

CORBES CÒNIQUES: L'EL·LIPSE

El·lipse: Corba tancada i plana els punts de la qual constitueixen un **lloc geomètric** que té la propietat que la **suma de distàncies** de cadascun dels seus punts a uns altres dos punts fixos, F i F' , anomenats **focus**, és constant i igual a $2a$ ($=AB$).

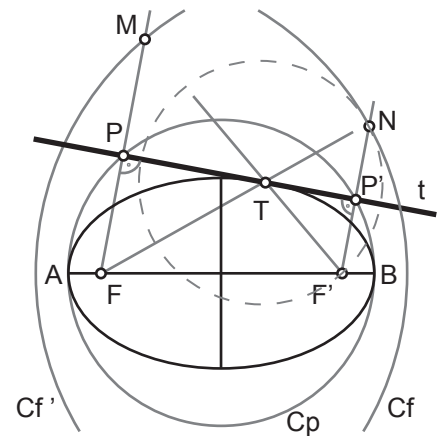
També és lloc geomètric dels centres de circumferències que passen per un focus i són tangents a la circumferència focal de l'altre focus.

La **circumferència focal** (C_f) és aquella el centre de la qual és un dels focus de l'el·lipse i el seu radi és igual a l'eix major AB . Cada el·lipse té dues C_f .

La circumferència focal d'un focus és el **lloc geomètric** dels punts simètrics de l'altre focus, respecte de les rectes tangents a l'el·lipse.

La **circumferència principal** (C_p) és aquella el centre de la qual és el centre de la corba i el radi és la meitat de l'eix major AB .

És el **lloc geomètric** dels peus de les perpendiculars traçades pels focus a cadascuna de les tangents.



1. Trazado de la tangente en un punto de la elipse (Fig 1)

La tangente a la elipse en un punt M de ella es la recta t , bisectritz exterior del ángulo que forman los radios vectores MF y MF' . La normal a la elipse en M es la perpendicular n a la tangente t . En la figura no se construye la elipse que está definida por los ejes AB y CD .

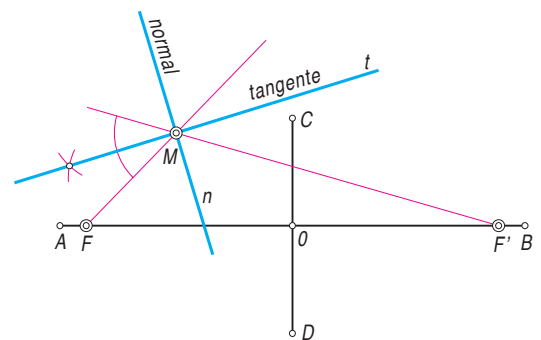


Fig 1

2. Tangentes a la elipse des de un punto exterior P (Fig 2)

La elipse està dada per el eix major AB i els focus F i F' .

Sabient que la circumferència focal és el lloc geomètric de los punts simètrics del otro foco respecto de las tangentes, tenemos que buscar un punto en ella que, unido con F' , resulte ser una cuerda de la circunferencia de centro P y radio PF' .

Según esto, se trazan la circumferencia focal de centro F y la de centro P y radio hasta el otro foco F' , las cuales se cortan en los puntos M y N ; se unen estos puntos con F' y se trazan las mediatrices de los segmentos $F'M$ y $F'N$, las cuales pasarán por P y serán las tangentes a la elipse. Los puntos de tangencia se obtienen al unir M y N con el foco F , que es el centro de la focal.

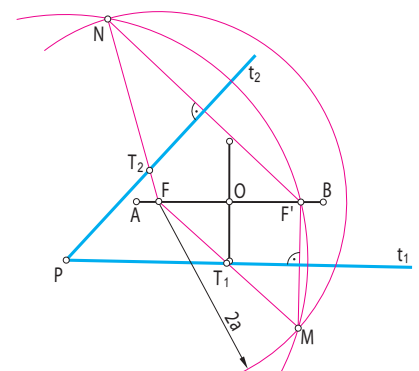


Fig 2

3. Tangentes a la elipse paralelas a una dirección dada d (Fig 3)

Si las tangentes han de ser paralelas a una dirección, el punto P de la figura anterior está en el infinito y la circunferencia de centro P y radio hasta el foco F' (que no es centro de la focal) tiene radio infinito, y se convierte en una recta que pasa por F' y es perpendicular a la dirección dada. Las mediatrices t_1 y t_2 de los segmentos $F'-M$ y $F'-N$ son las tangentes y los puntos T_1 y T_2 son los de tangencia.

