HOMOLOGIA I AFINITAT

1. Elementos dobles en la homología

Como puede comprobarse en la Fig. 19 la homología es una transformación de haz doble, conjunto de rectas que pasan por su centro O, ya que la recta OA coincide con OA', la OB con OB', etc., y de serie lineal doble, conjunto de puntos donde el eje e corta al haz doble anterior. Por tanto, los puntos dobles, es decir, homológicos de sí mismos, son el centro de homología O y los que pertenecen al eje e.

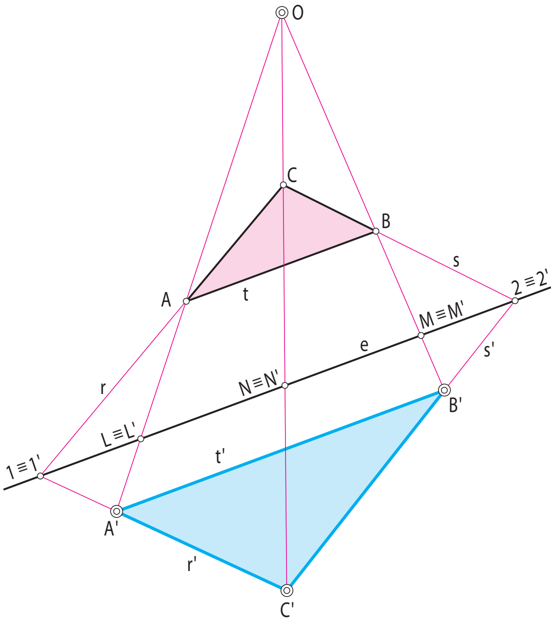

Fig. 1

En consecuencia:

- Si una recta corta al eje, su homológica también lo cortará en el mismo punto.
- Si una figura es tangente al eje, su homológica también lo será en el mismo punto.
- Si una figura no tiene puntos comunes con el eje, su homológica tampoco los tendrá.
- Si una figura pasa por el centro O, su homológica también pasará por él. Si estas figuras son curvas, serán tangentes en el citado centro.

En una homología hay, además, algunas rectas dobles, estas son: el eje, que, por lo visto anteriormente, lo es punto a punto, y las rectas que forman el haz concurrente en O, aunque sólo tienen dos puntos dobles, el propio punto O y los puntos L=L', M=M', N=N', etc., donde cortan al eje e (Fig. 1).

2. Rectas límites

En una homología se puede calcular el punto homológico de un punto impropio o del infinito.

Sea la homología de la Fig. 2 definida por su centro O, el eje e y la pareja de rectas r y r'. El homológico del punto P ∞, impropio de la recta r, debe pertenecer a r' y estar alineado con O y P∞, por lo tanto, P' es el punto de intersección con r' de la paralela a r por O.

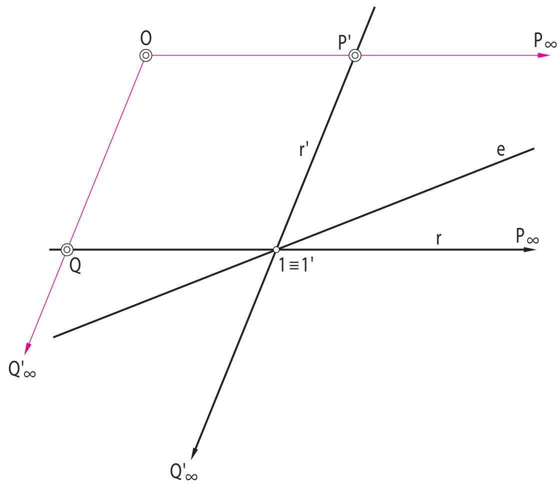

Fig. 2

Del mismo modo, el punto Q, homológico de Q'∞, punto impropio de la recta r', será la intersección con r de la paralela por O a r'.

Apliquemos lo anterior a los puntos impropios o del infinito de figuras homológicas entre sí.

