SISTEMA DIÉDRICO II
Paralelismo, perpendicularidad y distancias
Verdaderas magnitudes lineales

TEMA 9

Objetivos y orientaciones metodológicas

Esta unidad temática es fundamental y, a la vez, su explicación se puede hacer de forma muy sencilla y resumida.

El alumno debe aprender la condición de paralelismo, primero entre rectas y después entre planos. Partiendo de esto se pueden resolver otros problemas de paralelismo muy sencillos.

Aplicando el teorema de las tres perpendiculares indicado en la Fig. 13 del tema, aprenderá de forma inmediata el trazado de la recta perpendicular a un plano o del plano perpendicular a una recta. Con esto, el alumno podrá resolver otros problemas sobre perpendicularidad.

El alumno aprenderá a determinar la distancia entre dos puntos, problema al que se reducen todos los problemas de distancias. Se aplicará a determinar la distancia entre punto y plano, punto y recta, planos paralelos y rectas paralelas. Esto hay que hacerlo siempre partiendo del esquema de operaciones en el espacio.

El desarrollo de esta unidad temática puede hacerse en tres clases.

PARALELISMO

1. Paralelismo entre rectas (Figs. 1, 2 y 3)

Dos rectas paralelas en el espacio se proyectan ortogonalmente sobre un plano cualquiera, según dos rectas paralelas. Por el contrario, si las proyecciones de dos rectas sobre un plano son paralelas, no quiere decir que aquéllas lo sean en el espacio. En la Fig. 1, las rectas *r* y *s* son paralelas en el espacio y se proyectan según *r'* y *s'*, que son paralelas; sin embargo, las rectas *s* y *t* se proyectan según dos rectas paralelas *s'* y *t'* y ellas no son paralelas en el espacio; esto se debe a que están situadas en planos proyectantes paralelos.

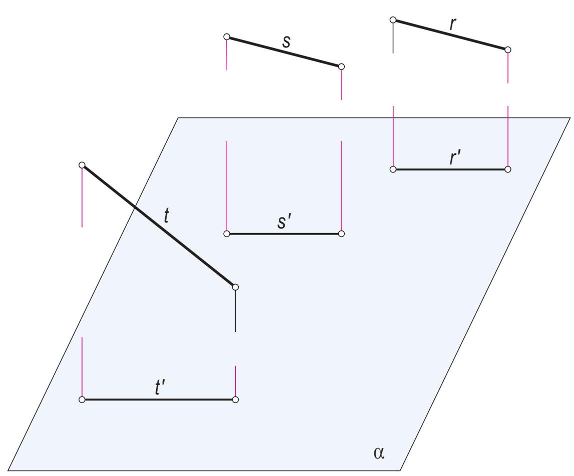
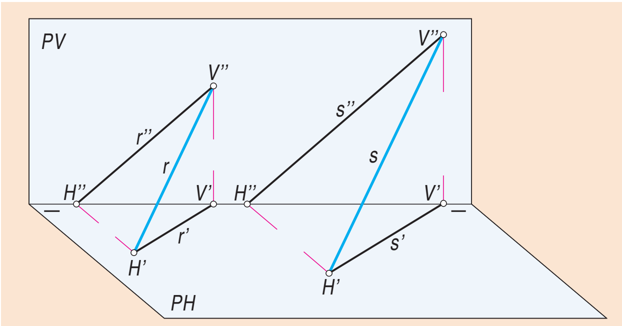


Fig. 1.



solución en el espacio

Fig. 2.

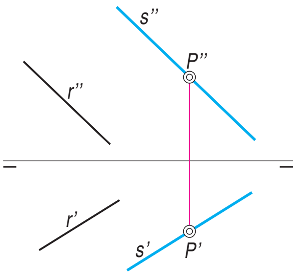


Fig. 3.

La condición necesaria y suficiente para deducir que dos rectas son paralelas en el espacio es que sus proyecciones sobre los dos planos *H* y *V* sean paralelas (salvo en el caso de rectas de perfil).

En la Fig. 2, las rectas *r* y *s* son paralelas y sus proyecciones del mismo nombre también lo son, es decir, *r'* y *s'* son paralelas y *r''* y *s''* también.

El problema que se presenta en la práctica es el siguiente: dada una recta *r'*-*r''*, trazar por un punto *P'*-*P''* dado la recta *s'*-*s''* paralela a ella (Fig. 3). El problema se resuelve de forma inmediata: por *P'* se traza *s'*, paralela a *r'*, y por *P''* se traza *s''*, paralela a *r''*.

Si la recta es de perfil, para trazar la paralela a ella por un punto, hay que pasar la recta y el punto a tercera proyección y trazar la paralela en esta proyección, y devolver luego esta recta a las proyecciones del punto.

2. Paralelismo entre planos (Figs. 4, 5 y 6)

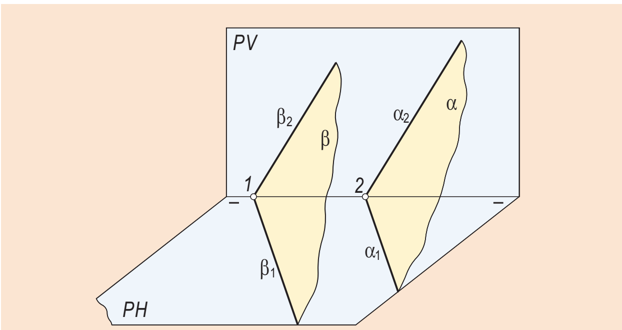
Al cortar a dos planos paralelos por un tercer plano, las intersecciones son dos rectas paralelas (Fig. 4). Si el plano secante es el plano *H*, las intersecciones son las trazas horizontales α_1 y β_1, que resultan paralelas. Por el mismo razonamiento, las trazas verticales α_2 y β_2 de los planos también resultan paralelas.

En la Fig. 5, ya en proyecciones, los planos $\alpha(\alpha_1$-$\alpha_2)$ y $\beta(\beta_1$-$\beta_2)$ son paralelos, por tener paralelas las trazas del mismo nombre.

