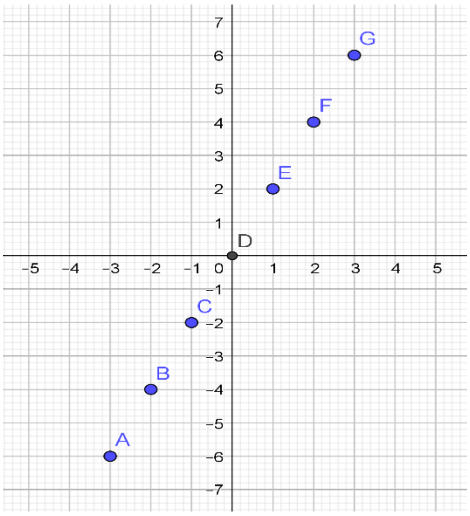
Masa (g)	125	250	500	750	1000
Precio (€)	1,375	2,25	4	5,75	7,5

Una *gráfica* o *representación gráfica* de la tabla de valores es la representación del conjunto de puntos correspondiente a parejas de datos de la tabla de valores. De esta manera podemos visualizar la relación que existe entre estas magnitudes. También a partir de la gráfica podemos construir la tabla de valores.

Ejemplos:

- Consideramos la tabla de valores:

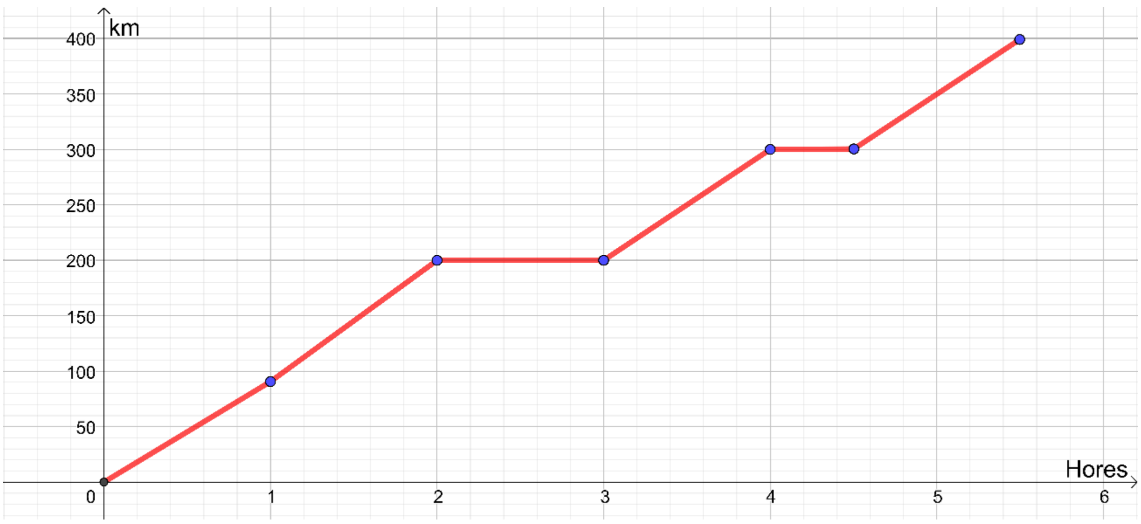
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-6	-4	-2	0	2	4	6



La gráfica de esta tabla contiene los puntos:

A= (-3,-6), B= (-2,-4), C= (-1,-2), D= (0,0), E= (1,2), F= (2,4) y G= (3,6).

- La gráfica siguiente describe el viaje realizado con coche por Ángeles desde Torrevieja a Morella.

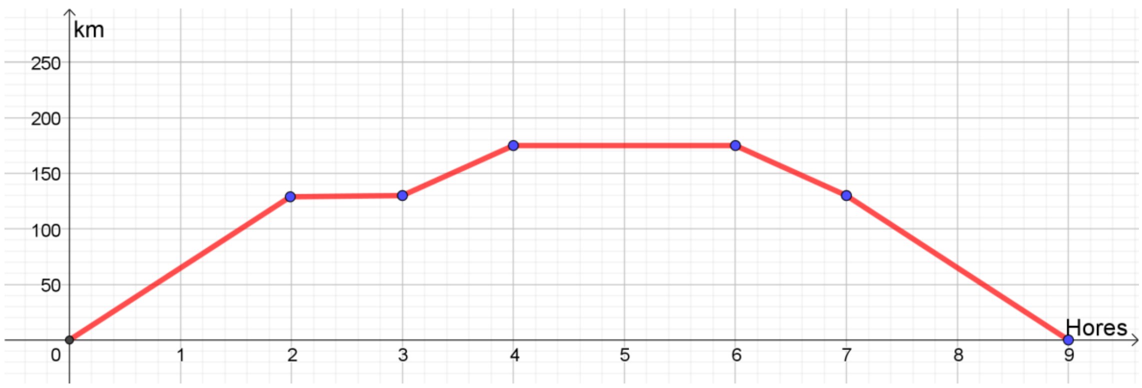


Podemos deducir a partir de la gráfica que:

- Ha recorrido 400 km en 5 h 30 min.
- Ha hecho dos paradas, una a las dos horas de una hora y otra de media hora después de pasar 4 horas desde la salida.
- En la primera hora ha recorrido 90 km y en la segunda 110 km.
- Después de la primera parada ha recorrido 100 km y después de la segunda parada ha recorrido 100 km más.
- Va más rápido en la segunda hora.

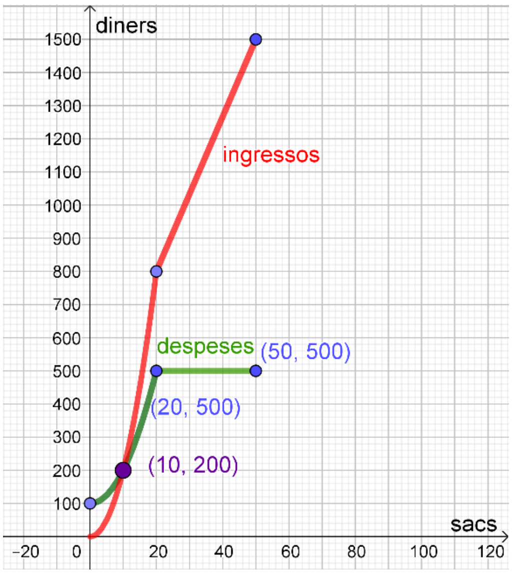
Actividad propuesta

4. La gráfica siguiente corresponde a un viaje de ida y vuelta desde Morella hasta Ademuz pasando por Teruel. Según la gráfica, a) ¿cuántas horas está parado? b) ¿Cuántos kilómetros recorre antes de la primera parada? c) ¿A qué hora está más alejado del punto de salida si comenzó el viaje a las seis de la mañana? d) ¿Cuántas horas está en Teruel?



Actividad resuelta

- Pere tiene un negocio de venta de sacos de patatas a domicilio. Los ingresos (rojo) y los gastos (verde) se pueden ver en el gráfico siguiente:



a) ¿A partir de qué número de sacos vendidos comienza a obtener beneficios?

b) ¿Pierde si nada más vende 15 sacos?

c) ¿Cuánto gana si vende 20 sacos?

d) ¿Cuánto gana si vende 50 sacos?

Fíjate que hemos representado en el eje horizontal el número de sacos y en el eje vertical los dineros.

Solución

a) A partir de 10 sacos, porque para 10 sacos los ingresos son iguales a los gastos.

b) Sí, porque la gráfica de ingresos queda por encima de la de gastos.

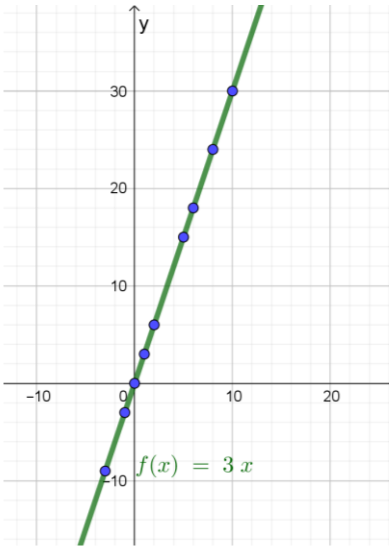
c) Ingresos-gastos=800-500=300 €.

d) Ingresos-gastos=1500-500=1000 €.

4. Funciones

Las funciones son como máquinas que transforman un valor x en otro valor y. Por ejemplo, pueden considerar la función que hace el triple y así, obtener la tabla siguiente:

x	-3	-1	0	1	2	5	6	8	10
y	-9	-3	0	3	6	15	18	16	30



Matemáticamente, expresamos $y = 3x$. También, se escribe $y = f(x) = 3x$, entonces, la variable y está en función de la variable x. La variable x, se denomina variable *independiente* y la variable y se denomina variable *dependiente*.

Los puntos de la tabla se representan y después se unen.

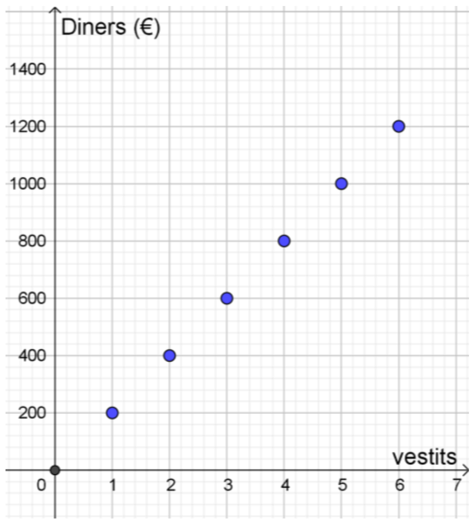
Actividad resuelta

- Laura cobra por vestidos cosidos. Por cada vestido que hace, le pagan 200 €. Por tanto, los dineros que gana están en función del número de vestidos que haga. Construye una tabla de valores, representa los puntos y expresa mediante una fórmula los dineros que gana en función de los vestidos cosidos.

Solución

Vestidos x	0	1	2	3	4	5	6
Dineros (€) y	0	200	400	600	800	1000	1200

Si hace x vestidos, entonces cobra el resultado de multiplicar 200 por x. Podemos denominar y a la cantidad de dinero que gana y escribimos $y = 200x$.



Representamos los puntos de la tabla, pero, en este caso, no tiene sentido unir los puntos porque si hace medio vestido no cobra nada.

Actividad propuesta

5. En una autoescuela el precio de la matrícula es de 150 € y el precio de una clase es de 20 €. Si he necesitado 15 clases para obtener el carnet, ¿cuánto he pagado en total? Construye una tabla de valores, representa los puntos y expresa mediante una fórmula el coste total en función del número de clases.

Situación con medicamentos

Tenemos un medicamento líquido con una concentración de 100 mg/ml. Eso quiere decir que en cada ml hay 100 mg de medicamento. El prospecto nos indica que la dosis recomendada es de 15 mg por kg del peso del niño cada 6 horas. Por tanto, si un niño tiene un peso de 15 kg, entonces la cantidad será 225 mg.

$$\begin{array}{cc} mg & ml \\ 100 & \end{array} z\}$$

Fíjate que 225 mg corresponden a 2,25 ml, dado que se trata de una regla de tres simple directa.

De esta forma tenemos la tabla,

kg	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ml	1,5	1,65	1,8	1,95	2,1	2,25	2,4	2,55	2,7	2,85	3

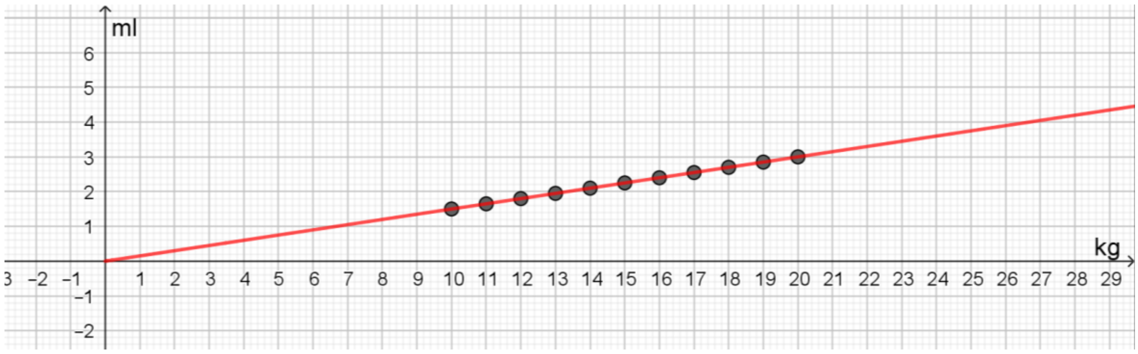
Tenemos que multiplicar los kilos por 15 y después tenemos que dividir entre 100.

