

SISTEMA DIÉDRICO I

Representación del punto, la recta y el plano

TEMA 12

Objetivos y orientaciones metodológicas

En esta unidad temática el alumno debe aprender a representar los tres elementos geométricos, punto, recta y plano, en las posiciones más sencillas y favorables respecto a los planos de proyección.

En cuanto al “punto”, debe distinguir los conceptos de “cota” y “alejamiento” teniendo en cuenta sus signos y saber hallar las proyecciones de un punto cualquiera del espacio.

En cuanto a la “recta”, debe saber poner un punto en ella, como primera operación de la geometría descriptiva, conocer lo que son las trazas de una recta y la forma de hallarlas y saber, a la vista de las proyecciones de dos rectas, si éstas se cortan o se cruzan. Finalmente se hará un estudio detallado de las proyecciones de una recta en diversas posiciones, **dedicando especial atención a las rectas de perfil** y a la forma de pasarlas a tercera proyección.

En lo referente al plano, saber lo que son sus trazas, situar primero una recta y luego un punto en un plano. A continuación debe aprender a situar en un plano una recta horizontal, una frontal, una línea de máxima pendiente y una de máxima inclinación. Finalmente debe saber representar planos en diversas posiciones, fijando especial atención en los planos proyectantes, horizontal y vertical.

La determinación de las proyecciones de una figura plana será el resumen final de la representación de los tres elementos geométricos.

Las actividades se centrarán en representar los tres elementos geométricos.

Esta unidad temática abarcará un mínimo de cuatro clases.

1. Fundamentos del sistema diédrico

El sistema diédrico es un sistema de proyecciones cilíndricas ortogonales. Está constituido por dos planos perpendiculares y sobre cada uno de ellos se hallan las proyecciones ortogonales del cuerpo o figura que se desea representar (Fig. 1).

Uno de los planos es **horizontal** y lo designaremos por **plano H o PH**. El otro plano es **vertical**, por ser paralelo a la dirección de la plomada; al que designaremos por **plano V o bien PV**.

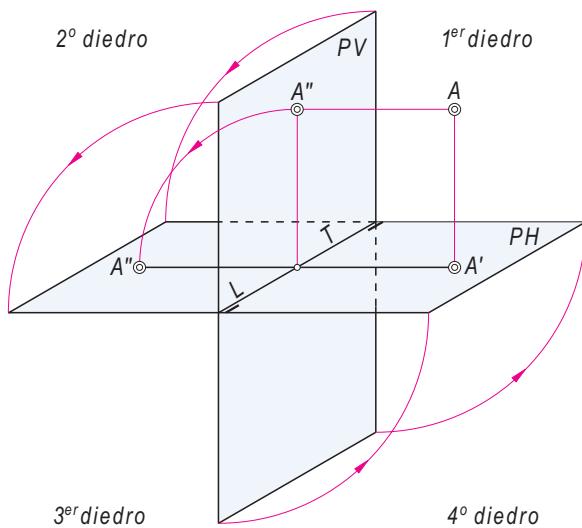


Fig. 1.

La intersección de estos dos planos es una recta que recibe el nombre de **línea de tierra** y que la designaremos abreviadamente por **L.T.** La línea de tierra se representa con dos trazos gruesos dibujados por debajo de ella y en sus extremos.

Los planos se consideran **ilimitados** y **opacos**.

La proyección de un punto, de una figura o de un cuerpo sobre el plano H se llama **proyección horizontal** o **planta**.

La proyección sobre el plano V se llama **proyección vertical** o **alzado**.

Los planos horizontal y vertical dividen el espacio en cuatro diedros rectos, es decir, de 90° . Cada uno de los planos de proyección queda dividido en dos semiplanos separados por la *L.T.* La parte del plano H situada por delante del plano V, es decir, en el primer diedro, es el **plano horizontal anterior**; el otro semiplano es el **horizontal posterior**. De la misma forma, el plano V queda dividido en dos semiplanos, **vertical superior** y **vertical inferior**.