El problema que se presenta, normalmente, en la práctica es trazar por un punto el plano paralelo a otro dado. Este problema, como en el caso de rectas, constituye una operación simple y elemental, y se resuelve en la Fig. 6.

Recordemos que las horizontales de plano tienen su proyección horizontal paralela a la traza horizontal del plano; según esto, por el punto dado *P'*-*P''*, se traza la horizontal *h'*-*h''*, siendo *h'* paralela a β_1; la traza vertical de la recta *h* es el punto *V''* y por éste pasa la traza α_2, paralela a β_2. La traza horizontal α_1 pasa por el punto *N* de *L.T.* y es paralela a β_1.

Igualmente, se puede trazar por *P'*-*P''* la frontal *f'*-*f''*, siendo *f''* paralela a β_2, y por la traza horizontal H'_1 de ella hacer pasar la traza α_1, paralela a β_1.



solución en el espacio

Fig. 4.

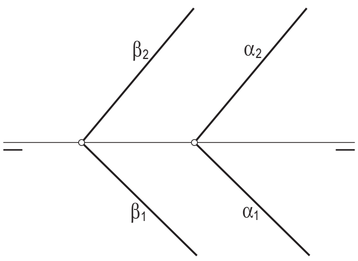


Fig. 5.

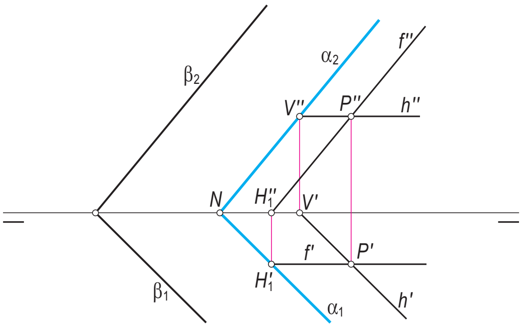


Fig. 6.

3. Problema (Fig. 7)

Dado un plano paralelo al primer bisector y por encima de él, trazar por un punto del segundo octante el plano paralelo al dado.

El plano paralelo al primer bisector es el α_1-α_2, paralelo a *L.T.* y de trazas confundidas. El punto dado es el *A'*-*A''*. Se pasa el plano a tercera proyección, según la recta α y el punto dado, cuya tercera proyección es A_1. Por A_1 se traza el plano β, paralelo a α, y se obtienen las trazas β_1 y β_2 del plano paralelo al dado y que aparecen también confundidas en una sola.

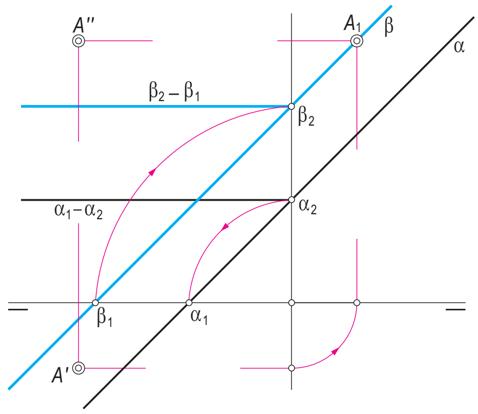


Fig. 7.

4. Paralelismo entre recta y plano (Figs. 8 y 9)

Una recta y un plano son paralelos cuando la recta es paralela, al menos, a una recta contenida en el plano.

En la Fig. 8 del espacio, la recta *s(s'-s'')* es paralela al plano α_1-α_2 por ser paralela a una recta *r(r'-r'')* de dicho plano.

El problema que se presentará en la práctica será el de trazar una recta paralela a un plano dado. Decimos una recta pues, si no cumple la recta otra condición, hay infinitas soluciones. El conjunto de las rectas paralelas a un plano y que pasan por un punto forman el plano paralelo al dado por dicho punto.

En la Fig. 9 tenemos el plano α_1-α_2; se toma una recta cualquiera *r'*-*r''* de él y la recta *s'*-*s''*, paralela a ella por el punto *P'*-*P''*, es paralela al plano α.

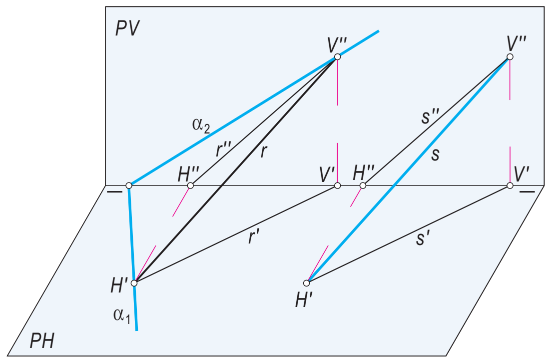


Fig. 8.

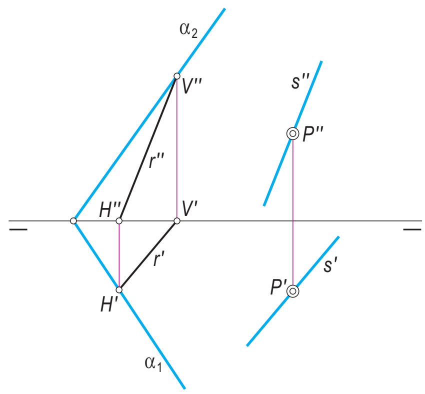


Fig. 9.

5. Problema: por una recta dada, trazar el plano paralelo a otra recta conocida (Fig. 10)

Sea la recta *r(r'-r'')* y hay que hacer pasar por ella el plano α que sea paralelo a otra recta *s(s'-s'')*. Se toma un punto *A(A'-A'')* de la recta *r* y se traza por él la recta $s_1(s'_1$-$s''_1)$, paralela a la *s*. El plano definido por las rectas *r* y s_1 es el $\alpha(\alpha_1$-$\alpha_2)$, cuyas trazas pasan por las trazas del mismo nombre de las rectas *r'*-*r''* y s'_1-s''_1.

Ejemplo para resolver.

Por una recta con el segmento entre trazas en el primer diedro, hacer pasar el plano paralelo a otra recta contenida en el segundo bisector.