Ahora generalizamos. Denominamos x a la variable kilogramos del niño y consideramos la función $f(x)$ que es la cantidad en ml de medicamento que tenemos que administrar.

Como $15x$ es el número de mg y en 1 ml de nuestro frasco hay 100 mg, entonces, tenemos que administrar $\frac{15x}{100}$ ml. Así pues, la función viene dada por

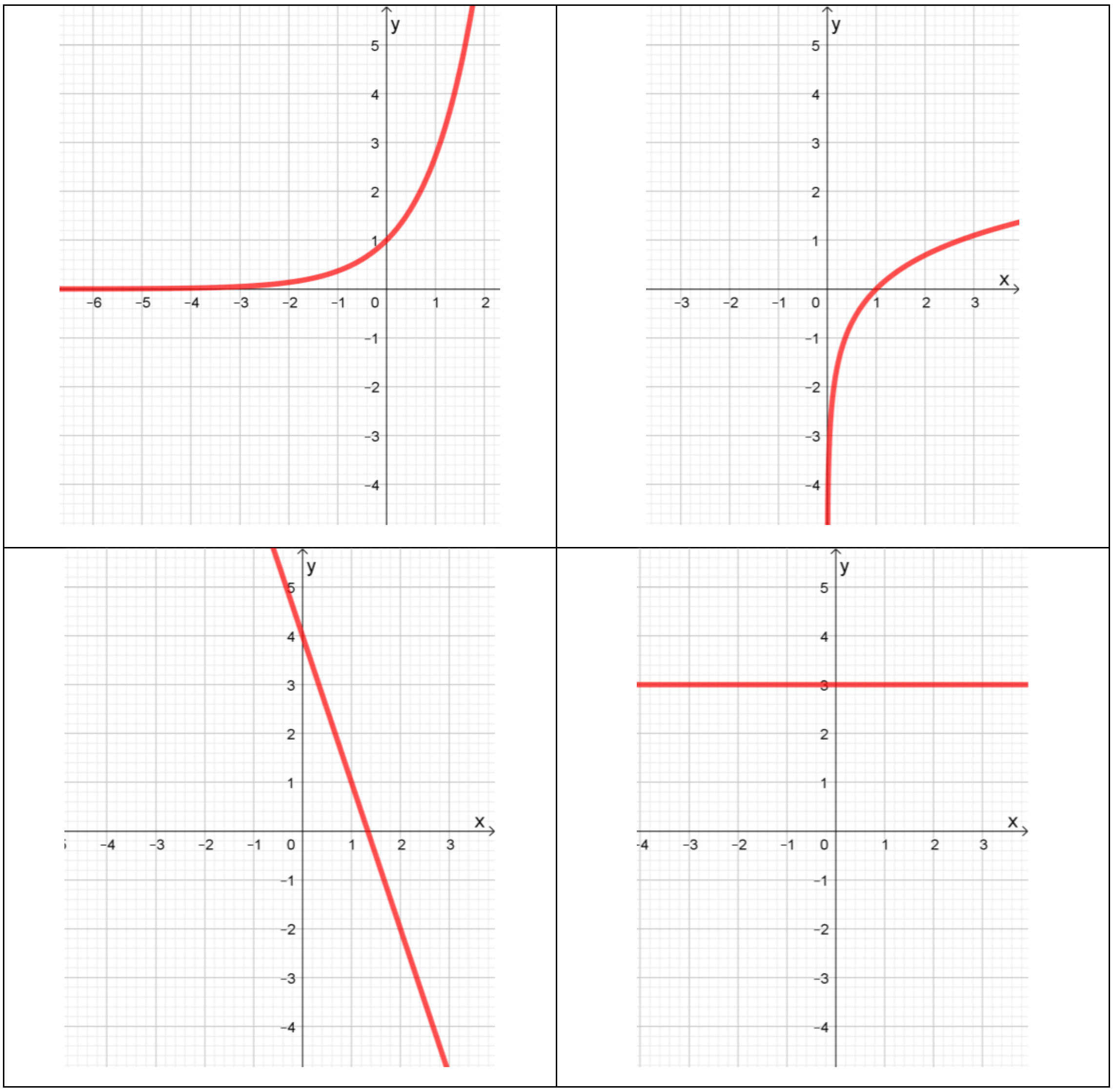
$$f(x) = 0{,}15x$$

Con la función definida a partir de la expresión $f(x) = 0{,}15x$, podemos calcular fácilmente la cantidad en mililitros exactamente para cualquier caso. Por ejemplo, para un niño de 14,5 kg, la cantidad es $f(14{,}5) = 0{,}15 \cdot 14{,}5 = 2{,}175$ ·cada 6 horas.



Así, sí que tiene sentido unir los puntos porque el peso puede tomar valores entre los valores que hemos puesto. Pero no hay gráfica para valores negativos de peso y tampoco la cantidad de ml puede ser negativa.

Ejemplos de gráficas de funciones



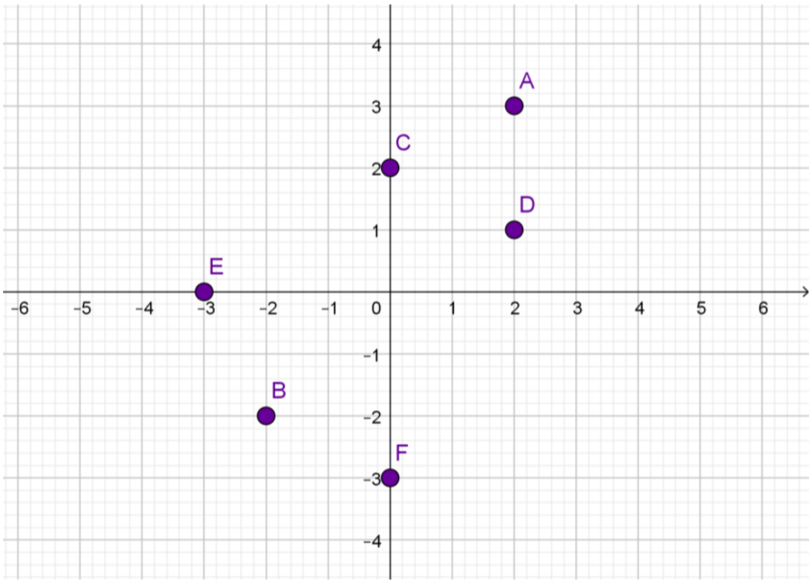
La última función de la derecha es la función constante, porque el valor de y es siempre el mismo, no depende del valor de x.

Actividades finales

1. Completa:

Coordenadas	(9,-2)	(-2,3)	(8,2)	(-7,-3)	(-3,7)	(-10,-9)
Cuadrante						

2. ¿Qué coordenadas tienen los puntos de la gráfica?

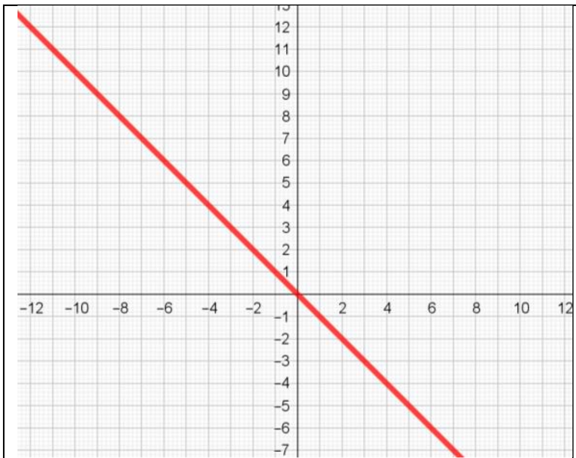


3. Construye una tabla de valores para la función $y = 3x + 2$ con cuatro puntos diferentes. Representa los puntos.

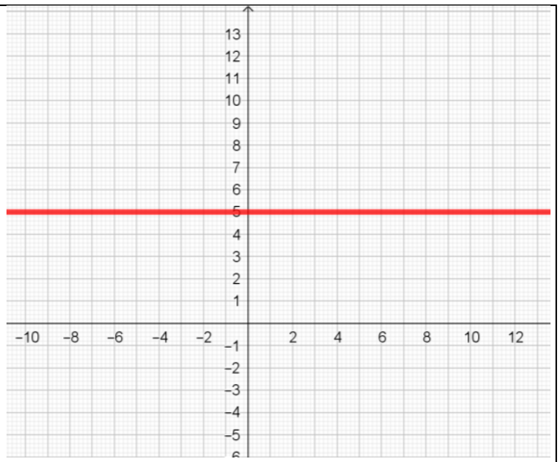
4. Construye una tabla de valores para la función $y = -3x$ con cuatro puntos diferentes. Representa los puntos.

5. Relaciona las funciones siguientes con sus gráficas

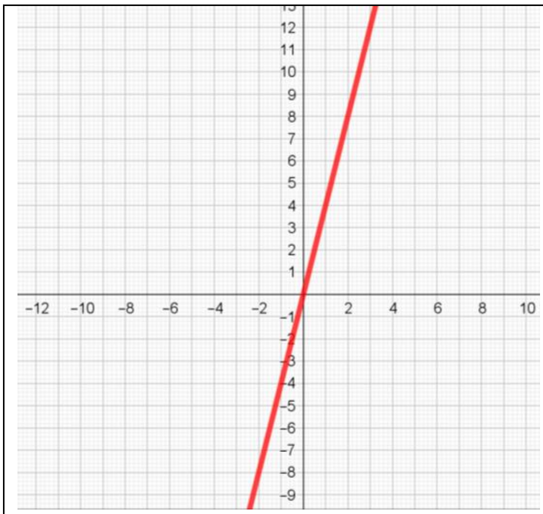
a)$y = 5$	b)$y = 4x$
c)$y = 2x + 3$	d)$y = -x$



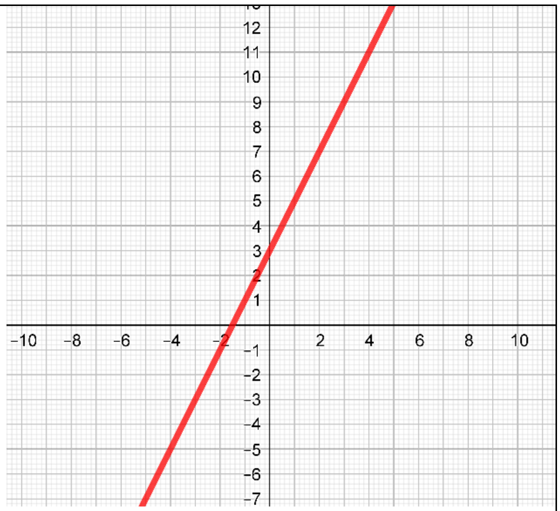
1)



2)

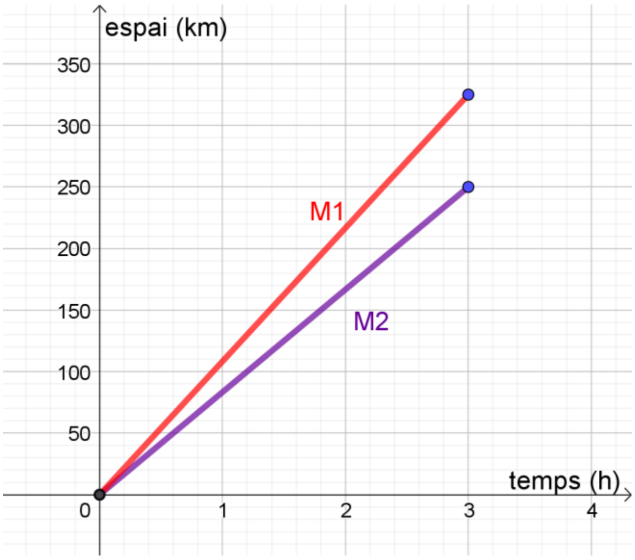


3)



4)

6. Las gráficas siguientes representan la relación espacio-tiempo de dos motoristas M1 i M2:



Calcula

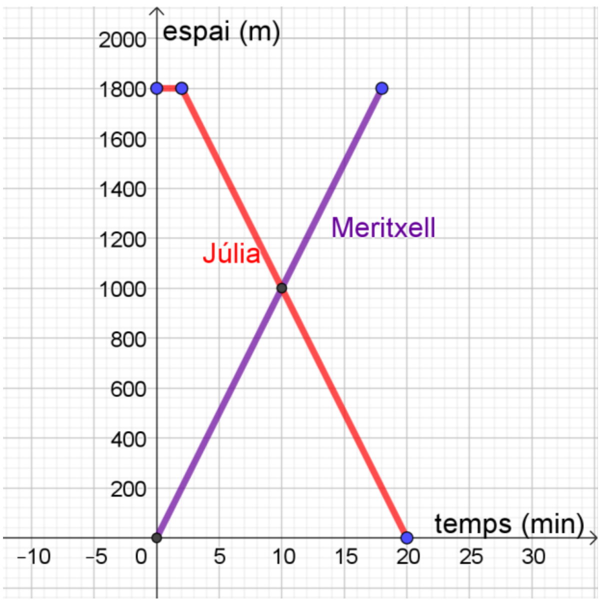
a) La velocidad de M1

b) La velocidad de M2

c) Según del gráfico ¿han salido a la vez?