Los diedros se llaman **primero, segundo, tercero** y **cuarto diedro**, cuyo orden y posición es la que indica la vista de perfil de la Fig. 3.

Los **planos bisectores** de estos diedros dividen al espacio en ocho diedros de 45° , que podemos llamar "octantes". El plano bisector del primero y del tercer diedro se llama **primer bisector** y el plano bisector del segundo y cuarto diedro se llama **segundo bisector**.

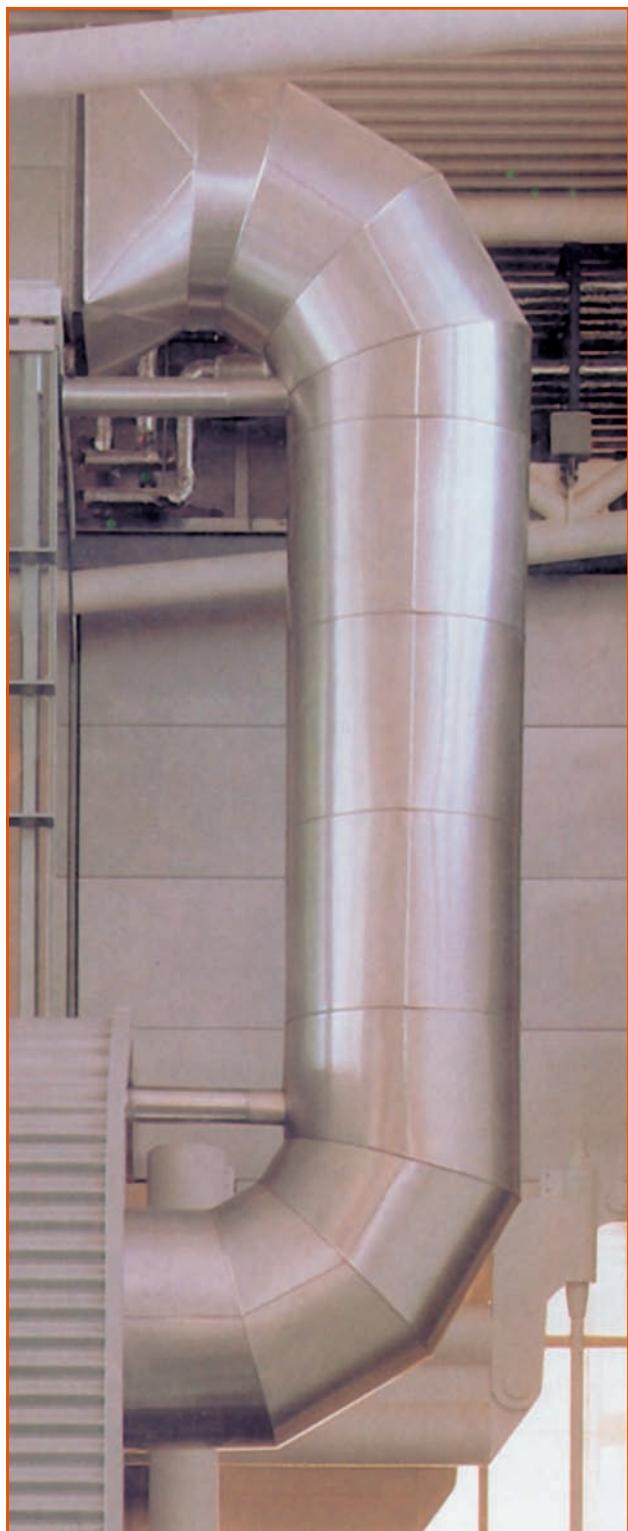


Fig. 2. Una de las aplicaciones de la geometría descriptiva es la calderería.