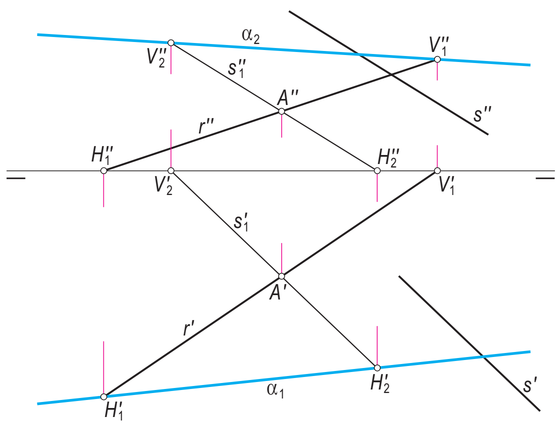


Fig. 10.

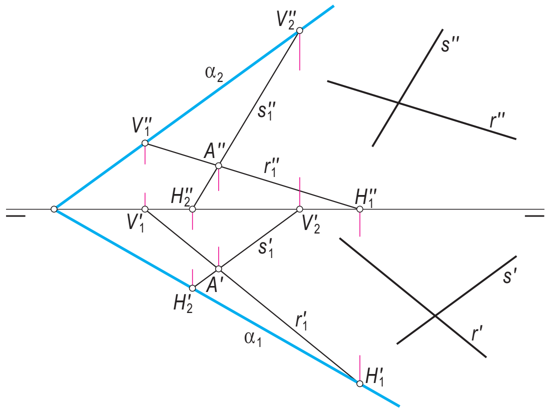


Fig. 11.

6. Problema: por un punto dado *A*, hacer pasar el plano paralelo a dos rectas *r* y *s* no coplanarias (Fig. 11)

Por el punto *A(A'-A'')* se trazan las rectas r'_1-r''_1 y s'_1-s''_1, paralelas a las *r* y *s*, respectivamente. El plano $\alpha(\alpha_1$-$\alpha_2)$, definido por las rectas r_1 y s_1, es el único plano que pasando por *A* es paralelo a las rectas dadas.

PERPENDICULARIDAD

7. Recta perpendicular a un plano (Figs. 12, 13 y 14)

La geometría del espacio nos enseña que una recta es perpendicular a un plano cuando la recta es perpendicular a dos rectas del plano que pasen por su pie. Como este enunciado no tiene aplicación práctica en geometría descriptiva, enunciamos el llamado **teorema de las tres perpendiculares**, en el cual se fundan todos los problemas de perpendicularidad. Dice así:

"Si dos rectas r *y* s *son perpendiculares en el espacio y una de ellas, la* s*, es paralela a un plano* β*, sobre el que se proyectan, las proyecciones de ambas son dos rectas* r' *y* s' *perpendiculares"* (Fig. 12).

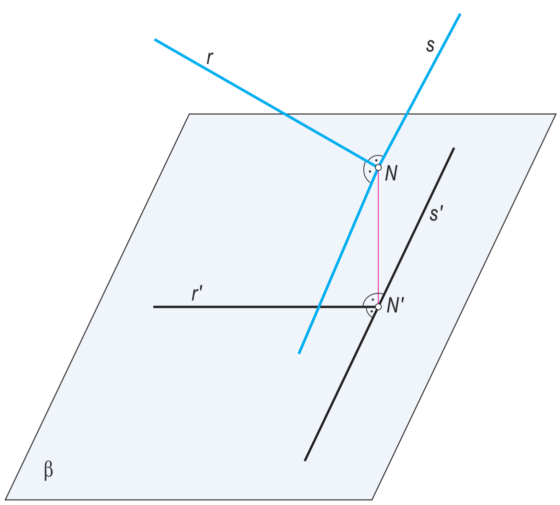


Fig. 12.

Por la aplicación inmediata que tiene en geometría descriptiva, enunciamos el siguiente teorema:

"Si una recta r *es perpendicular a un plano* α*, la proyección* r' *de la recta sobre un plano (por ejemplo, el plano* H*) y la intersección del plano con el de proyección, traza* α_1*, son dos rectas perpendiculares"* (Fig. 13).

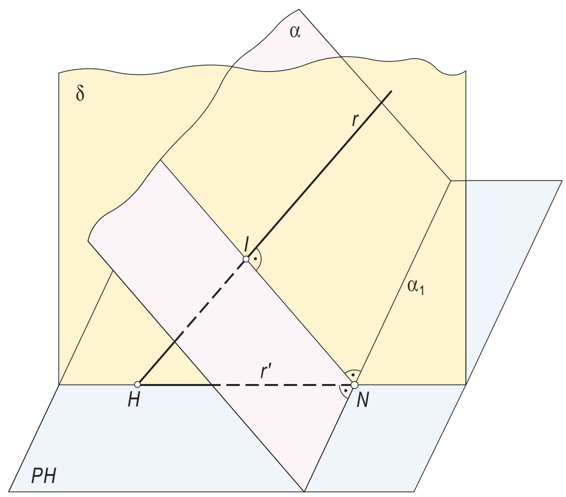


Fig. 13.

Como puede deducir el lector, es esta otra forma de enunciar el teorema de las tres perpendiculares, ya que las rectas *r* y α_1 son perpendiculares y una de ellas, α_1, no sólo es paralela al plano de proyección, sino que pertenece a él. La recta *r'* es la traza, con el horizontal, del plano δ, proyectante de la recta *r* y perpendicular a los planos α y *H*.

Generalizando el enunciado para cualquier plano, por ejemplo, el plano *V*, veamos cómo se traza la **recta perpendicular a un plano por un punto *P* conocido**.

Sean el plano de trazas α_1-α_2 y un punto cualquiera *P(P'-P'')*, que puede incluso pertenecer al plano (Fig. 14). Por cada proyección del punto se traza la recta perpendicular a la traza del mismo nombre del plano, así, por *P'* perpendicular a α_1 y por *P''*, perpendicular a α_2. La recta *r'-r''* es la solución única.