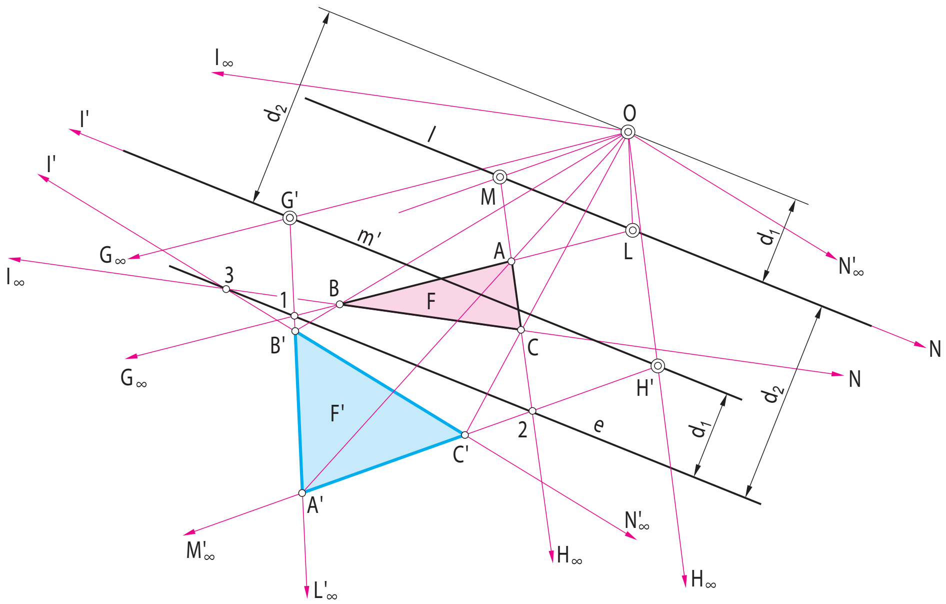

Fig. 3

Los triángulos ABC y A’B’C’ de la Fig. 3 se corresponden en una homología de centro O y eje e. Los puntos impropios asociados al primero, G∞, H∞ e I∞, tienen como homológicos, respectivamente, G’, H’ e I’, que pertenecen a una recta m’, en la que se encuentran los homológicos de todos los puntos impropios de la figura F.

Repitiendo la operación con la figura F’, triángulo A’B’C’, a la que se asocian los puntos impropios L’∞, M’∞ y N’∞, sus homológicos, L, M y N, pertenecen a la recta l, lugar geométrico de los homológicos de los puntos impropios de la figura F’.

Ambas rectas, m’ y l, se llaman rectas límites y son las homológicas de las rectas impropias asociadas, respectivamente, a las figuras F y F’, es decir, m’ es la homológica de la recta m, recta impropia asociada a F, y l lo es de l’, recta impropia asociada a F’. Esta es la razón por la que las dos rectas límites son paralelas al eje e, ya que cada una de ellas debe concurrir con su homológica en un punto de éste.

Otra propiedad importante de las rectas límites es que cada una de ellas dista del eje lo mismo que la otra del centro de homología y a la inversa. La distancia d1 de m’ al eje e es la misma que hay de l a O, pero, del mismo modo, la distancia d2 de m’ a O es la misma que hay de l al eje e. Esto es fácilmente verificable si observamos los paralelogramos OG’1L y OH’2M de la Fig. 3. En ambos casos el primer punto es el centro de homología, el segundo pertenece a m’, el tercero se halla en el eje e y el cuarto se encuentra en l.
Si, como ocurre en la Fig. 3, la recta l no corta a la figura F ni m’ corta a F’, la homológica de una figura cerrada es otra figura cerrada. Obsérvese que siguen siendo cerradas aunque l corte a F’ o, como ocurre en este caso, m’ corta a F.

Cuando una de las figuras F o F’ tiene un vértice en l o en m’, respectivamente, su homológica es una figura abierta con un punto impropio (Fig. 4).
El homológico del punto C, que pertenece a la recta límite l, es, por la definición anterior, un punto impropio. Por tanto, las rectas A’C’∞ y B’C’∞ deben cortarse en el infinito, luego son paralelas.