7. Meritxell sale del hospital Verge dels Lliris de Alcoy en dirección a la plaza de España por el puente Francisco Aura. El GPS indica una distancia de 1800 metros. Júlia va a su encuentro desde la plaza de España. Según las gráficas, a) ¿a qué distancia del hospital se encontrarán?

b) ¿Han empezado a caminar al mismo tiempo? c) ¿A qué distancia de la plaza de España se produce el



encuentro? d) ¿Van a la misma velocidad?

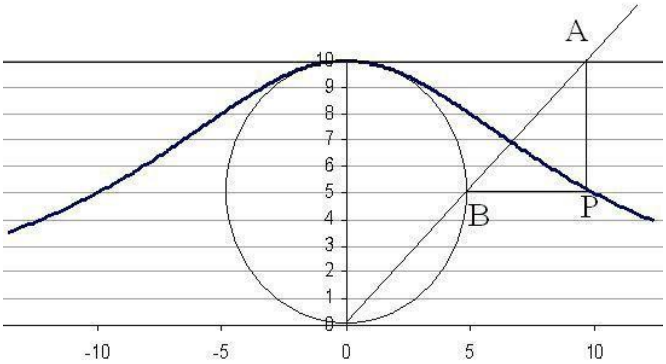
8. Completa siguiendo el ejemplo:

a) La función que a cada número hace corresponder su mitad:	$f(x) = 2x$ **Tambié**$y = 2x$
b) La función que a cada número hace corresponder su triple más ocho unidades:	
c)	$y = 4x + 9$
d)	$y = 2x - 10$
e) La función que a cada número hace corresponder su opuesto:	

Sabias que…

María Gaetana Agnesi (1718-1799 Milà, (Italia), hija de un profesor matemático, a la edad de nueve años hablaba francés, latín, griego, hebreo y algunas otras lenguas. A esta edad escribió un discurso defendiendo la educación de las mujeres.

Su trabajo más importante: Instituciones Analíticas ("Instituzioni analítiche ad use della gioventú italiana"), se publicó y tradujo al francés y al inglés. Una de las partes más importantes de este libro fue la curva denominada originalmente como versiera:



Cuando este libro fue traducido al inglés por John Colson, profesor de matemáticas de Cambridge, este le dio el nombre de “bruixa” a la curva estudiada por Agnesi a causa de una mala traducción y de aquí que cada vez que iba a mencionar a Agnesi se referían a ella como la **bruja de Agnesi**.

Calculadora científica 

Raíz cuadrada	
Raíz cuadrada	Otra posibilidad es utilizar la tecla,  Y después introducimos el número 0.5, porque hacer la raíz cuadrada es equivalente a elevar a 0,5.
Raíz cúbica	 En algunas calculadoras es necesario que apretemos primero la tecla SHIFT

Recuerda que si no da número decimal tienes que utilizar la tecla:

La coma del decimal se pone con la tecla:

Actividad propuestas

1. Con ayuda de la calculadora completa la tabla de la función raíz cuadrada, es decir, $y = \sqrt{x}$:

x	4	10	16	22	28	34	40
y							

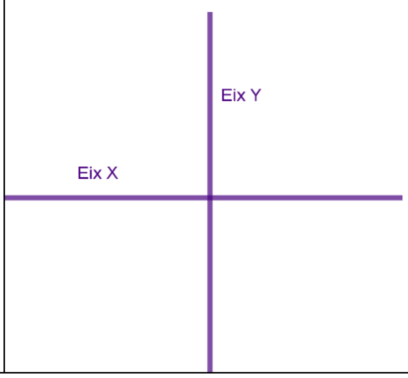
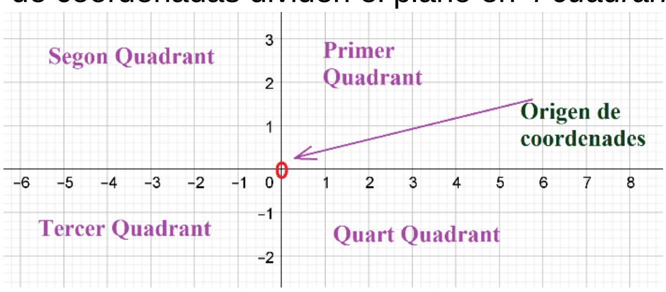
Redondea si hace falta.

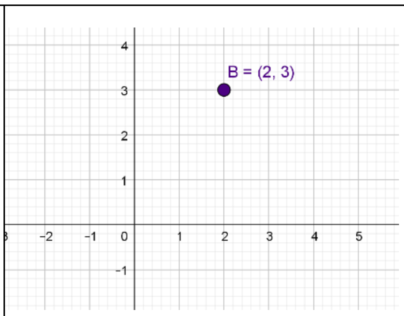
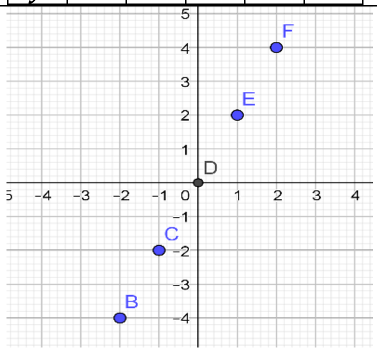
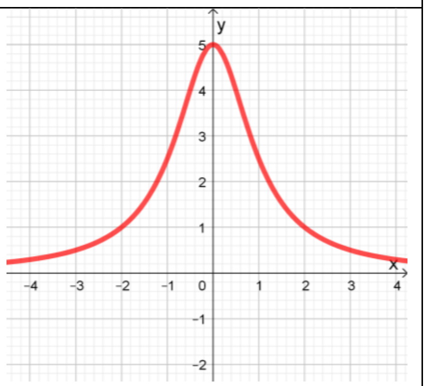
2. Con la ayuda de la calculadora completa la tabla de la función raíz cúbica, es decir, $y = \sqrt[3]{x}$:

x	27	64	125	245	512	700	1000
y							

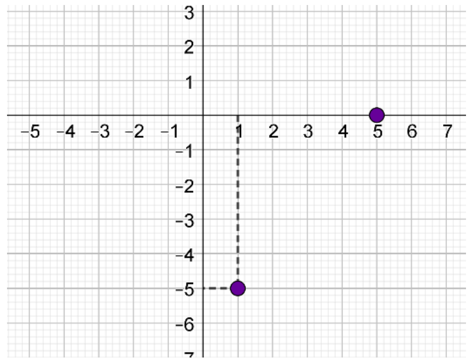
Redondea si hace falta.

Resumen

<table>
<tr><th>Nombre del concepto o propiedad</th><th>Definición</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>Sistema de referencia cartesiano</td><td>Está formado por dos rectas perpendiculares X y Y denominados ejes de coordenadas y el punto O, donde se cortan que se denomina origen de coordenadas.
El eje X se denomina eje de abscisas y el eje Y se denomina eje de ordenadas.</td><td></td></tr>
<tr><td>Cuadrantes</td><td colspan="2">Los ejes de coordenadas dividen el plano en 4 cuadrantes.
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Coordenadas</td>
<td>Cada punto del plano se designa por dos coordenadas. La coordenada correspondiente al eje X y la coordenada correspondiente al eje Y, siempre en este orden.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Tabla de valores</td>
<td>Es una tabla en la que situamos ordenadamente las cantidades correspondientes de dos magnitudes relacionadas.</td>
<td><table>
<tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>y</td><td>-4</td><td>-2</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td></tr>
</table></td>
</tr>
<tr>
<td>Gráfica de una tabla de valores</td>
<td>Es la representación del conjunto de puntos correspondientes a parejas de datos de la tabla de valores.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Función</td>
<td>Una función entre dos magnitudes x y y es una relación o correspondencia de manera que, a cada valor de la variable independiente x, corresponde un único valor de la variable dependiente y. Una función se puede expresar mediante una tabla de valores, una fórmula o una gráfica.</td>
<td>$y = f(x)$
$f(x) = 4x$</td>
</tr>
<tr>
<td>Representación de la gráfica de una función</td>
<td>Es la representación del conjunto de puntos determinados por la fórmula de la función, la tabla de valores asociada o la expresión con cualquier lenguaje.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Autoevaluación



1. Las coordenadas de los puntos indicados son:

a) (-5,1) i (0,5)

b) (1,-5) i (5,0)

c) (-5,-1) i (0,1)

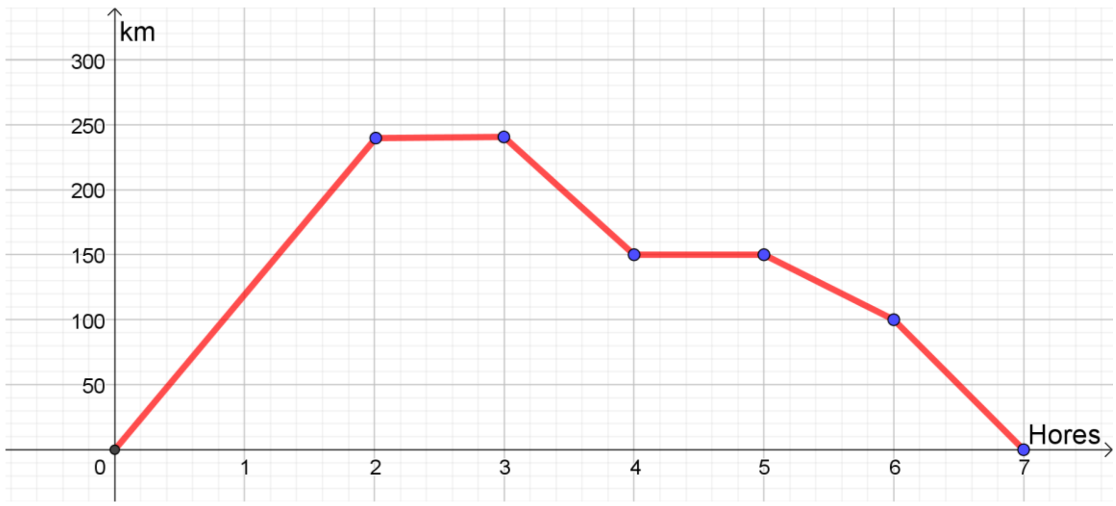
d) (5,1), (-1,0)

2. El punto (-3,-4) esta

a) En el primer cuadrante b) En el segundo cuadrante

c) En el tercer cuadrante d) En el cuarto cuadrante

Figura. Preguntas 3, 4, 5 i 6.