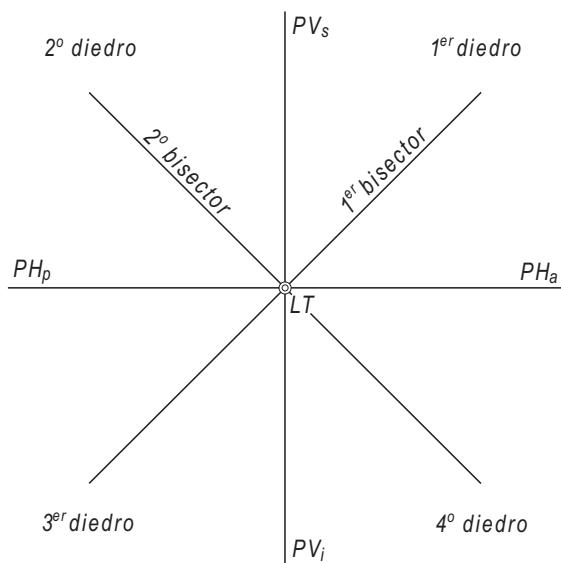


Fig. 3.

Estos son los elementos del sistema diédrico. Supongamos ahora un punto A del espacio, en el primer diedro. Para representarlo en el sistema se proyecta ortogonalmente sobre el plano H en A' y sobre el plano V en A'' . Los puntos A' y A'' son las dos proyecciones del punto A . Si se conocen los puntos A' y A'' , para hallar el punto A del espacio, del cual son proyecciones, basta trazar por A' la perpendicular al plano H y por A'' , la perpendicular al plano V ; estas perpendiculares se cortan en el punto A del espacio (Fig. 1).

Quiere decir lo expuesto que un punto tiene sólo dos proyecciones y que éstas sólo pueden serlo de un punto del espacio. Esta **reversibilidad** es la propiedad principal de todo sistema de representación.

Un sistema de representación, para estar definido, ha de ser reversible, es decir, a partir de las proyecciones se puede saber la posición del cuerpo o elemento proyectado.

Para poder representar el conjunto del espacio de la Fig. 1 sobre el papel del dibujo, se abate el plano V , alrededor de la $L.T.$, hasta hacerlo coincidir con el plano H . El sentido de giro o de abatimiento es el sentido trigonométrico, es decir, contrario al movimiento de las agujas del reloj. De esta forma, el semiplano vertical superior viene a coincidir con el horizontal posterior, y el vertical inferior, con el horizontal anterior.

El resultado sería el mismo si el sentido de giro del abatimiento fuera el contrario, es decir, si fuese el plano H el que girara alrededor de $L.T.$ hasta coincidir con el plano V . De esta forma, también quedaría un solo plano, el vertical, que sería el papel del dibujo. Como este sentido de giro es convencional, fijamos que el plano V es el que gira hasta confundirse con el H .

El plano del dibujo es el plano H , y queda dividido en dos partes por la $L.T.$ La disposición definitiva del dibujo es la que indica la Fig. 4.

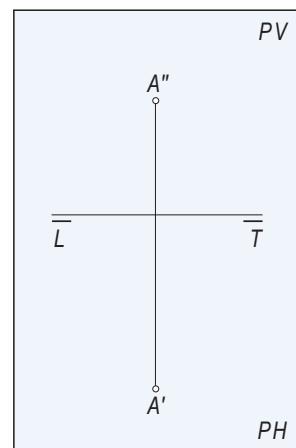


Fig. 4.

Las proyecciones A' y A'' del punto A están, después del abatimiento del plano V , sobre la misma perpendicular a la $L.T.$ Esta es la propiedad fundamental de las proyecciones de un punto. Según esto, dos proyecciones no situadas en una misma perpendicular a la $L.T.$ no pueden ser las proyecciones de un punto del espacio.

Para hallar las proyecciones en este sistema, el observador se coloca en el infinito por encima del plano H y por delante del plano V , es decir, en el primer diedro.

Sabiendo que los planos de proyección son opacos, solamente se considera vista la parte de los cuerpos situada en el primer diedro. Los tres diedros restantes son ocultos.

En este sistema existe indeterminación en cuanto se refiere a las proyecciones de rectas y de figuras contenidas en planos de perfil. Para poder salvar esta indeterminación es necesario utilizar una tercera proyección sobre un plano de perfil; este plano es perpendicular a los del sistema y, por lo tanto, a la $L.T.$ (Fig. 5).