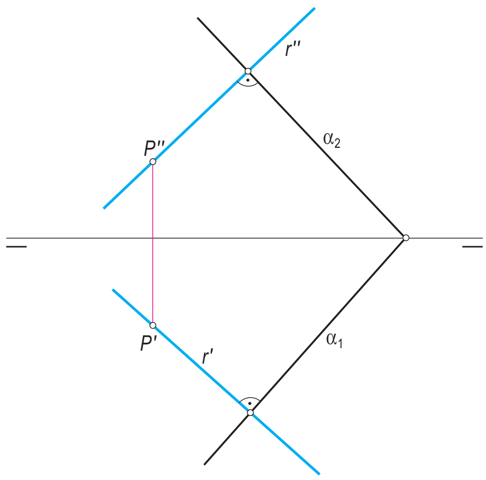


Fig. 14.

8. Problema: trazar la recta perpendicular a un plano que está definido por dos rectas cualesquiera (Fig. 15)

El plano dado está definido por las rectas *r(r'-r'')* y *s(s'-s'')*. El plano α_2, paralelo al *H*, corta al anterior según la horizontal *h'-h''*, que pasa por los puntos *1(1'-1'')* y *2(2'-2'')*. La proyección horizontal de la recta buscada es *t'*, perpendicular por *P'* a *h'*.

El plano β_1, paralelo al *V*, corta al dado según la frontal *f'-f''*, que pasa por los puntos *3(3'-3'')* y *4(4'-4'')*. La proyección vertical *t''* es perpendicular a *f''*, trazada por *P''*. La recta *t(t'-t'')* es la pedida.

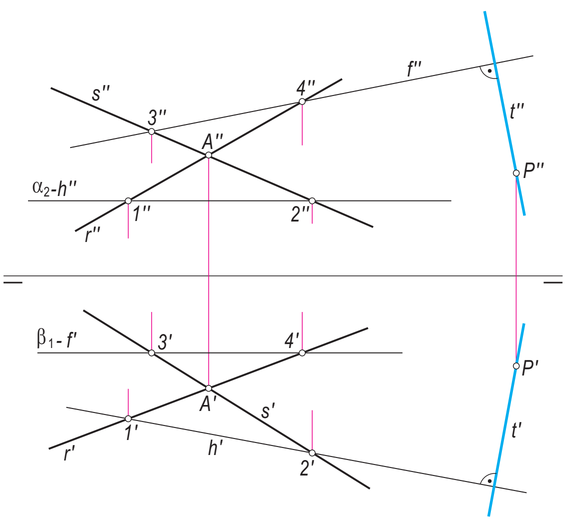


Fig. 15.

9. Plano perpendicular a una recta (Fig. 16)

Tenemos la recta *r'-r''* y hay que trazar el plano α_1-α_2, perpendicular a ella por el punto *P'-P''*. De antemano, por el teorema enunciado, se sabe que las trazas serán perpendiculares a las proyecciones del mismo nombre de la recta. Según esto, por el punto *P'-P''* se hace pasar una recta del plano que se busca, de la cual sabemos la dirección; esta recta es la horizontal *h'-h''*; *h''* pasa por *P''* y es paralela a *L.T.* y *h'* pasa por *P'* y es perpendicular a *r'*; se halla su traza vertical *V''* y por este punto pasa la traza α_2, perpendicular a *r''*; la traza α_1 pasa por el punto *N* y es perpendicular a *r'*.

Igualmente se puede operar con la recta frontal *f'-f''*, siendo *f''* perpendicular a *r''*.

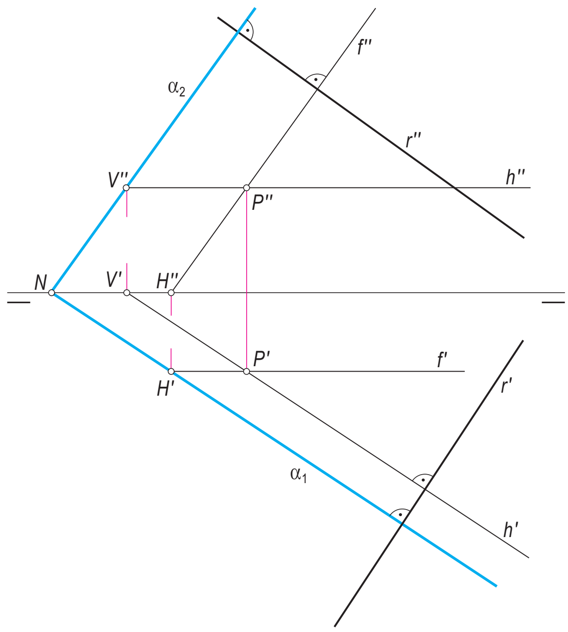


Fig. 16.

10. Rectas perpendiculares entre sí

Dos rectas perpendiculares en el espacio se proyectan sobre un plano, generalmente según dos rectas oblicuas. Tan sólo en el caso de que una de ellas sea paralela al plano de proyección, se proyectan según dos rectas perpendiculares. Quiere decir esto que **con la sola inspección de las proyecciones de dos rectas que se cortan no se puede saber si son o no perpendiculares en el espacio.**

Resolveremos el problema de trazar por un punto *P* la recta *s*, perpendicular a otra *r* dada que la corte. Se hace pasar por *P* el plano perpendicular a la recta *r*, problema ya resuelto; se determina el punto de intersección de ambos y este punto de intersección, unido con el *P*, nos da la perpendicular pedida. (Véase el apartado 16, "Distancia de un punto a una recta".)

Según lo anterior, no hay condición de perpendicularidad entre rectas.

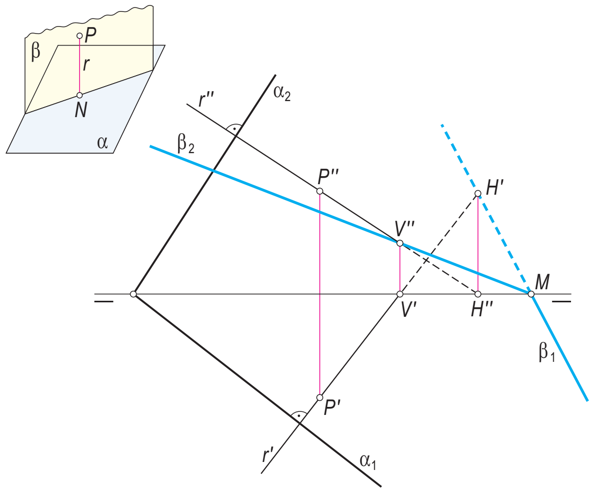


Fig. 17.