3. Según la gráfica, ¿cuántas horas está parado el vehículo?

a) 2 horas b) 3 horas c) Una hora y media d) Ninguna de las anteriores

4. Según la gráfica, ¿cuántos kilómetros recorre en total?

a) 240 km b) 480 km c) 300 km d) Ninguna de las anteriores

5. Salió a las siete de la mañana, ¿a qué hora está más alejado del punto de salida?

a) A las 14:00 b) Entre las 9 y las 10 de la mañana

c) Entre las 11 y las 12 de la mañana d) Ninguna de las anteriores

6. Según la gráfica, ¿a qué hora volverá al punto de salida si salió a las siete de la mañana?

a) A las 12:00

b) A las 13:00

c) A las 2 de la tarde

d) Ninguna de las anteriores

7. Los números que completan la tabla de magnitudes directamente proporcionales son de izquierda a derecha:

a) 2,3; 3,3; 6,3 y 8,3

b) 2,6; 3; 5,2 y 6,5

c) 2,6; 3; 7,8 y 10,4

d) 2,3; 1,3; 3,6 y 4,3

Tomates (kg)	1	2		6	8
Precio (€)	1,3		3,9		

8. Una función viene dada por $y = 2x + 1$. Para $x = 3$, el valor de y es:

a) 7 b) 8 c) 6 d) Ninguna de las anteriores

9. Una función viene dada por $y = 5x + 9$. Para $x = -2$, el valor de y es:

a) 35 b) -1 c) 12 d) Ninguna de las anteriores

10. En una autoescuela el precio de la matrícula es de 140 € y el precio de una clase es de 20 €. Si he necesitado 10 clases para obtener el carnet, ¿cuánto he pagado en total?

a) 160 € b) 200 € c) 340 € d) Ninguna de las anteriores

11. La factura del gas de una ciudad tiene una cantidad fija de 16 € y 0,7 € por cada metro cúbico. Si denominamos x al número de metros cúbicos y y a los dineros totales de la factura. ¿Cuál es la expresión de la función?

a) $y = 16x + 0{,}7$ b) $y = 16{,}7x$ c) $y = x + 16 + 0{,}7$ d) $y = 0{,}7x + 16$

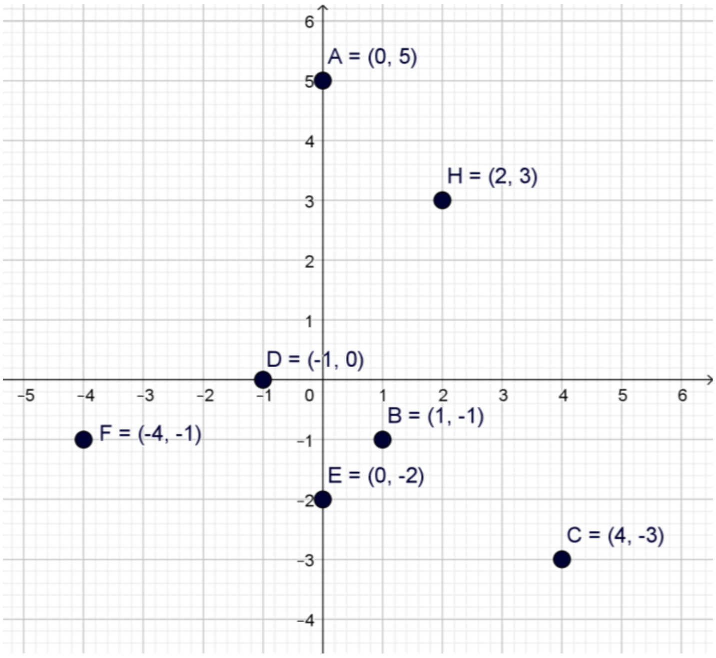
12. ¿Qué tienen en común los puntos (3,0), (-1,0), (1,5;0), (-1/2,0)?

a) Que se representan sobre el eje X b) Que se representan sobre el eje Y

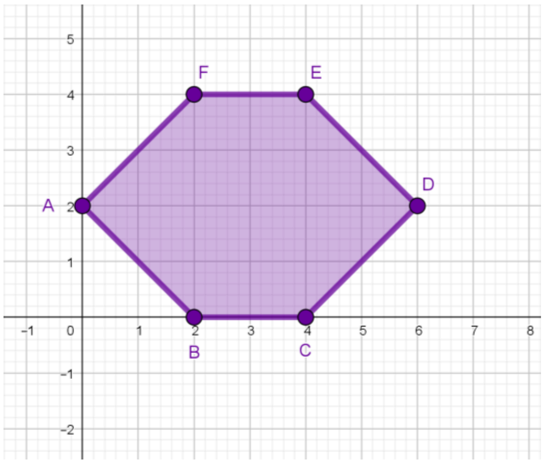
c) Que están en el primer cuadrante d) Que están en el segundo cuadrante

Solucionario. Actividades propuestas

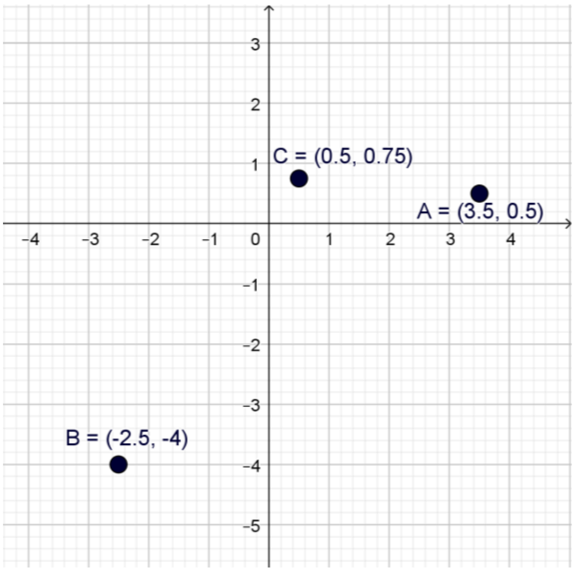
1.



2. Un hexágono:



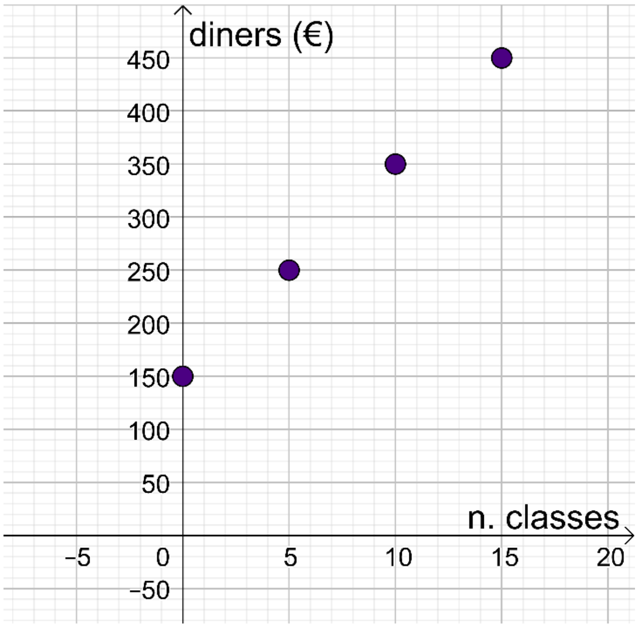
3. Observa que (1/2,3/4) es el punto (0,5;0,75)



4. a) 3 horas b) 130 km c) Entre las 10 y las 12 d) 1 hora.

5. Has pagado en total 450 €.

x	0	5	10	15
y	150	250	350	450



Solucionario. Actividades finales

1.

Coordenadas	(9,-2)	(-2,3)	(8,2)	(-7,-3)	(-3,7)	(-10,-9)
Cuadrante	4t	2n	1r	3r	2n	3r

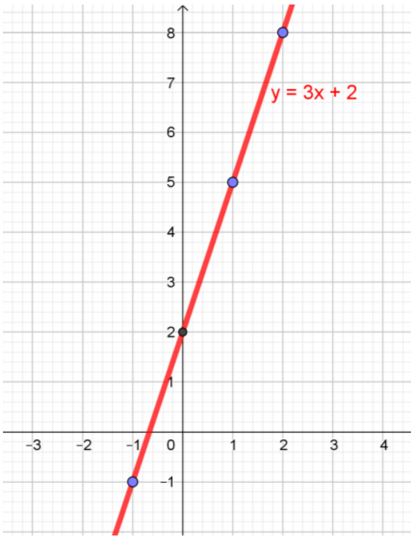
2. A= (2,3); B= (-2,-2); C= (0,2); D= (2,1); E= (-3,0); F= (0,-3)

3. Cálculos:

$3 \cdot (-1) + 2 = -1; 3 \cdot 0 + 2 = 2;$

$3 \cdot 1 + 2 = 5; 3 \cdot 2 + 2 = 8$

x	-1	0	1	2
y	-1	2	5	8

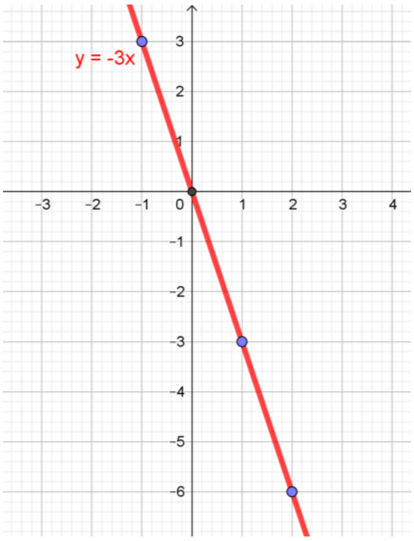


4. Cálculos:

$-3 \cdot (-1) = 3; -3 \cdot 0 = 0;$

$-3 \cdot 1 = -3; -3 \cdot 2 = -6$

x	-1	0	1	2
y	3	0	-3	-6



5. a)2) b)3) c)4) d)1)

6. a)325km/3h=108,3 km/h b) 250km/3h=83,3km/h

c) Sí, porque las dos gráficas pasan por el punto (0,0).

7. a)1000 m b)No, Júlia comienza más tarde, está parada 2 min

c) 800 m d)Sí, porque las dos caminan a velocidad de 1800 m/18 min=100 m/min.

8.

a) La función que a cada número hace corresponder su mitad:	$f(x) = 2x$ También $y = 2x$
b) La función que a cada número hace corresponder su triple más ocho unidades:	$y = 3x + 8$
c)La función que a cada número hace corresponder su cuádruplo más nueve unidades:	$y = 4x + 9$
d) La función que a cada número hace corresponder el doble menos 10 unidades:	$y = 2x - 10$
e) La función que a cada número hace corresponder su opuesto:	$y = -x$

Solucionario. Actividades Calculadora

1.

x	4	10	16	22	28	34	40
y	2	3,16	4	4,69	5,29	5,83	6,32

2.

x	27	64	125	245	512	700	1000
y	3	4	5	6,26	8	8,88	10

Solucionario. Autoevaluación

1b) 2c) 3a) 4b) 5b) 6c) 7c) 8 a) 9b) 10c) 11d) 12 a)

Unidad Didáctica 10. Estadística y probabilidad

¡Aumentar las ventas!

Julià tiene una tienda de cosméticos y quiere hacer una campaña publicitaria. Quiere conocer el perfil de sus clientes, por lo que ha elaborado una encuesta formada por diversas preguntas. Una de esas preguntas es la edad que tienen.
Ha obtenido los datos siguientes en un día:
20,50,55,60,22,25,45,76,18,15,19,21,34,35,38,40,45,12,45,44,67,59,63,54,24
¿Qué aconsejarías a Julià para su campaña de publicidad?

En esta unidad se muestran estrategias y herramientas para que:

- Interpretes correctamente las informaciones de tipo estadístico que aparecen en los medios de comunicación.
- Tomes decisiones de forma razonada en situaciones donde interviene un suceso de que se conoce su probabilidad.
- Conozcas los conceptos de seguro, imposible, posible y probable.

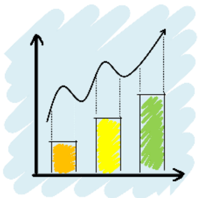
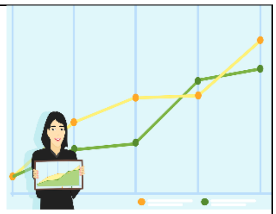
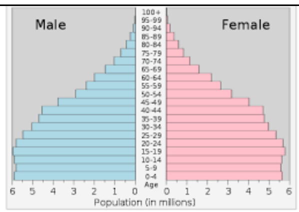
Has de repasar:
-La regla de tres simple directa, el cálculo de porcentajes y la representación de puntos en el plano.

- **Índice**

1. <u>Conceptos básicos de estadísticas</u>

- La estadística es una rama de las Matemáticas que tiene múltiples aplicaciones en las Ciencias Sociales, la Medicina, la Economía y la Política.

¿Dónde aparecen la estadística y la probabilidad?

	**Sociología y Estadística**		
Economía **€ $ £**		**Medicina** **Efectos** 	

En esta unidad iniciamos el estudio de una parte de la Estadística que se denomina Estadística Descriptiva.

La Estadística Descriptiva tiene por objeto recoger, describir y analizar las características de una población o muestra, tratando de poner de manifiesto la estructura y regularidades existentes en los elementos de la población o muestra, es decir, se encarga de tabular los datos, calcular los parámetros y representar los datos mediante gráficas.

Una población es un conjunto de individuos de los cuales estudiamos una característica. Por ejemplo, la población formada por alumnos de un curso de Matemáticas, la población de sardinas del mar Mediterráneo.