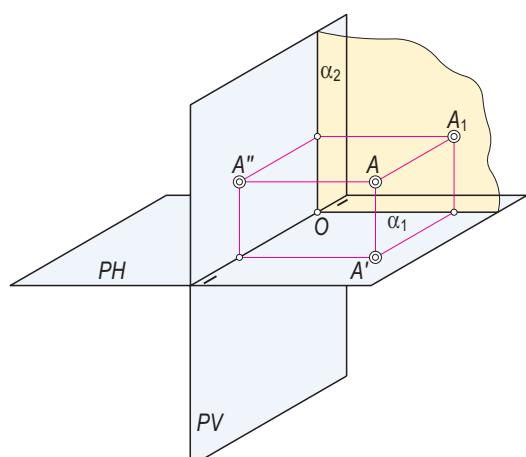


Fig. 5.

La tercera proyección del punto A sobre el plano $\alpha(\alpha_1-\alpha_2)$, de perfil, es el punto A_1 . Este plano se abate sobre el V y éste, a su vez, sobre el H , y queda la disposición del dibujo como indica la Fig. 6.

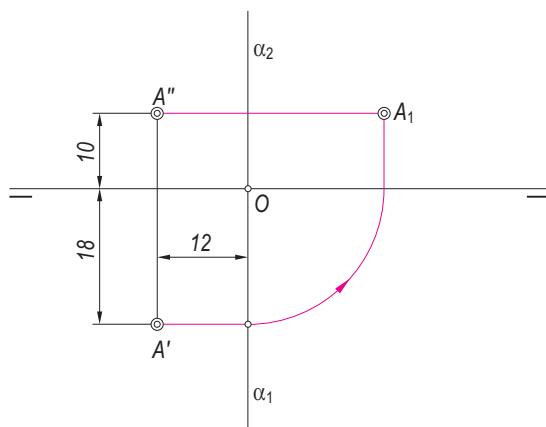


Fig. 6.

El plano de perfil es la recta $\alpha_1\text{-}\alpha_2$ según se verá al representar el plano. Considerando este tercer plano de perfil, un punto se puede dar por tres cotas o distancias a los tres planos. Por ejemplo, el punto A se puede representar por $A(12, 10, 18)$; 12 unidades es lo que dista del plano de perfil; 10 unidades es la distancia al plano H y 18 unidades es lo que dista del plano V .

2. Notación

La línea de tierra la representaremos con línea llena y fina y con dos trazos en sus extremos.

Los puntos los designaremos con letras mayúsculas. Así, el punto A se indica $A(A'\text{-}A'')$, siendo A' y A'' las proyecciones horizontal y vertical, respectivamente, del punto A del espacio. También se pueden nombrar con números.

Las rectas se nombran con letras minúsculas; por ejemplo, $r(r'\text{-}r'')$ indica que la recta r tiene por proyecciones r' y r'' , horizontal y vertical, respectivamente.

Los planos se nombran con letras del alfabeto griego. Por ejemplo, $\alpha(\alpha_1\text{-}\alpha_2)$ indica que el plano α tiene por trazas α_1 y α_2 , horizontal y vertical, respectivamente.

3. Representación del punto

Hemos visto que un punto queda definido y representado cuando se conocen sus dos proyecciones.

Sea el punto $A(A'\text{-}A'')$. Se llama **línea de referencia** de este punto a la recta que une sus dos proyecciones y que sabemos es perpendicular a la $L.T$. Se dibuja fina y