11. Planos perpendiculares entre sí (Fig. 17)

Dos planos son perpendiculares cuando uno de ellos contiene, al menos, una recta que es perpendicular al otro. En la parte superior izquierda de la figura, se indica en esquema la forma de trazar, por un punto *P*, un plano β perpendicular a otro plano α dado. Se traza por *P* la recta *r* perpendicular al plano α y cualquier plano que pase por la recta *r* será perpendicular al dado. El problema, sin más condiciones, tiene infinitas soluciones.

En el sistema diédrico (Fig. 17), dados el plano α_1-α_2 y el punto *P'*-*P''*, se traza la recta *r'*-*r''*, perpendicular por *P* al plano α; las trazas de esta recta son los puntos *H'* y *V''* y para trazar un plano cualquiera que pase por la recta *r*, basta tomar un punto *M* en *L.T.* y unirlo con *H'* y *V''*. Un plano solución es el β_1-β_2.

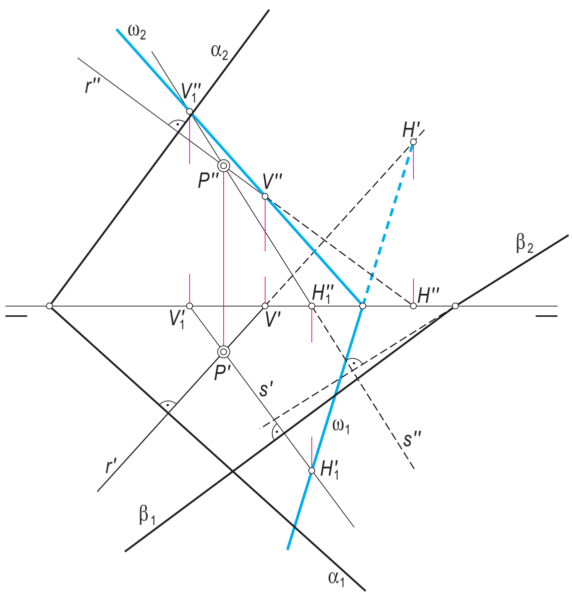


Fig. 18.

12. Problema: por un punto *P'-P''*, trazar el plano perpendicular a otros dos planos dados α y β (Fig. 18)

Por el punto *P(P'-P'')* se trazan las rectas *r(r'-r'')* y *s(s'-s'')* perpendiculares a los dos planos dados $\alpha(\alpha_1$-$\alpha_2)$ y $\beta(\beta_1$-$\beta_2)$, respectivamente. El plano ω_1-ω_2 definido por estas dos rectas es perpendicular a los anteriores, según hemos indicado en la pregunta anterior.

Las trazas verticales de las rectas son *V''* y V_1'', por donde pasa ω_2, y las horizontales *H'* y H_1', que definen la traza ω_1.

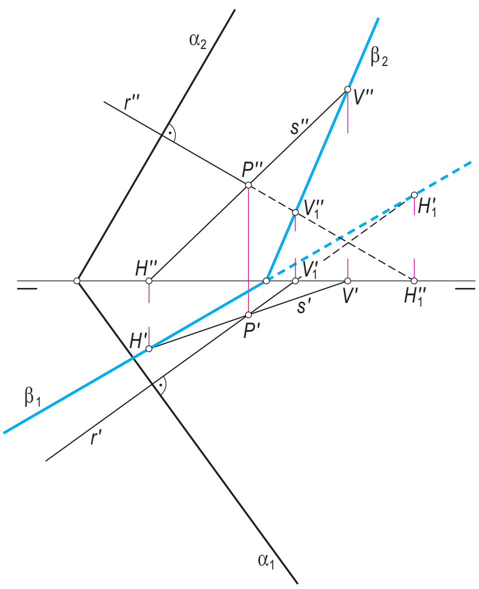


Fig. 19.

13. Problema: por una recta *s*, hacer pasar el plano perpendicular a otro plano dado α (Fig. 19)

Sean el plano α_1-α_2 y la recta *s'*-*s''*; por esta recta sólo pasa un plano que sea perpendicular al dado. Para determinarlo, se toma un punto *P'*-*P''* de la recta *s* y por él se traza la perpendicular *r'*-*r''* al plano α. Las rectas *r* y *s* definen al plano β_1-β_2, que es la solución y cuyas trazas pasan, la β_1 por *H'* y H_1' y la β_2, por *V''* y V_1''.

DISTANCIAS

VERDADERAS MAGNITUDES LINEALES

14. Distancia entre dos puntos (Figs. 20, 21 y 22)

Tenemos en el espacio los puntos A y B (Fig. 20); sus proyecciones A' y B' sobre el plano H determinan la proyección horizontal d' de la distancia D. Por el punto B se traza la paralela a d' y se forma el triángulo rectángulo B-A_1-A, cuyos catetos son la proyección horizontal d' del segmento $\overline{AB}$ y la diferencia de cotas $h = \overline{A\text{-}A_1}$ de los puntos A y B respecto al plano H.

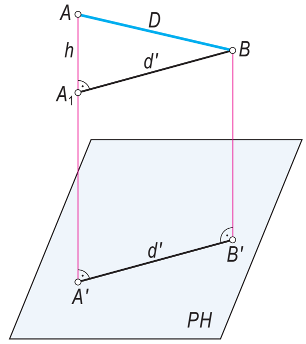


Fig. 20.

En el sistema diédrico (Fig. 21), las proyecciones de los puntos son A'-A'' y B'-B'' y la distancia es d'-d''. Por A' se traza la perpendicular a d' y sobre ella se lleva la diferencia de cotas $h = A'N$. El segmento $\overline{B'N}$ es D, verdadera magnitud de la distancia en el espacio.

También se puede tomar como cateto la proyección vertical d'' y como el otro cateto, la diferencia de los alejamientos de los dos puntos.