Una muestra es una selección de un grupo de la población, es decir, un subconjunto. Es importante que la muestra sea representativa de la población. Por ejemplo, si estoy estudiando la renta de los habitantes de un cierto pueblo y escogemos una muestra formada por las personas que viven en el barrio más caro, entonces, obtendremos conclusiones que no se corresponden con la realidad.

Para una recogida de la información es común la utilización de la **encuesta**.

Una **variable estadística** es la característica que observamos o estudiamos en una población. Por ejemplo, el número de hijos que tienen las mujeres de Valencia, el número de niños nacidos de forma prematura en el mundo cada año, etc.

- **Tipos de variables estadísticas**

Las variables pueden ser:

-C*ualitativas*: si no se pueden medir numéricamente. Por ejemplo, el color de los ojos.

-C*uantitativas*: si se pueden medir numéricamente. Estas se clasifican en:

- *Continuas*: si toman valores en un intervalo, como la altura de los habitantes de un cierto país.
- *Discretas*: si toman valores que se pueden contar. Por ejemplo, el número de hermanos que tienen los alumnos de un curso. (No es posible 1,5 hermanos).

La **Medida de la población** es el número de elementos, personas o cosas que forman la población.

Ejemplo

Suponemos que queremos estudiar los conocimientos de Matemáticas de los alumnos de un cierto curso que se hace en las provincias de Alicante, Castellón y Valencia. En este caso, la población a analizar está formada por todos los alumnos. Escogemos un subconjunto representativo de la población que denominamos muestra. Estudiamos la nota final. La característica "nota" es cuantitativa. Si la muestra está 100 alumnos podemos ordenar las notas mediante la siguiente tabla:

Notes	Freqüència absoluta
0	1
1	2
2	9
3	15
4	17
5	18
6	16
7	10
8	7
9	4
10	1
	n. alumnes= 100

La **frecuencia absoluta** es el número de veces que se repite un dato. Por ejemplo, la frecuencia absoluta del dato 7 es 10.

Eso significa que hay 10 alumnos que tienen un 7.

La **frecuencia relativa** de un valor es el resultado de dividir la frecuencia absoluta de este valor entre el número de individuos de la muestra.

Por ejemplo, la frecuencia relativa de la nota 5 es 0,18, porque $\frac{18}{100} = 0{,}18$.

Actividad propuesta

1. Hemos preguntado a un grupo de amigos el número de libros que leyeron el año pasado:

   2,4,5,5,3,3,3,1,1,0.

Organiza los datos en una tabla indicando las frecuencias absolutas y relativas.

2. Parámetros de centralización: media aritmética, moda y mediana

Suponemos que las edades de un grupo de amigos son:

34, 34, 34, 35, 35, 40, 40,40,40.

Si organizan los datos en una tabla tenemos:

Valor	Recompte	Freqüència Absoluta
34	| | |	3
35	| |	2
40	| | | |	4

- La *moda*: es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia absoluta. Así, la moda es 40, que es el valor que más se repite.

La *media aritmética* es la suma de todos los datos dividido entre el número total de estos.

$$\frac{\overbrace{34+34+34}^{3vegades}+\overbrace{35+35}^{2vegades}+\overbrace{40+40+40+40}^{4vegades}}{9}=$$

$$\frac{34\cdot 3+35\cdot 2+40\cdot 4}{9}=$$

$$\frac{102+70+160}{9}=\frac{332}{9}\cong 36{,}9$$

Cuando los valores se repiten mucho, es útil aprovechar la tabla para realizar la suma de manera ordenada. De esta forma, podemos añadir una columna y colocar los resultados de los productos que tenemos en el numerador. Después colocamos la suma bajo.

Valor	Recuento	Frecuencia Absoluta	Valor × Frecuencia Absoluta
34	| | |	3	$34 \cdot 3 = 102$
35	| |	2	$35 \cdot 2 = 70$
40	| | | |	4	$40 \cdot 4 = 160$
		Suma de frecuencias absolutas=9	332

Media aritmética=36,9

La *mediana* es el valor que queda en el medio cuando ordenamos los valores de la variable que tenemos de menor a mayor. En este ejemplo,

34 34 34 35 35 **40 40 40 40**

Por tanto, la mediana es 35.

Puede ocurrir que queden dos valores en medio, porque el número de valores sea parejo. En este caso, se suman los dos valores y se divide entre dos.

Ejemplos:

- El número de piezas de fruta que los alumnos de un grupo de Pilates comen al día es: 0,3,4,4,5,1,2,2.

  Ordenamos los datos:

  0,1,2, 2,3, 4,4,5

  Cálculo: (2+3)/2=2,5. La mediana es 2,5.
- Los pediatras denominan “talla diana" al valor obtenido mediante la fórmula:

  $\frac{talladelpare+talladelamare}{2}$ (La media aritmética)

Se suma 6,5 cm si es niños y se resta 6,5 cm si es niña. La altura final del niño o de la niña puede variar en $\pm$ 5 cm.

La altura de Enrique es 180 cm y la de Elsa es 160 cm. Si tienen una niña, ¿cuánto medirá?

$\frac{160+180}{2} - 6,5 = 163,5.$

Sumamos y restamos 5, y tenemos que la talla final estará entre 158,5 cm y 168,5 cm.

Si tenemos una niña ¿cuánto medirá?

$\frac{160+180}{2} + 6{,}5 = 176{,}5.$

Sumamos y restamos 5 y tenemos que la talla final estará entre 171,5 cm y 181,5 cm.

Los parámetros de centralización aportan información de una población. Aunque no estudiemos más parámetros has de saber que existen otros parámetros para diferenciar el comportamiento de las poblaciones. Incluso, con los que tratamos podemos establecer diferencias.

Por ejemplo, suponemos que tenemos dos clases de 30 persones y hacemos un examen.

- En una clase todos sacan un 5 y por tanto, la media aritmética, la moda y la mediana es 5.
- En la otra clase, 15 sacan un 10 y 15 sacan un 0. Aquí, la media aritmética y la mediana también es 5. Pero, hay dos valores modales que son 0 y 10.

Actividad propuesta

2. Estos son los datos del número de libros que leyeron un grupo de amigos: 2,4,5,5,3,3,3,1,1,0.

Calcula la media aritmética, la mediana y la moda.

En el caso de variables del tipo continuo, los valores se agrupan en intervalos.

Ejemplo:

- Estemos estudiando la altura de los miembros adultos de una familia y obtenemos estos resultados: 159; 158; 166; 170; 171; 184; 160; 155; 178;181

  Agrupamos los datos en intervalos.

  Observa que en el intervalo [155, 160[entran los valores mayores o iguales a 155 y menores estrictamente que 160, es decir, 160 se cuenta como el intervalo siguiente.

  Ahora, decimos que el intervalo modal es [155,160[.

Intervalo	**Frecuencia absoluta**
[155,160[	**3**
[160,165[	**1**
[165,170[	**1**
[170,175[	**2**
[175,180[	**2**
[180,185[	**1**

Para hacer el cálculo de la media aritmética podemos suponer que las tres personas del intervalo [155,160[tienen una altura de 157,5 cm. Este valor se denomina *la marca de clase del intervalo*.

Marca de clase	**Intervalo**	**Frecuencia absoluta**	**Marca de clase × Frecuencia absoluta**
157,5	[155,160[	3	472,5
162,5	[160,165[	1	162,5
167,5	[165,170[	1	167,5
172,5	[170,175[	2	345
177,5	[175,180[	2	355
182,5	[180,185[	1	182,5
		Suma=10	Suma=1685

La media aritmética con datos agrupados en intervalos=1685/10=168,5.

Volviendo al problema inicial

Julià tiene una tienda de cosméticos y quiere hacer una campaña publicitaria. Quiere conocer el perfil de sus clientes, por lo que ha elaborado una encuesta formada por diversas preguntas. Una de estas es la edad que tienen. Ha obtenido los datos siguientes de un día:

20,50,55,60,22,25,45,76,18,15,19,21,34,35,38,40,45,12,45,44,67,59,63,54,24

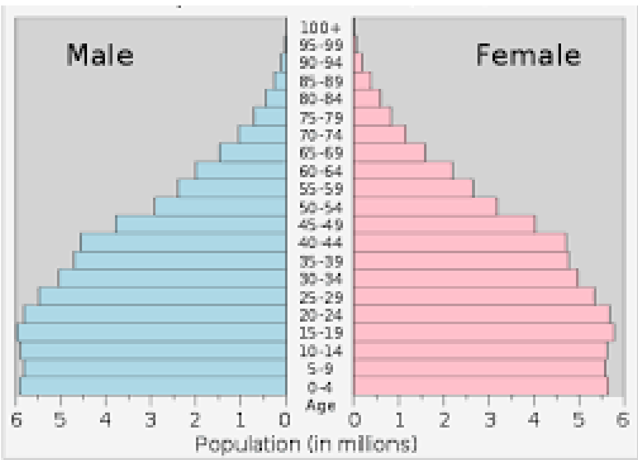
¿Qué aconsejarías a Julià para su campaña de publicidad?

Marca de clase	Intervalos	Frecuencia absoluta	Marca de clase × Frecuencia absoluta
15	[10,20[	4	60
25	[20,30[	5	125
35	[30,40[	3	105
45	[40,50[	5	225
55	[50,60[	4	220
65	[60,70[	3	195
75	[70,80[	1	75
		25	Suma=1005
			Media aritmética=40,2

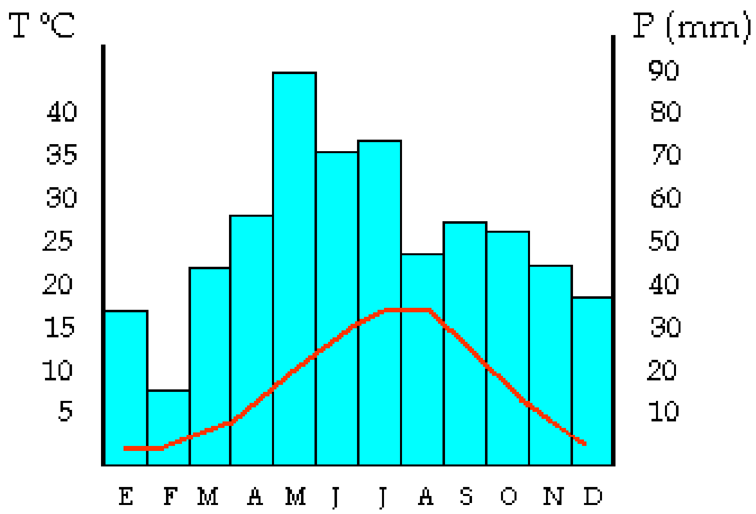
Hay que aumentar las ventas en el intervalo [30,40[y a partir de 60. Las edades son muy diversas y no se agrupan en un único intervalo.

3. Gráficos estadísticos

- **Pirámide de la población**



- **Climograma**



Indica la Temperatura y precipitaciones medias en cada mes del año. Hay que tener en cuenta que las precipitaciones se miden en milímetros de agua. Un milímetro de agua de lluvia equivale a 1 L de agua por m².

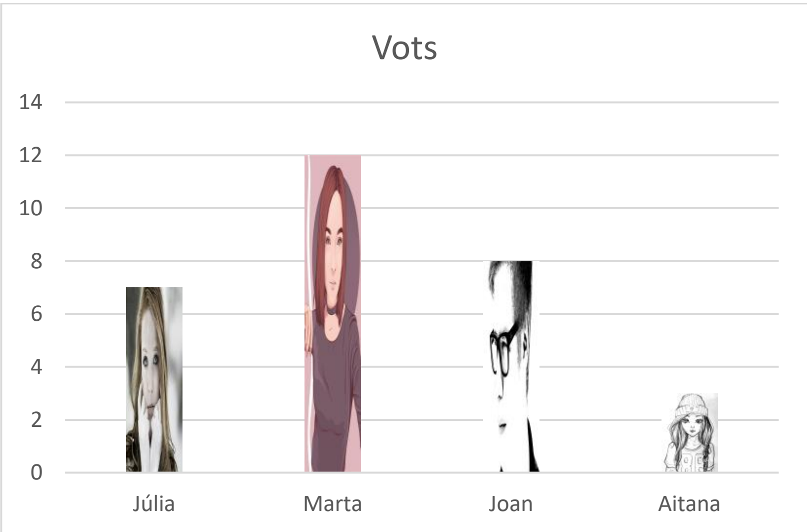
- **Pictogramas:**

Son los más llamativos, ya que se representan por medio de dibujos.