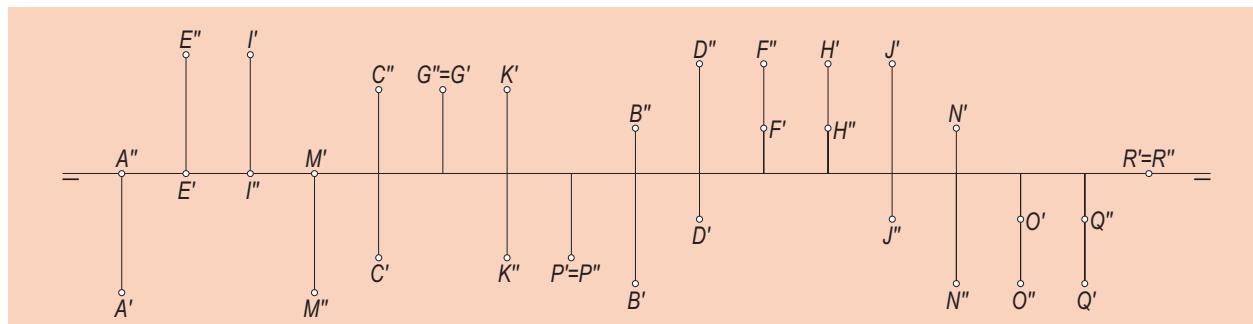


Fig. 8.

continua, aunque a medida que se avanza en la complejidad de los problemas, sólo se dibuja en sus extremos para indicar la correspondencia entre las proyecciones.

Ordenada o cota de un punto es la distancia de ese punto al plano H . Es también la distancia entre la proyección vertical del punto y la $L.T$. La cota es positiva si el punto está por encima del plano H , es decir, en el primer o el segundo diedros; si el punto está en el plano H , la cota es nula; los puntos del tercer y cuarto diedros tienen cota negativa.

Alejamiento de un punto es la distancia de este punto al plano V o también la distancia que existe entre la proyección horizontal del punto y la $L.T$. Los puntos del primer y cuarto diedros tienen alejamiento positivo y los puntos del segundo y el tercero, alejamiento negativo. Los puntos del plano vertical tienen alejamiento nulo.

Con el nombre de **“alfabeto del punto”**, queremos indicar las diversas posiciones que puede ocupar un punto en el espacio con relación a los planos de proyección.

El punto puede ocupar 17 posiciones diferentes (Figs. 7 y 8).

En la Fig. 7 se indican los puntos en una vista de perfil.

En la Fig. 8 se indican las proyecciones diédricas de cada posición.

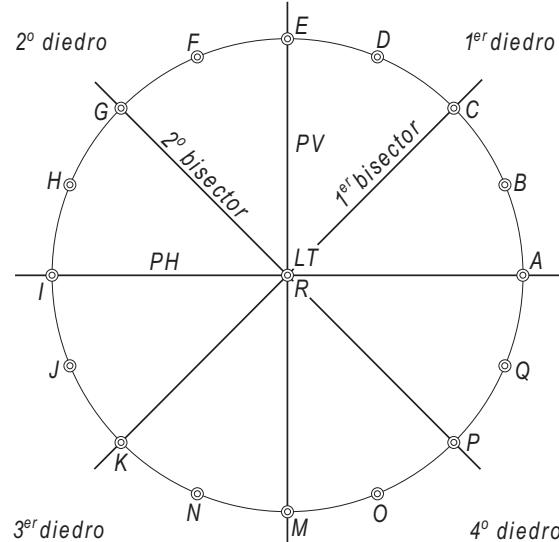


Fig. 7.

Puntos situados en los planos de proyección.

Puntos A, E, I y M

Punto A: está situado en el plano H anterior; la proyección vertical está en la $L.T.$ y la horizontal coincide con el punto A , estando por debajo de $L.T.$; la cota es nula y el alejamiento positivo.

Punto E: en el vertical superior; la proyección vertical coincide con el punto y la horizontal está en $L.T.$; cota positiva y alejamiento nulo.

Punto I: en el horizontal posterior; la proyección vertical en $L.T.$ y la horizontal por encima de $L.T.$; cota nula y alejamiento negativo.

Punto M: en el vertical inferior; la proyección horizontal en $L.T.$ y la vertical por debajo de $L.T.$; cota negativa y alejamiento nulo.