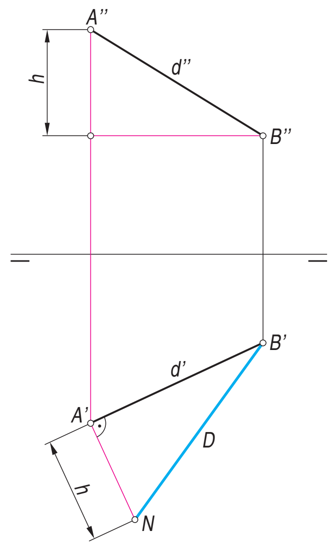


Fig. 21.

Si los puntos están en distinto diedro, hay que considerar las cotas y los alejamientos con los dos signos (Fig. 22). El punto B'-B'' es del primer diedro y el punto A'-A'' es del tercer diedro. La cota de B es positiva y la de A es negativa, por lo que la diferencia de cotas se transforma en una suma, es decir, en el segmento h. En este caso, la distancia es el segmento $D = \overline{B'N}$.

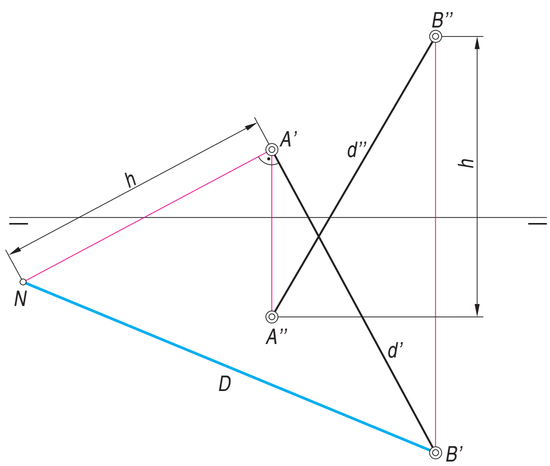


Fig. 22.

15. Distancia de un punto a un plano (Fig. 23)

En la parte superior de la figura se indica el procedimiento general que se ha de seguir. La distancia *D* de un punto *P* a un plano α se determina trazando la perpendicular *r* por el punto *P* al plano; se halla el punto de intersección *I* de la recta y el plano, y el segmento $\overline{P\text{-}I}$ es la distancia pedida.

En el sistema diédrico, parte inferior de la Fig. 23, sean el punto *P'-P''* y el plano α_1-α_2; la recta perpendicular por *P* al plano es *r'-r''*. El punto de intersección *I'-I''* se determina empleando el proyectante vertical β_1-β_2 de la recta, que corta al plano α según la recta *i'-i''* y ésta encuentra a la *r* en *I'-I''*. La distancia *P-I* tiene por proyecciones *d'-d''* y la verdadera magnitud es el segmento $\overline{P'\text{-}I_0} = D$, obtenido como en el párrafo anterior.

16. Distancia de un punto a una recta (Fig. 24)

En la parte superior de la figura se indica el procedimiento general que se ha de seguir. Sean el punto *P* y la recta *r*. Por el punto se traza el plano α perpendicular a *r*, a la que corta en el punto *I*. El segmento $\overline{I\text{-}P}$ es la distancia *D*, en verdadera magnitud, del punto a la recta.

Estas operaciones se resuelven en diédrico en la parte inferior de la figura.

Por *P(P'-P'')* se traza el plano $\alpha(\alpha_1$-$\alpha_2)$, perpendicular a *r(r'-r'')*, por medio de la horizontal *h'-h''*, siendo *h'* perpendicular a *r'*. El plano α corta a la recta en *I(I'-I'')*, que se obtiene empleando el proyectante vertical de la recta, β_1-β_2, siendo *i'-i''* la intersección de ambos planos y ésta corta a *r* en el punto *I'-I''*. La distancia *IP* tiene por proyecciones *d'-d''* y la verdadera magnitud es *D*.

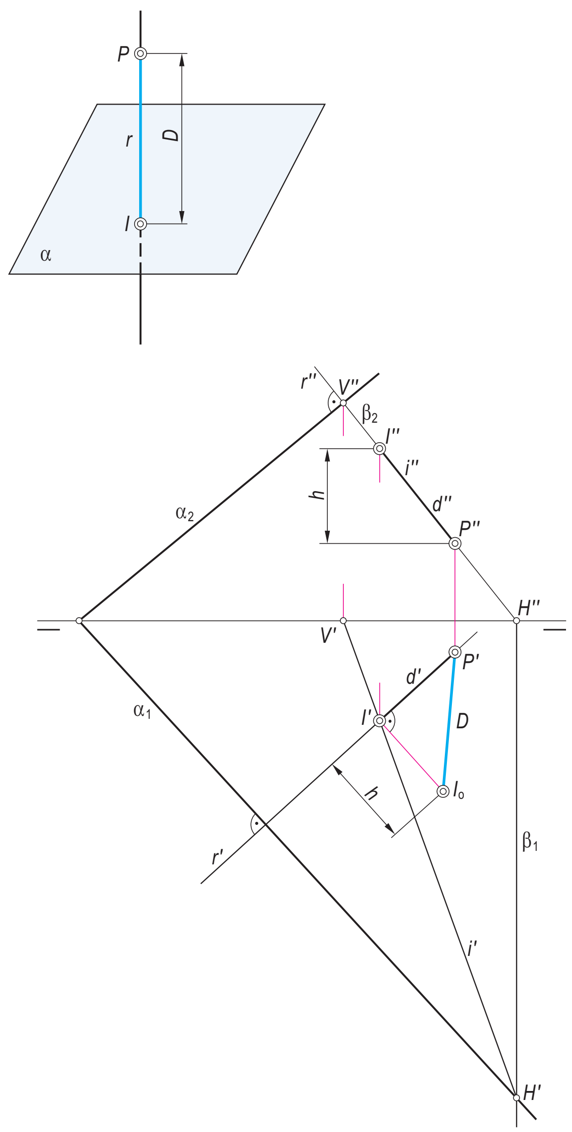


Fig. 23.