En la clase se ha hecho una votación para la elección de delegado. Se han obtenido los resultados siguientes:

• **Candidato**	•
• **Júlia**	•
• **Marta**	•
• **Joan**	•
• **Aitana**	•

El pictograma correspondiente es:



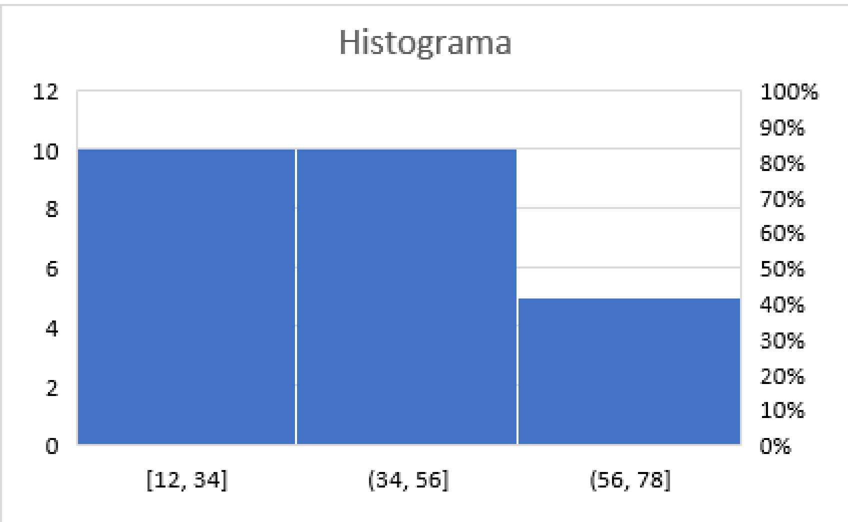
- **Cartograma:**

Se realizan sobre un mapa donde se resaltan puntos geográficos de acuerdo con los datos entregados.

- **Histograma.**

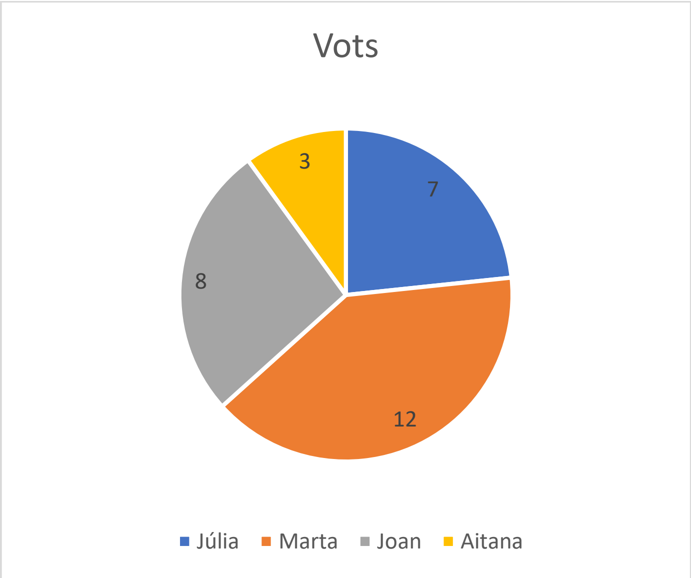
Un histograma está formado por una sucesión de rectángulos construidos sobre una recta.

La base de cada rectángulo representa la amplitud del intervalo y la altura está determinada por la frecuencia, de acuerdo a la propiedad siguiente: cada observación representada en un histograma ocupa un rectángulo de igual área y de base, igual a la anchura del intervalo correspondiente.



- **Diagrama de sectores**

En la clase se ha hecho una votación para la elección de delegado:



Candidato	•	Votos
Júlia	•	7
Marta	•	12
Joan	•	8
Aitana	•	3

Recuerda que el ángulo completo mide 360 grados. El número de votos totales es 30. Si planteamos una regla de tres simple directa podemos calcular el grado que corresponde en un diagrama de sectores:

$$\left.\begin{array}{c} votsGraus \\ 7 - - - - - - - - \rightarrow x \\ 30 - - - - - - - \rightarrow 360 \end{array}\right\} x = \frac{7 \cdot 360}{30} \leftrightarrow x = 84$$

Por tanto,

$$\boxed{n.\,graus = freqüènciarelativa \times 360}$$

Si quieren saber el porcentaje de votos pueden también plantear una regla de tres simple directa:

$$\left.\begin{array}{c} Vots \quad percentatge \\ 7 - - - - - - - - \rightarrow x \\ 30 - - - - - - - \rightarrow 100 \end{array}\right\} x = \frac{7 \cdot 100}{30} \leftrightarrow x = 23{,}3$$

Por tanto,

$$\boxed{Percentatge = freqüènciarelativa \times 100}$$

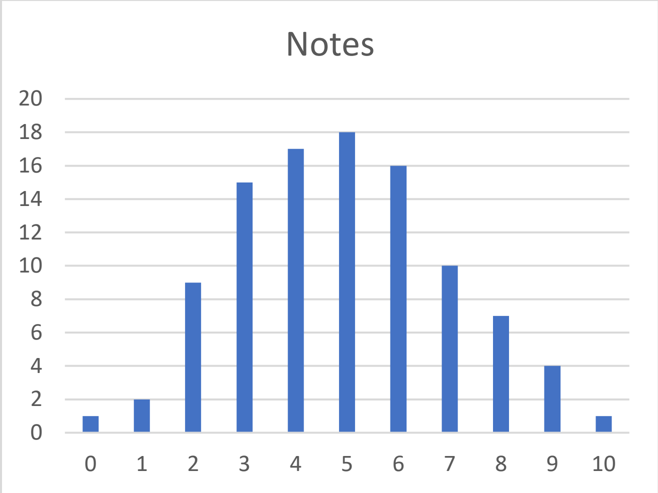
•	Candidato	•	Votos	F. relativa	Porcentaje	Grados
•	Júlia	•	7	• 7/30	23,3	84
•	Marta	•	12	• 12/30	40	144
•	Joan	•	8	• 8/30	26,7	96
•	Aitana	•	3	• 3/30	10	36

Actividad propuesta

3. Estos son los datos del número de libros que leyeron un grupo de amigos el año pasado: 2,4,5,5,3,3,3,1,1,0

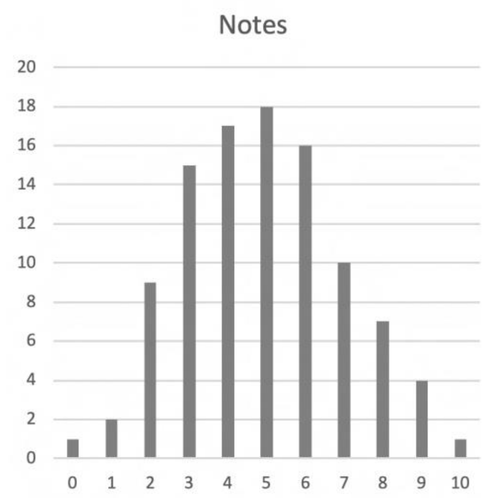
Calcula los porcentajes y los grados.

4. Dibuja un diagrama de sectores de forma aproximada.



- **Diagrama de barras**

Notas	Frecuencia absoluta
0	1
1	2
2	9
3	15
4	17
5	18
6	16
7	10
8	7
9	4
10	1
	n. alumnes= 100

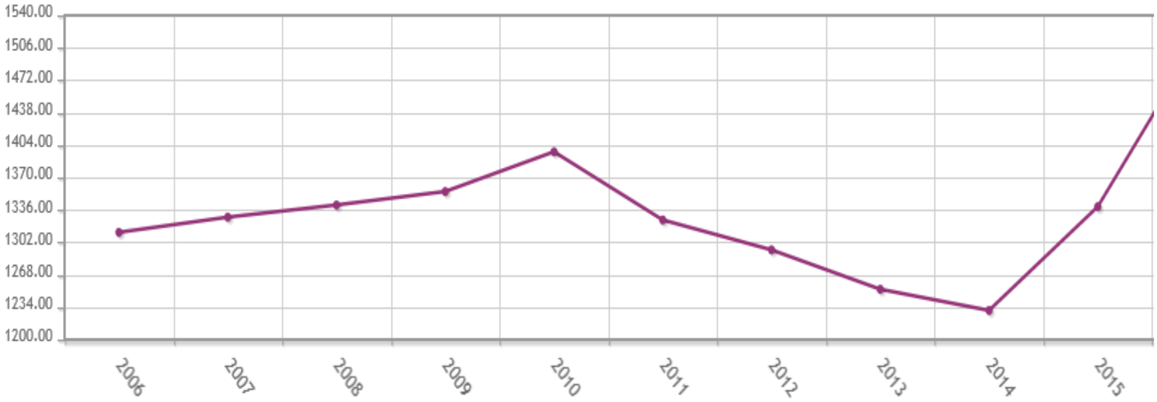


Actividad propuesta

5. Sobre los datos del número de libros que leyeron un grupo de amigos el año pasado: 2,4,5,5,3,3,3,1,1,0, dibuja un diagrama de barras.

- **Polígono de frecuencias**

  Gastos de las familias con hijos en deportes.



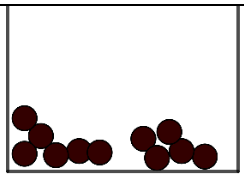
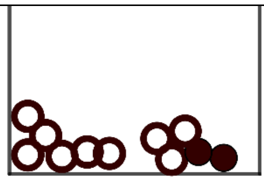
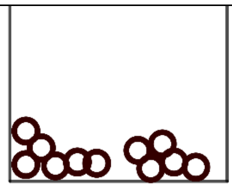
Fíjate que 2014 marca una crisis.

4. **Porcentajes y grados**

Hay situaciones en la vida diaria en la que no podemos predecir el resultado que saldrá, pero sí que podemos saber los posibles resultados. Son situaciones que dependen del azar. Por ejemplo, cuando lanzamos un dado no sabemos qué resultado saldrá. Se trata de un experimento *aleatorio* o *de azar*. Pero si saben que los resultados posibles son 1,2,3,4,5 o 6.

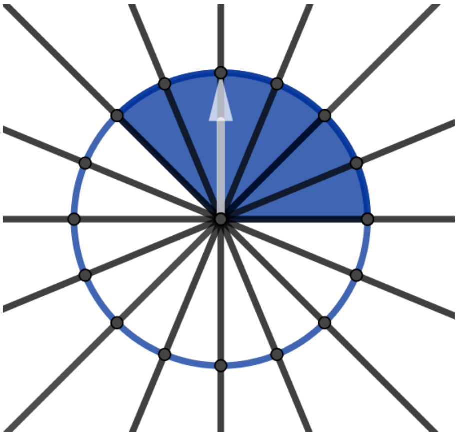
Seguro, probable o imposible.

Suponemos que tenemos estas bolsas con bolas blancas y negras de las que conocemos su composición y escogemos una bola con los ojos cerrados.

		
Es *imposible* que la bola salga blanca. Es *seguro* que la bola será negra.	Es *posible* que la bola salga negra, pero, es más *probable* que la bola salga blanca.	Es *imposible* que la bola salga negra. Es *seguro* que la bola será blanca.

Cada afirmación referente a los diferentes resultados de un experimento aleatorio se denomina *suceso*.

La probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1 que indica el nivel de posibilidad que tiene un suceso de ocurrir. Es la razón entre el número de casos favorables al suceso y el número total de casos que hay.



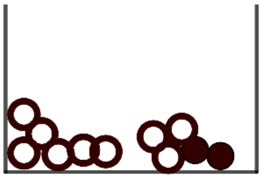
En esta ruleta hay 6 partes de 16 que son azules. La probabilidad que salga azul es $\frac{6}{16}$ y la probabilidad que salga blanco es $\frac{10}{16}$.