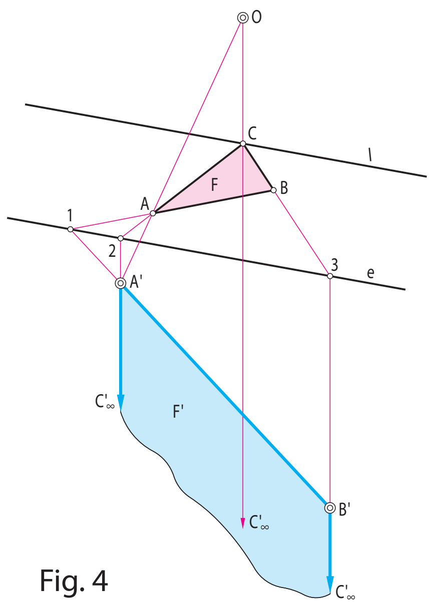

Fig. 4

En el caso de que la recta límite l sea secante a la figura F o m' lo sea a F', su figura homológica correspon- diente se compone de dos partes abiertas (Fig. 5).

Al lado AC de la figura F le corresponde el segmento A'C', que, para ir de un extremo a otro, ha de pasar por el punto impropio M'∞, homológico de M, que pertenece a la recta límite l. Del mismo modo, al lado BC, que tiene uno de sus puntos, N, en la recta l, le corresponde B'C', uno de cuyos puntos, N'∞ , es impropio. Por tanto, la figura F' resulta partida.

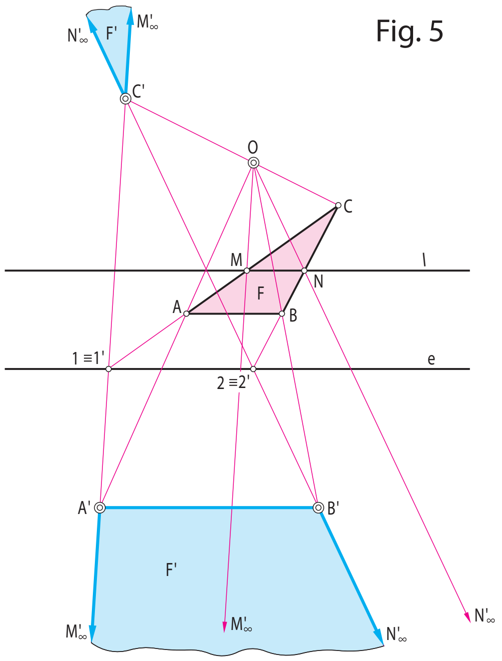

Fig. 5

3. Afinidad

Como se ha visto anteriormente, esta transformación es un caso límite de homología, cuando el centro es impropio. Por tanto, las condiciones que se deben cumplir en la afinidad son:

1a. Las parejas de puntos afines A y A', B y B', etc., se hallan sobre rectas paralelas entre sí y paralelas a una dirección determinada, llamada **dirección de afinidad** .
2a. Las parejas de rectas r y r', s y s', etc., se cortan en puntos que pertenecen a una recta fija, llamada **eje de afinidad**.

En la Fig. 6, al cuadrilátero ABCD le corresponde el A'B'C'D' en una afinidad de eje e y dirección d. Puede comprobarse que se mantienen las condiciones de una homología, excepto que el haz de rayos concurre, en este caso, en un punto impropio en la dirección d.

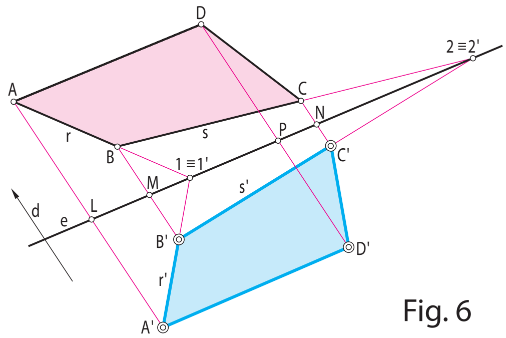

Fig. 6

En la afinidad los únicos puntos dobles son los del eje. Los afines de los puntos impropios también están en el infinito. Por esta causa, en la afinidad no se toman en consideración las rectas límites que son impropias.