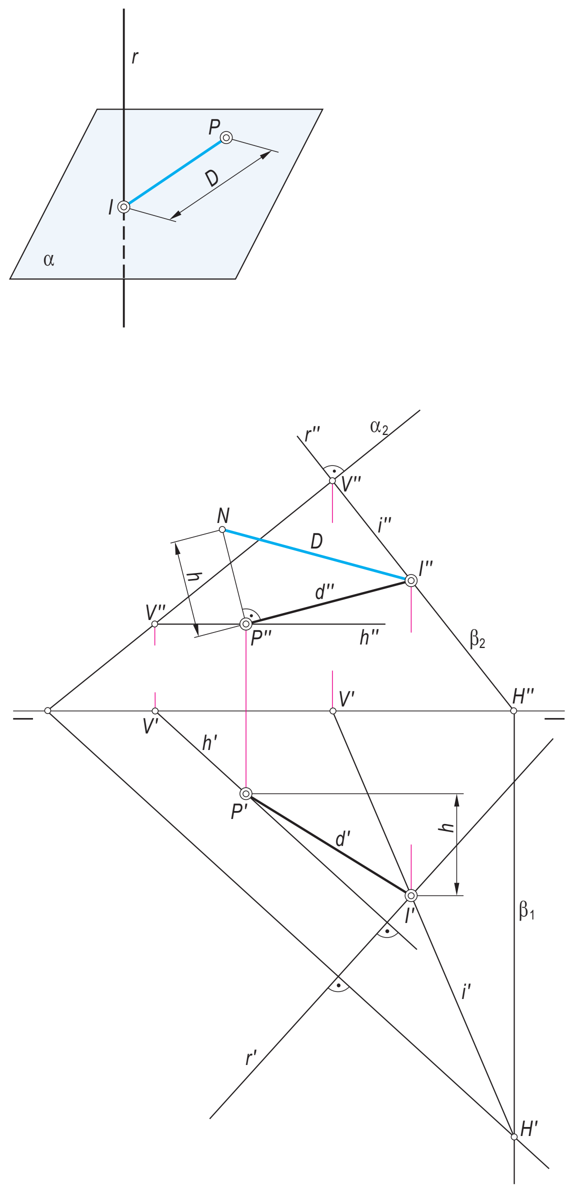


Fig. 24.

17. Distancia entre dos rectas paralelas (Fig. 25)

La distancia D entre dos rectas paralelas r y s (parte superior de la figura) se determina trazando un plano α perpendicular a ellas y hallando los puntos I_1 e I de intersección con ambas.

En diédrico tenemos dos rectas $r(r'\text{-}r'')$ y $s(s'\text{-}s'')$, paralelas; el plano $\alpha(\alpha_1\text{-}\alpha_2)$ citado es perpendicular a las dos rectas. La recta r corta al plano en $I_1'\text{-}I_1''$, obtenido por medio del auxiliar proyectante $\beta_1\text{-}\beta_2$ y cuya intersección con el α es la recta $i_1'\text{-}i_1''$. La recta s corta al plano α en $I'\text{-}I''$, que se ha obtenido por mediación del plano proyectante $\varepsilon_1\text{-}\varepsilon_2$ y cuya intersección con el α es la recta $i'\text{-}i''$. El segmento $d'\text{-}d''$ es la distancia en proyecciones y D la verdadera magnitud.

18. Distancia entre dos planos paralelos (Fig. 26)

En la parte superior de la figura se indica el procedimiento general que se ha de seguir. Se traza una recta r perpendicular a los planos y se hallan los puntos de intersección de ella con los planos dados. La distancia es el segmento $\overline{I\text{-}I_1}$.

En el sistema diédrico, los dos planos son $\alpha(\alpha_1\text{-}\alpha_2)$ y $\beta(\beta_1\text{-}\beta_2)$. Se traza una recta $r(r'\text{-}r'')$ perpendicular a ambos; esta recta corta al plano α en el punto $I'\text{-}I''$, empleando el proyectante vertical $\omega_1\text{-}\omega_2$ de la recta, y al plano β lo corta en el punto $I_1'\text{-}I_1''$. La proyección de la distancia es $d'\text{-}d''$ y D la verdadera magnitud.

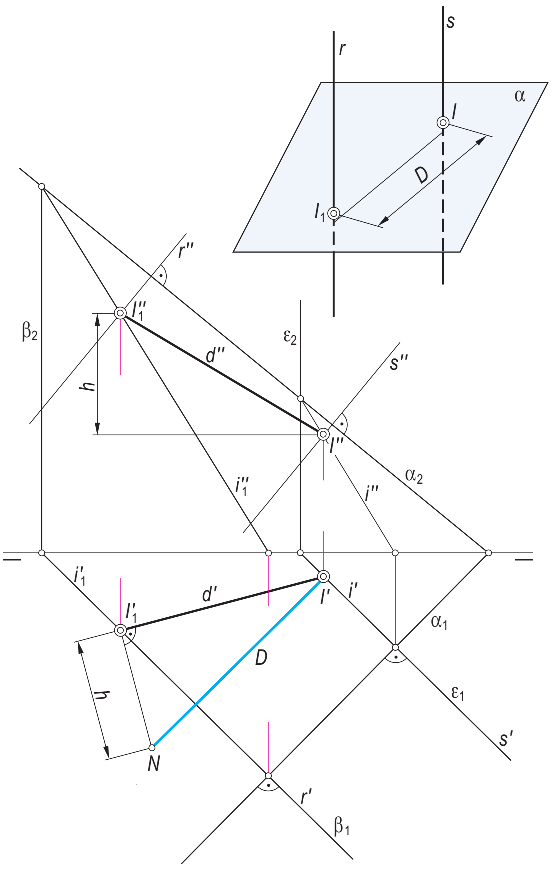


Fig. 25.