Color	Relación con el total	Probabilidad
Azul	6 de 16	$\frac{6}{16} = 0{,}375$
Blanco	10 de 16	$\frac{10}{16} = 0{,}625$

Actividad propuesta

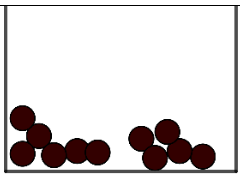
6. Completa la tabla para el experimento de escoger una bola al azar de la bolsa:

a)



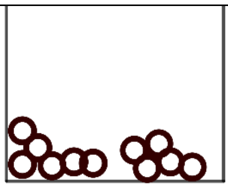
Color	Relación con el total	Probabilidad
Negro		
Blanco		

b)



Color	Relación con el total	Probabilidad
Negro		
Blanco		

c)



Color	Relación con el total	Probabilidad
Negro		
Blanco		

5. **Experimento de azar**

Suponemos que lanzamos un dado 120 veces y obtenemos estos resultados:

4	3	2	6	1	2	2	4	3	3
1	4	2	2	1	2	3	2	4	5
1	2	3	4	5	6	2	5	1	2
6	4	2	4	2	6	2	2	4	6
5	5	2	6	1	6	4	3	3	2
3	6	3	6	4	5	6	2	4	6
5	5	4	4	2	3	4	6	3	2
3	5	3	5	2	5	2	2	1	4
4	1	4	5	1	2	2	1	4	2
6	6	2	2	4	6	6	1	5	4
6	4	5	4	5	3	3	3	2	2
2	6	5	2	5	4	6	6	4	6

Media aritmética	
3,57	
Valores	Frecuencia relativa
n. de 1 = 11	11/120
n. de 2 = 31	31/120
n. de 3 = 16	16/120
n. de 4 = 24	24/120
n. de 5 = 17	17/120
n. de 6 = 21	21/120

Si lanzamos un número muy grande de veces un dado, por ejemplo, 1.000.000 de veces, entonces, el número de veces que sale el número 2 tiene una frecuencia relativa aproximadamente igual a $\frac{1}{6}$ que es la probabilidad del suceso “salir el número 2”.

Este descubrimiento se debe a Jacques Bernuilli (1654-1705). Sde denomina primera *ley de los grandes números*: la frecuencia relativa de un suceso se aproxima cada vez más a un valor fijo a medida que aumentamos el número de pruebas. Este valor es la probabilidad del suceso.

Actividad propuesta

7. Lanzamos 25 veces una moneda. Completa la tabla

cara	cara	cruz	cara	cara
cara	cruz	cruz	cruz	cara
cruz	cara	cara	cara	cara
cruz	cara	cara	cara	cruz
cruz	cruz	cara	cruz	cara

Suceso	Número de veces	Frecuencia relativa
Cara		
Cruz		

Actividad resuelta

En una clase hay 7 persones que tienen el cabello negro, 8 que lo tiene marrón y 5 que lo tienen rubio. a) Haz una tabla, indicando la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa. b) Si escogemos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga el cabello rubio?

Solución. Hay un total de 20 alumnos.

a)	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Negro	7	7/20=0,35
Marrón	8	8/20=0,4
Rubio	5	5/20=0,25

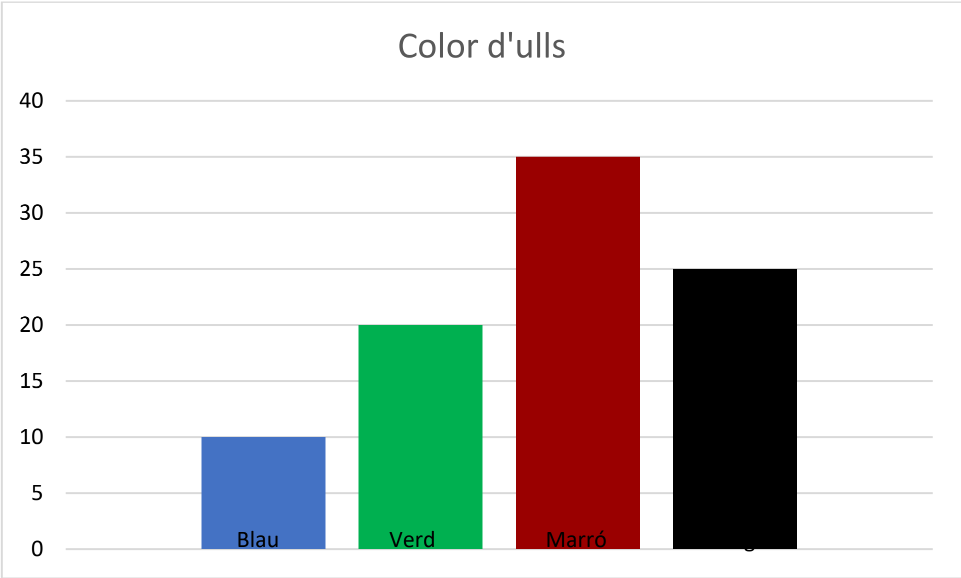
b) Hay 15 de 20 que no tienen el cabello rubio. Por tanto, la probabilidad es 15/20=0,75.

Actividad propuesta

En una clase hay 6 persones que llevan gafas para ver de cerca, 9 para ver de lejos y 5 que no llevan gafas. a) Haz una tabla, indicando la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa. b) Si escogemos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que lleven gafas?

Actividades finales

1. Interpreta el gráfico:



a) ¿Cuántas personas tienen los ojos azules?

b) ¿Cuántas personas hay en total?

c) ¿Qué porcentaje tiene los ojos marrones?

d) Si escogemos una persona al azar de esta población, ¿cuál es la probabilidad que tenga los ojos verdes?

e) ¿Cuál es la moda de color de ojos?

2. Se ha preguntado a los niños de la clase de un colegio el número de piezas de fruta que come al día. Se han obtenido los datos siguientes:

2,3,5,2,2,4,4,3,3,3,2,1,2,2,1,3,2,2,1,3,2,2,2,3,1,1,3,4,5,2

a) Organiza los datos en una tabla, indicando los valores y las frecuencias absolutas y relativas.

b) Calcula la media aritmética.

c) Calcula la mediana.

d) Calcula la moda.

e) Calcula los porcentajes.

f) Calcula los grados que corresponden en un sector circular.

g) Si escogemos un niño al azar, ¿podemos afirmar que come al menos una pieza de fruta al día?

h) Si escogemos un niño al azar, ¿cuál es la probabilidad de que coma al menos dos piezas de fruta al día?

i) Construye el diagrama de barras correspondiente.

3. En un examen de Matemáticas se presentan 200 personas, de las cuales el 10 % sacan Excelente, el 25% Notable, el 15 % Bien, el 35 % Suficiente y el resto Insuficiente.

a) ¿Cuántas personas han aprobado?

b) ¿Cuál es la media aritmética? Ten en cuenta los intervalos: Insuficiente= [0,5[, Suficiente= [5,6[, Bien= [6,7[, Notable= [7,9[y Excelente= [9,10]

4. Lanzamos un dado icosaedro (20 caras). Completa la tabla:

Suceso	Elementos que componen el suceso	Número de casos favorables	Número de casos posibles	Probabilidad
Múltiplo de 2				
Múltiplo de 5				
Múltiplo de 3				
Múltiplo de 8				
Número primero				

5. De una baraja de 48 cartas se extrae al azar. Calcula la probabilidad de:

a) Sean de espadas

b) Sea figura

c) No seas un as

6. Si juegas a tirar dos dados y anotar la suma, ¿a qué número apostarías?

7. Un entrenador ha de escoger a uno de sus jugadores para lanzar el penal. En los entrenamientos cuatro jugadores han obtenido los resultados siguientes:

María: 75 goles de cada 100

Natàlia: 45 goles de cada 50

Carla: 60 de cada 70

Pepa: 3 de cada 4

Elabora una tabla de porcentaje de acierto de cada una.

¿Qué es mejor escoger?

8. Clasifica los sucesos siguientes según sean seguros, muy probables, poco probables o imposibles:

a) Extraer una carta de la baraja y que sea el rey de copas.

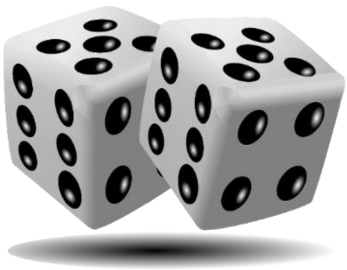
b) Que a tu clase asista una persona de fuera.

c) Lanzar una botella de vidrio por el balcón y que no se rompa.

d) Que ningún hombre de Valencia se llame Jordi.

Sabias que…

- Big fecha, datos masivos, inteligencia de datos o datos a gran escala es un concepto que hace referencia a un conjunto de datos tan grandes que aplicaciones informáticas tradicionales de procesos de datos no son suficientes para tratar con ellos y los procedimientos usados para encontrar patrones repetitivos en estos datos. Esta información se utiliza para la creación de informes estadísticos y modelos predictivos utilizados en diversas materias, como los análisis de negocio, publicitarios, los datos de enfermedades infecciosas, el espionaje y seguimiento de la población o la lucha contra el crimen organizado.
- Mark Twain: "hay mentiras, grandes mentiras y estadísticas". Para pensar: ¿Por qué las estadísticas son falsas? Entonces, porqué son interpretables. Por ejemplo, puedes encontrar gráficos que establezcan la correlación entre el precio de las patatas fritas y la cantidad de personas que mueren por haber caído de su silla de ruedas. Una correlación perfecta (de esas de más del 95%) que permiten inferir que el aumento del precio de las patatas fritas implica que más gente muera por caer de su silla de ruedas.



- Según los descubrimientos y hallazgos en los jeroglíficos, más o menos alrededor del año 2000 aC, los egipcios ya habían esculpido un dado de 6 caras y parece ser que era un entretenimiento regular.

Calculadora científica 

Con la calculadora científica se puede calcular la media aritmética introduciendo los datos. La forma de hacerlo depende del modelo de la calculadora.

Las hojas de cálculo del ordenador son muy prácticas para la estadística.

Actividad propuesta

1. Con ayuda de la calculadora repasa los cálculos de la unidad.

Resumen

Nombre del concepto o propiedad	***Definición***	***Ejemplo***
Población	Conjunto de individuos de los que estudiamos una característica.	La población de chicos nacidos en el 2010.
Muestra	Selección de un grupo de la población.	Escogemos 1000 niños nacidos en 2010.
Encuesta	Es un método por el cual obtenemos la información que necesitamos para nuestro estudio.	¿Cuántas veces cargas tu móvil a la semana?
Variable estadística	Es la característica que observamos o estudiamos en una población.	El dinero que ganan en un mes.
Tipos de variables estadísticas	Las variables pueden ser: -*cualitativas*: si no se pueden medir numéricamente. -*cuantitativas*: si se pueden medir numéricamente. Estas se clasifican en: -*continuas*, si toman valores en un intervalo. -*discretas,* si toman valores que se pueden contar.	Cualitativas: profesión. Continua: peso. Discreta: número de hijos.

Frecuencia absoluta	Es el número de veces que se repite un dato.	Si tenemos 3,3,4,5,6,7,7, la frecuencia absoluta del dato 7 es 2.
Medida de la población	Es el número de elementos, personas o cosas que forma la población.	La población de tellinas de Gandía.
Moda	Es el valor o valores que tienen la máxima frecuencia absoluta, es decir, el valor o valores que más se repiten.	Si tenemos 3,4,5,5,6,5, la moda es 5.
Mediana	Es el valor que queda en el medio cuando ordenamos los valores de la variable que tenemos de menor a mayor. Si se quedan dos hacemos la media aritmética.	34 34 34 35 35 40 40 40 40 La mediana es 35. 0,1,2, 2,3, 4,4,5 La mediana es 2,5.
Media	La media aritmética es la suma de todos los datos dividida entre el número total de estos.	De 4, 5, 7,7 la media aritmética es 5,75
Marca de clase	Es el punto medio del intervalo.	Del intervalo [3,4[es 3,5.
Frecuencia relativa	Es el resultado de dividir la frecuencia absoluta de este valor entre el número de individuos de nuestra muestra.	Si un dato se repite 4 veces y hay 25 datos, la frecuencia relativa es $\frac{4}{25} = 0{,}16$
Porcentaje	$Percentatge = freqüènciarelativa \times 100$	Si un dato se repite 4 veces y hay 25 datos, el porcentaje es $\frac{4}{25} \cdot 100 = 16\%$
Grados	$n.graus = freqüènciarelativa \times 360$	Si un dato se repite 4 veces y hay 25 datos, el número de grados es $\frac{4}{25} \cdot 360 = 57{,}6$
Gráficos estadísticos	Climograma, diagrama de barras, polígono de frecuencias, histograma, pirámide de población, diagrama de sectores, pictograma, etc.	
Interpretación de la frecuencia de la probabilidad	La frecuencia relativa de un suceso se aproxima cada vez más a un valor fijo a medida que aumenten el número de pruebas. A este valor se le denomina probabilidad del suceso.	
Probable, seguro, imposible	De una bolsa donde no hay bolas negras es imposible extraer bolas negras y seguro que sean de otro color. Si hay pocas bolas blancas es posible extraer bolas blancas, pero es poco probable.	
Cálculo de probabilidad	En una baraja hay 4 reyes de 40 cartas. La probabilidad de extraer rey es 4/40=0,1.	