Puntos situados en los planos bisectores. Puntos C, G, K y P

Punto C: situado en el primer bisector, primer diedro; la proyección vertical está por encima de $L.T.$ y la horizontal por debajo; tiene igual cota que alejamiento. Todos los puntos del primer bisector tienen sus proyecciones equidistantes de $L.T.$ y a distinto lado de ella.

Punto G: situado en el segundo bisector, segundo diedro; tiene las proyecciones confundidas y por encima de $L.T.$ La cota y el alejamiento de los puntos del segundo bisector son iguales, pero de signo contrario.

Punto K: igual que el punto C pero las proyecciones invertidas, la horizontal por encima de $L.T.$ y la vertical por debajo; la cota y el alejamiento son negativos e iguales.

Punto P: igual que el punto G , pero las proyecciones por debajo de $L.T.$

Los puntos del segundo bisector siempre tienen las proyecciones coincidentes.

Puntos situados en los octantes y en la $L.T.$

Puntos B, D, F, H, J, N, O, Q y R

Punto B: en el primer octante; tiene más alejamiento que cota.

Punto D: en el segundo octante; tiene más cota que alejamiento.

Punto F: en el tercer octante; tiene más cota que alejamiento.

Punto H: en el cuarto octante; tiene más alejamiento que cota.

Punto J: en el quinto octante.

Punto N: en el sexto octante.

Punto O: en el séptimo octante.

Punto Q: en el octavo octante.

Punto R: en la $L.T.$; tiene las dos proyecciones en $L.T.$

Resumiendo: los puntos del primer diedro tienen una proyección a cada lado de $L.T.$; la horizontal por debajo y la vertical por encima.

Los puntos del segundo diedro tienen las dos proyecciones por encima de $L.T.$ y los puntos del cuarto diedro las dos por debajo.

Los puntos del tercer diedro, como los del primero, tienen una proyección a cada lado de $L.T.$, pero la horizontal por encima y la vertical por debajo.

4. Representación de la recta

La proyección de una recta sobre un plano es otra recta formada por las proyecciones de todos los puntos de aquélla. Si la recta es perpendicular al plano, su proyección ortogonal es un punto.

Una recta del espacio queda definida cuando se conocen sus proyecciones sobre los dos planos de proyección. En el caso de que la recta esté de perfil, será necesaria una tercera proyección.

Sea la recta r (Fig. 9). Sus proyecciones sobre los planos son: r' , sobre el plano H , y r'' , sobre el plano V .

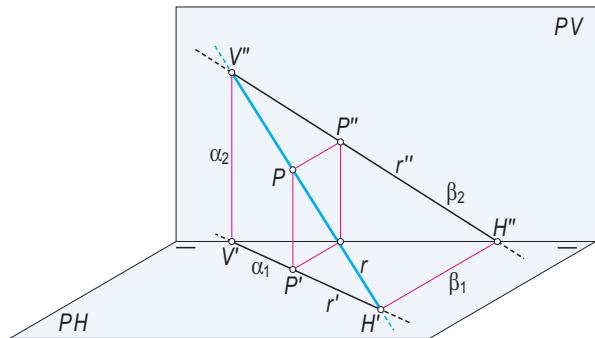


Fig. 9.

El plano que proyecta la recta r sobre el plano H se llama **plano proyectante horizontal de la recta** y está formado por el triángulo $V''-V'-H'$; este plano es el $\alpha(\alpha_1-\alpha_2)$.

El plano que proyecta la recta r sobre el plano V se llama **plano proyectante vertical de la recta** y está formado por el triángulo $V''-H''-H'$; este plano es el $\beta(\beta_1-\beta_2)$. En la figura del espacio puede apreciarse que la recta intersección de estos dos planos es la recta r del espacio.