Razón de afinidad

En una afinidad, la distancia de un punto al eje y la de su correspondiente afín, tomadas ambas en la recta que los une, están en una relación constante K llamada **razón de afinidad**.

Si el valor de K es positivo, una pareja de elementos afines, puntos, segmentos o figuras, se hallan en el mismo semiplano respecto del eje (Fig. 7).

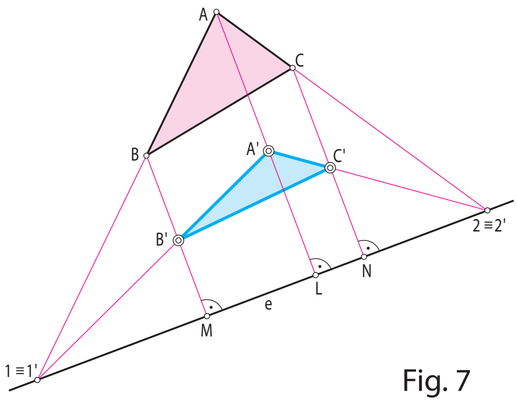

Fig. 7

Cuando el valor de K es negativo, cada elemento está situado a distinto lado de su afín respecto del eje (Fig. 6).

Aunque la dirección de afinidad y el eje pueden formar un ángulo cualquiera, en ocasiones ambos son perpendi- culares, y se dice entonces que la afinidad es **ortogonal** (Fig. 7).

Cuando en una afinidad ortogonal la razón tiene valor K = –1, se cumple:A'L = AL; B'M = BM..., y en este caso la afinidad es también una **simetría axial** cuyo eje es el de afinidad (Fig. 8).

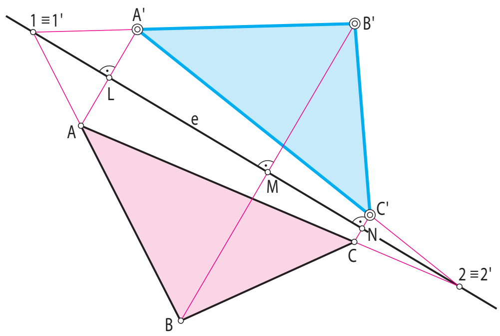

Fig. 8

4. Afinidad entre circumferencia y elipse

La relación de afinidad que puede establecerse entre una circunferencia y una elipse tiene aplicación práctica muy importante en los sistemas de representación que se basan en la proyección cilíndrica, como podrá comprobarse más adelante. Por ello, determinamos la elipse afín de una circunferencia.

Sea la afinidad definida por el eje e, la dirección d y la razón K = –3/4 y la circunferencia de centro Q de la Fig. 9.

Para calcular el centro Q' de la elipse afín del centro de la circunferencia se traza por Q la paralela a la dirección d, la cual corta al eje en el punto L. Se divide el segmento QL en cuatro partes iguales y el punto Q' se halla al lado contrario de Q respecto del eje e, por tener razón negativa, a una distancia de L de tres de esas partes.

A una pareja cualquiera de diámetros perpendiculares de la circunferencia, por ejemplo AC y BD, le corresponde una pareja de diámetros conjugados de la elipse, en este caso A'C' y B'D'. Con estos dos diámetros conjugados se puede construir la elipse.

Se puede obtener la elipse por medio de sus ejes. En la Fig. 10 se parte de los mismos datos que en la figura anterior y se determinan los ejes de la elipse afín de la circunferencia de centro Q.

Una vez determinado el centro Q' de la elipse, como se ha explicado anteriormente, se trata de calcular los puntos del eje que, al unirlos con los centros, Q y Q', de las dos curvas, den, en ambos casos, una pareja de rectas perpendiculares.

Los puntos que se buscan, 1=1' y 2=2', son los extremos del diámetro de la circunferencia que pasa por los puntos Q y Q' y tiene el centro P en el eje e. Dicho de otro modo, el segmento cuyos extremos son los puntos 1=1' y 2=2' se ha de ver desde los puntos Q y Q' bajo ángulos de 90o. Para esto se traza la mediatriz de Q-Q' que corta en P al eje.