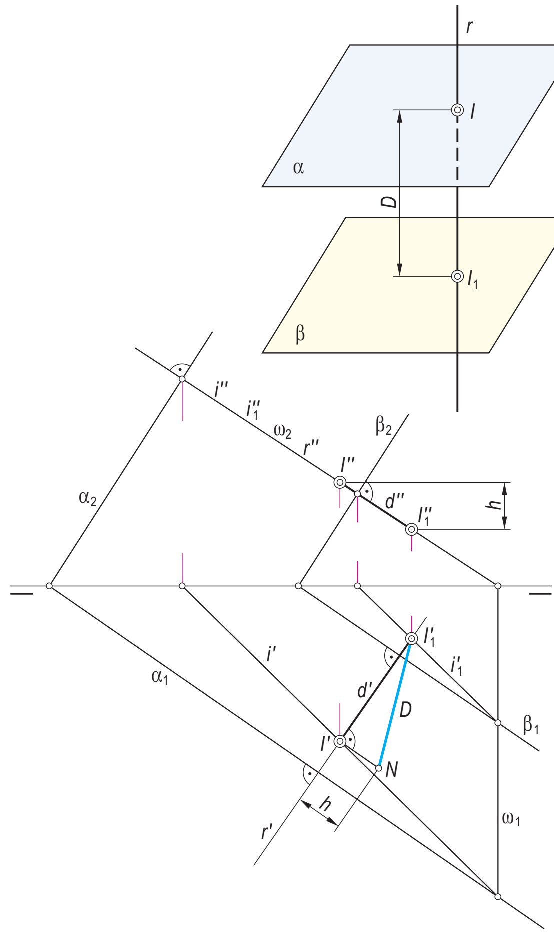


Fig. 26.

19. Repaso de los conocimientos más necesarios de la geometría del espacio

- Una recta es paralela a un plano cuando lo es a una recta de dicho plano.
- Si cortamos dos planos paralelos por un tercero, las intersecciones son dos rectas paralelas.
- Si un plano corta a una recta, corta también a cualquier recta paralela a ella.
- Dadas dos rectas paralelas, todo plano que contenga o sea paralelo a una de ellas contiene o es paralelo a la otra.
- Dos planos paralelos a una recta se cortan según una recta paralela a aquélla.
- Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.
- Dados dos planos paralelos, toda recta paralela o contenida en uno de ellos es paralela o está contenida en el otro.
- Dos planos paralelos a un tercero son paralelos entre sí.
- Por un punto exterior a un plano sólo pasa un plano paralelo a él.

- El lugar geométrico de las rectas paralelas a un plano que pasan por un punto es el plano paralelo al primero que pasa por dicho punto. Según esto, para trazar por un punto el plano paralelo a otro, basta trazar por el punto dos rectas cualesquiera que sean paralelas al plano dado.
- Una recta es perpendicular a un plano cuando es perpendicular a dos rectas del plano que pasan por su pie.
- Si una recta es perpendicular a un plano, lo es a todas las rectas del plano.
- Si dos rectas son paralelas, todo plano perpendicular a una de ellas lo es también a la otra.
- Si dos planos son paralelos, toda recta perpendicular a uno lo es también al otro.
- Según esto, dos planos perpendiculares a una misma recta son paralelos y dos rectas perpendiculares a un mismo plano son paralelas.
- Si una recta es perpendicular a un plano, toda recta perpendicular a ella es paralela al plano o está contenida en él.

ACTIVIDADES

1. Por un punto del segundo diedro trazar la recta paralela a una recta de perfil dada por sus trazas.
2. Por un punto dado trazar el plano paralelo a un plano proyectante horizontal. Idem, a un plano proyectante vertical.
3. Por un punto dado, trazar el plano paralelo a un plano paralelo a la *L.T.*
4. Por un punto del primer diedro trazar el plano perpendicular:
   1º. A una recta vertical.
   2º. A una recta perpendicular al plano vertical.
   3º. A una recta horizontal.
   4º. A una recta frontal.
   5º. A una recta de perfil que corta a la *L.T.*
   6º. A una recta de perfil que es perpendicular al primer bisector.
5. Por un punto del primer diedro trazar la recta perpendicular:
   1º. A un plano frontal.
   2º. A un plano horizontal.
   3º. A un plano paralelo a la *L.T.*
   4º. A un plano proyectante horizontal.
   5º. A un plano proyectante vertical.
   6º. A un plano perpendicular al segundo bisector.
6. Dados dos planos, uno pasa por la *L.T.* y un punto del primer diedro, el otro es perpendicular al segundo bisector, y dado también otro punto del primer diedro, trazar por este punto el plano que sea perpendicular a los otros dos.
7. Los puntos *A(–6,2,1)* y *B(–6,–2,6)* definen una recta. Se pide:
   1º. Representar por sus trazas el plano paralelo a *L.T.* que pasa por ella.
   2º. Trazar un plano paralelo a éste por el punto *P (6,4,7)*.
   3º. Representar por sus trazas el plano definido por la recta *AB* y el punto *C(2,1,–2)*.
   4º. Trazar el plano paralelo a éste por el punto *D(0,2,2)*.
8. Por la *L.T.* trazar el plano perpendicular a un plano oblicuo dado.
9. Hallar la distancia en proyecciones y verdadera magnitud que hay entre un punto dado del primer diedro y un plano perpendicular al segundo bisector.
10. Hallar la distancia de un punto del segundo diedro a un plano paralelo a *L.T.* y con la porción entre trazas en el cuarto diedro.
11. Hallar la verdadera magnitud de la distancia de un punto del segundo diedro a una recta que está contenida en el primer bisector.
12. Hallar los puntos de la *L.T.* que disten 6 unidades del punto *P(3-4)*.
13. Hallar la verdadera magnitud de un segmento de una recta de perfil limitado por sus trazas y definida por:
    1º. Sus trazas.
    2º. Dos de sus puntos.
    3º. Uno de sus puntos y el ángulo que forma con uno de los planos de proyección.
    4º. Uno de sus puntos y la distancia de esta recta a *L.T.*
14. Hallar la distancia de un punto a un plano si:
    1º. El plano es paralelo a *L.T.*
    2º. El plano está determinado por *L.T.* y un punto.
    3º. El plano tiene sus dos trazas en línea recta.
15. Hallar la distancia de un punto dado:
    1º. A la *L.T.*
    2º. A una paralela a *L.T.*
    3º. A una recta situada en el plano vertical.
    4º. A una horizontal cualquiera.