Autoevaluación

1. La media aritmética de los datos 4,5,6,8,9,9,3,3,3,6 es

a) 5,6 b) 5,06 c) 5 d) 6

2. La media de dos números es ocho. Se añaden tres más y la mediana es también ocho. ¿Cuánto suman los tres números?

a) 20 b) 24 c) 6 d) 48

3. Se extrae una carta de una baraja de 40 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un caballo?

a) 4% b) 0,1 c) 1/40 d) 0,4

4. La mediana de los datos 1,5,8,8,9,1,3 es

a) 8 b) 3 c) 5 d) Ninguno de los anteriores

5. Estamos estudiando la edad de 20 alumnos de una clase. Si la frecuencia absoluta de la edad 21 años es 4. ¿Qué porcentaje de alumnos tiene 21 años?

c) 19% b) 24% c) 5% d) 20%

6. En un diagrama de barras la altura de las barras indica:

a) La frecuencia absoluta de cada valor de la variable

b) La medida de cada valor de la variable

c) El porcentaje de cada valor de la variable

d) Ninguna de las anteriores

7. En una urna hay 6 bolas rojas y 3 azules. Extraemos una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja?

a) $\frac{3}{9}$ b) 0,6 c)0,6 d) $\frac{2}{3}$

8. ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es verdadera?

a) Es más probable que al lanzar una moneda salga cruz.

b) La probabilidad de que una carta de la baraja sea copas es $\frac{1}{4}$.

c) En la lotería es más probable que gane un número acabado en 7 que uno acabado en 0.

d) Al lanzar un dado es más probable sacar un número par que un impar.

9. Si tres alumnos tienen 42 años, dos tienen 25 y tres tienen 50. ¿Cuál es la edad media de los alumnos?

a) 40,09 b) 40,75 c) 37 d) 39

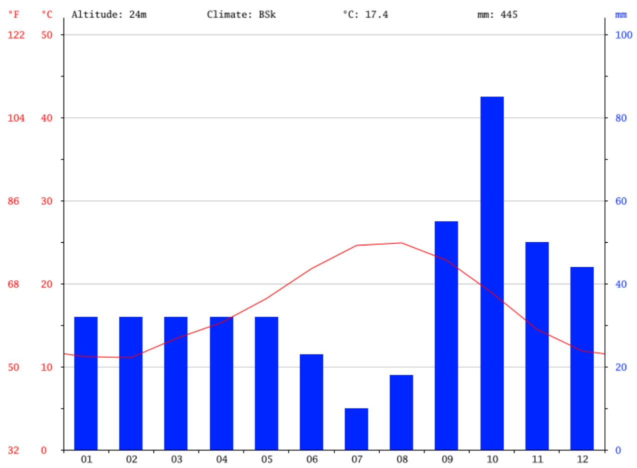
10. Según el climograma, ¿cuándo va a llover más?:

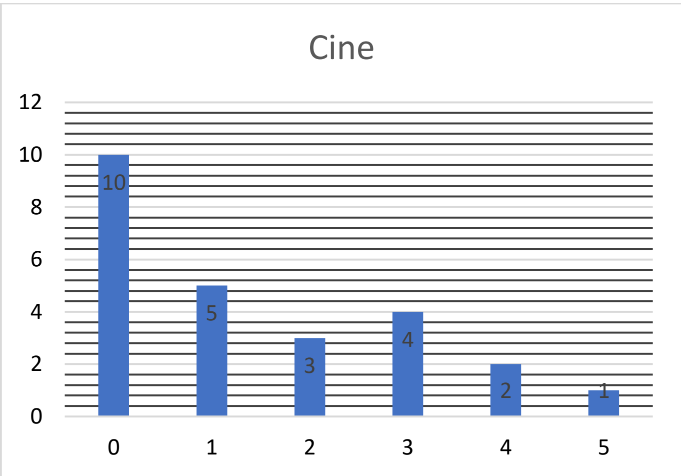
a) En octubre

b) En julio

c) En primavera

d) En agosto





11. Partiendo del gráfico calcula la media aritmética del número de veces que una determinada población va al cine en un año.

a) 2,1

b) 1,44

c) 3

d) 2,5

12. Hemos estudiado la talla de las mujeres de un grupo y hemos obtenido los datos siguientes:

Talla	Número de mujeres
38	30
40	70
42	20
44	40

Si escogemos una mujer aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que tenga la talla 44?

a) 40/44 b)1/40 c) 0,25 d) 0,4

Solucionario. Actividades propuestas

1.

N. libros	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
0	1	1/10=0,1
1	2	2/10=0,2
2	1	0,1
3	3	0,3
4	1	0,1
5	2	0,2
	Suma=10	

2. $Mitjanaaritmètica = \frac{0+1+1+2+3+3+3+4+5+5}{10} = 2{,}7$

También, con ayuda de la tabla:

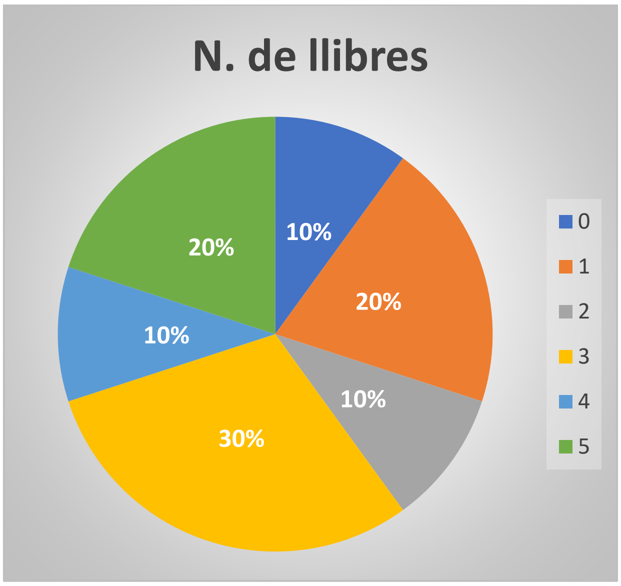
N. libros	Frecuencia absoluta	N. libros x F. absoluta
0	1	0
1	2	2
2	1	2
3	3	9
4	1	4
5	2	10
	Suma=10	Suma=27
Media aritmética=2,7		
	Moda=3	
	Mediana=3	

Fijate que el valor que más se repite es 3 libros. Por eso, la moda es 3 libros. Al ordenar 0,1,1,2,3,3,3,4,5,5, en medio queda 3, por tanto, la mediana es 3.

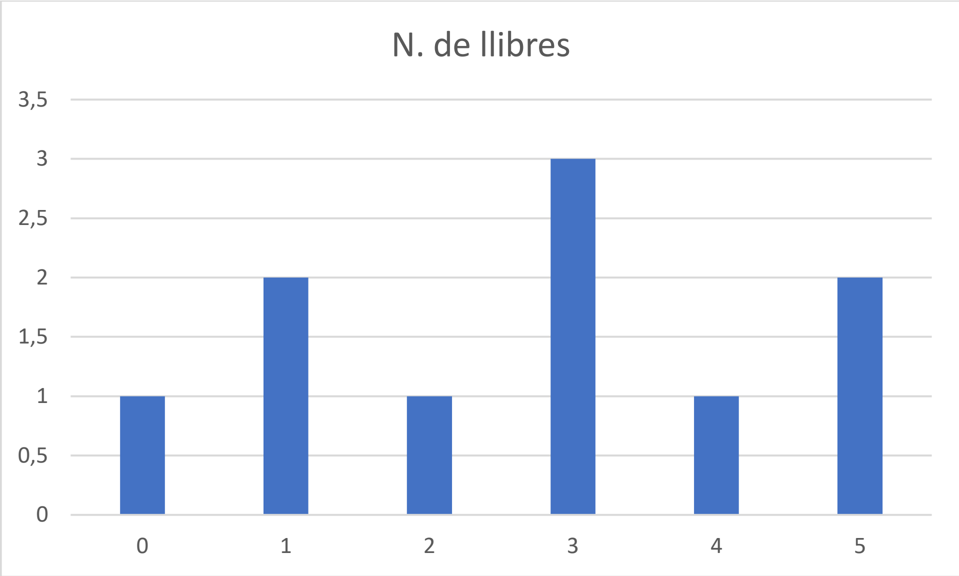
3.

N. libros	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentajes	Grados
0	1	0,1	10	36
1	2	0,2	20	72
2	1	0,1	10	36
3	3	0,3	30	108
4	1	0,1	10	36
5	2	0,2	20	72

4.



5.



6.

a) Negro: 2 d'11 P=$\frac{2}{11}$ Blanco: 9 d'11 P=$\frac{9}{11}$	b) Negro: 11 d'11 P=1 Blanco: 0 de 11 P=0	c) Negro: 0 d'11 P=0 Blanco: 11 d'11 P=1

7.

15	0,6
10	0,4

Solucionario. Actividades finales

1. a)10

d) 10+20+35+25=90

e) Porcentaje=$\frac{35}{90} \cdot 100 = 38{,}9$

f) $\frac{20}{90} = \frac{2}{9} = 0{,}2$

g) Marrón

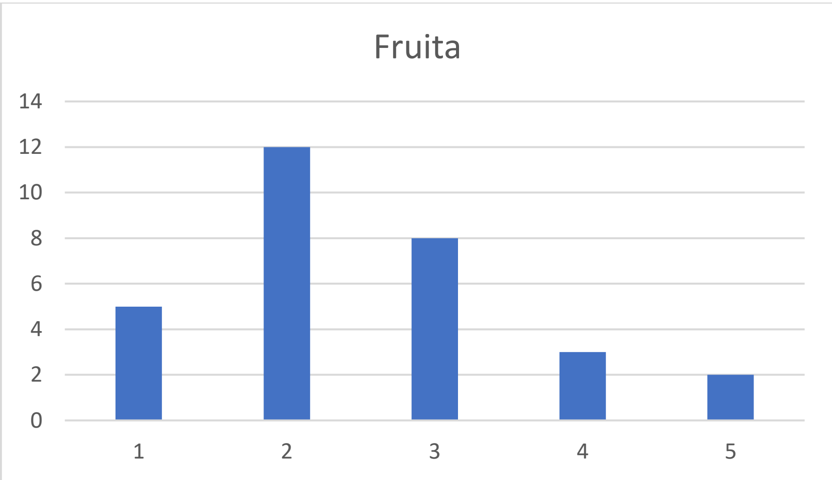
2. Haciendo redondeo.

N. piezas	F. absoluta	F. relativa	%	Grados	n. piezas × f. absoluta
1	5	0,167	16,7	60	5
2	12	0,4	40	144	24
3	8	0,267	26,7	96	24
4	3	0,1	10	36	12
5	2	0,067	6,7	24	10
	Suma=30				Suma=75

Media aritmética=2,5; mediana=2; moda=2

g) Sí, porque todos han dicho un número igual o mayor a 1.

h) 25 de 30, es decir, $\frac{25}{30} = 0{,}83$.



3.

	Marca de clase	F. absoluta	Porcentaje
Insuficiente [0,5[	2,5	15% de 200=30	15
Suficiente [5,6[	5,5	70	35
Bien [6,7[	6,5	30	15
Notable [7,9[	8	50	25
Excelente [9,10[	9,5	20	10

a) Han aprobado el 85% de 200=170.

b) $mitjanaaritmètica = \frac{2{,}5\cdot 30+5{,}5\cdot 70+6{,}5\cdot 30+8\cdot 50+9{,}5\cdot 20}{200} = \frac{1245}{200} = 6{,}225$

4.

 Suceso	Elementos que componen el suceso	Número de casos favorables	Número de casos posibles	Probabilidad
Múltiplo de 2	2,4,6,8,10,12, 14,16,18,20	10	20	10/20=0,5
Múltiplo de 5	5,10,15,10,20	5	20	5/20=0,25
Múltiplo de 3	3,6,9,12,15,18	6	20	6/20=3/10=0,3
Múltiplo de 8	8,16	2	20	2/20=1/10=0,1
Número primero	2,3,5,7,11,13, 17,19	8	20	8/20=2/5= 0,4

5. a)$\frac{12}{48} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ b) $\frac{12}{48} = 0{,}25$ c)$\frac{44}{48} = \frac{11}{12} = 0{,}92$

6. Al número 7.

7.

María	Natalia	Carla	Pepa	
75%	90 %	85,7	75%	Porcentaje

Natalia es la mejor.

8. a) posible b) posible, dependiendo de la zona donde vivas c) imposible d) poco probable.

Solucionario. Autoevaluación

1a) 2b) 3b) 4c) 5d) 6a) 7d) 8b) 9b) 10a) 11b) 12 c)