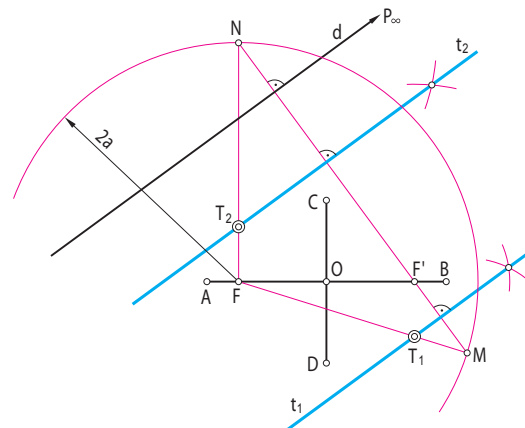


Fig 3

4. Puntos de intersección de una recta con una elipse (Fig 4)

Sean la recta r y la elipse dada por sus elementos, focos y vértices. Sabiendo que la elipse es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que son tangentes a una focal y pasan por el otro foco, el problema se reduce a hallar los centros de estas circunferencias.

En la figura se traza la focal del foco F , de radio $2a$, y se halla el simétrico $F'1$ del foco F' respecto a r ; se traza una circunferencia auxiliar cualquiera de centro O en la recta r que pase por los puntos F' y $F'1$, la cual corta a la focal en los puntos 1 y 2; la cuerda 1-2 y la recta $F'-F'1$ se cortan en el centro radical C_r ; desde C_r se trazan las tangentes a la focal y los puntos de tangencia T_1 y T_2 se unen con F , lo cual da los centros I_1 y I_2 en r , que son los puntos donde la recta r corta a la elipse y a la vez centros de circunferencias tangentes a la focal de F y que pasan por el otro foco F' .

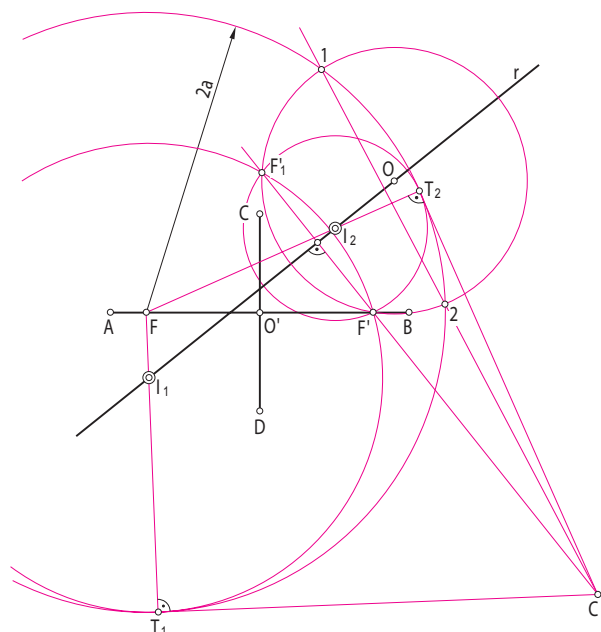


Fig 4

5. Problema: dada una elipse por una pareja de diámetros conjugados $A'B'$ y $C'D'$, hallar los ejes (Fig 5)

Por el centro O se traza la perpendicular a $A'B'$ y se lleva $OP = OA'$; se une P con C' y se traza la circunferencia de centro O_1 y diámetro PC' ; con centro en O_1 y radio O_1O se traza la semicircunferencia ROS ; uniendo O con R y S se obtienen los ejes de la elipse en posición. La magnitud de ellos es: $a = OI$ y $b = OH$, que se llevan sobre cada uno de ellos respectivamente.

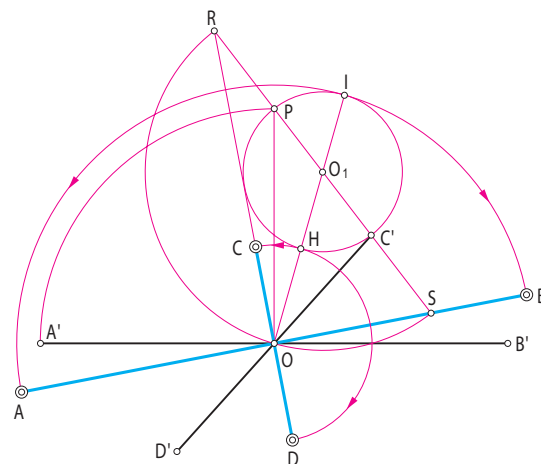


Fig 5