Los diámetros perpendiculares AC y BD de la circunferencia tienen como afines, respectivamente, el eje menor A'C' y el mayor B'D' de la elipse.

En el caso de que la afinidad sea ortogonal, es decir, que la dirección de afinidad sea perpendicular al eje, caso que se da en la Fig. 11 y muy frecuente en las aplicaciones que la afinidad tiene en los sistemas de representación basados en las proyecciones cilíndricas, la pareja de diámetros de la circunferencia que se transforman en los ejes de la elipse es la que forman el paralelo, AC, al eje e, que se transforma en A'C', eje mayor de la elipse, y el perpendicular, BD, a e,al que corresponde B'D', eje menor de la curva.

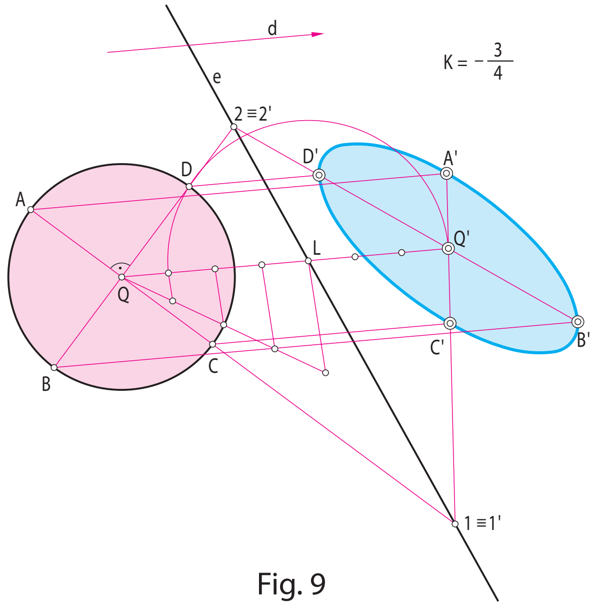

Fig. 9

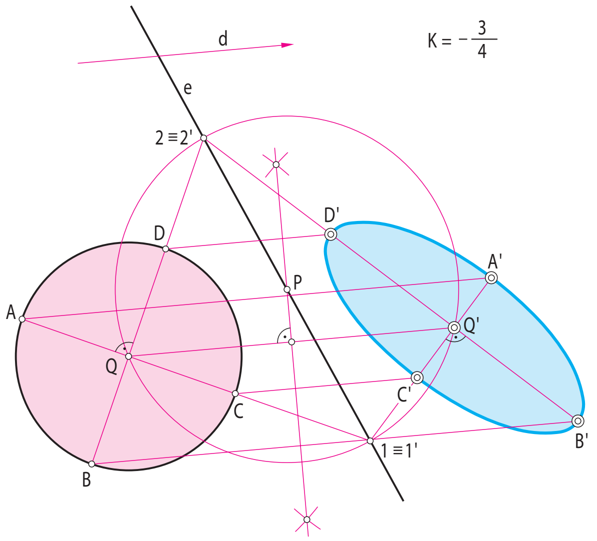

Fig. 10

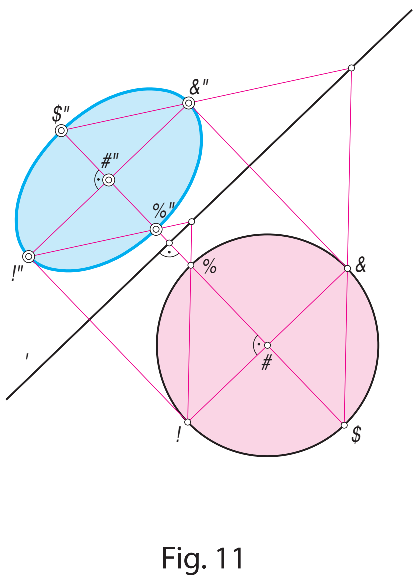

Fig. 11