Una recta puede definirse por sus trazas. **Se llaman trazas de una recta los puntos donde la recta corta a los planos de proyección.** La recta r encuentra al plano H en el punto $H(H'-H'')$, llamado **traza horizontal**

de la recta; como se ve, H'' está en la $L.T.$ El punto $V(V'-V'')$, donde la recta r encuentra el plano vertical, es la **traza vertical**. La proyección V' está siempre en la $L.T.$

Abatiendo el plano vertical, la disposición del dibujo queda como indica la **Fig. 10**. Las líneas de referencia $H'-H''$ y $V''-V'$ son siempre perpendiculares a $L.T.$

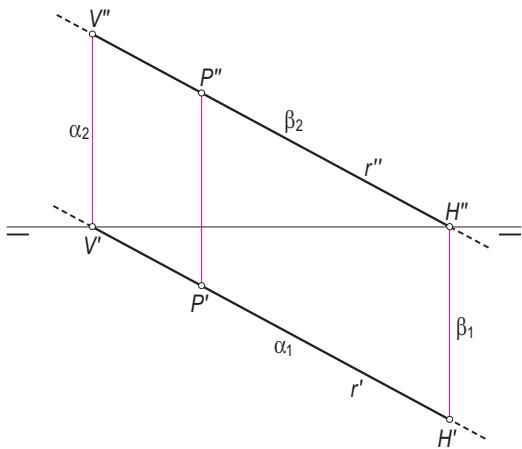


Fig. 10.

Para determinar las partes vistas y ocultas de una recta, hay que tener en cuenta que solamente será vista la parte comprendida en el primer diedro, la cual se indica con línea continua; la parte restante es oculta y se dibuja de trazos. Una recta puede pasar a lo sumo por tres diedros.

Dos rectas se cortan en el espacio si las proyecciones del mismo nombre se cortan en puntos que están en una misma perpendicular a $L.T.$ (**Fig. 11**); así, las rectas $r(r'-r'')$ y $s(s'-s'')$ se cortan en el punto P del espacio, pues las proyecciones horizontales se cortan en P' y las verticales en P'' y ambos puntos están en la misma perpendicular a $L.T.$

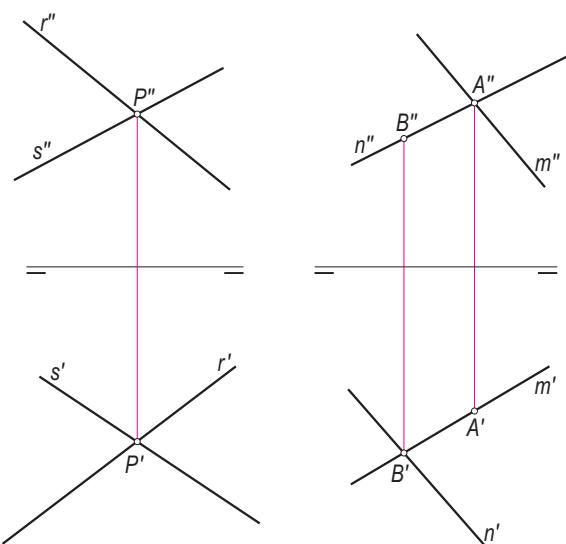


Fig. 11.

Fig. 12.

En la **Fig. 12**, las rectas $n(n'-n'')$ y $m(m'-m'')$ se cruzan en el espacio, es decir, no se encuentran, pues las proyecciones horizontales n' y m' se cortan en B' y las verticales n'' y m'' se cortan en A'' y estos puntos no son las proyecciones de un punto del espacio.

Para situar un punto sobre una recta, se ponen las proyecciones del punto sobre las proyecciones del mismo nombre de la recta. En la **Fig. 12**, el punto B pertenece a la recta n , por estar B' en n' y B'' en n'' , pero no pertenece a la m . El punto A pertenece a la recta m , por estar A' en m' y A'' en m'' , pero no pertenece a la n .

5. Rectas perpendiculares a los planos de proyección (Figs. 13 y 14)

Pueden ser perpendiculares al plano H o al plano V y se llaman también **“rectas de punta”**, respecto al H o al V .

En la **Fig. 13** se representan, mediante una perspectiva, las posiciones de este tipo de rectas. Tres rectas perpendiculares al plano H y tres rectas perpendiculares al plano V . En la **Fig. 14** se indican las proyecciones resultantes de estas posiciones. Veamos:

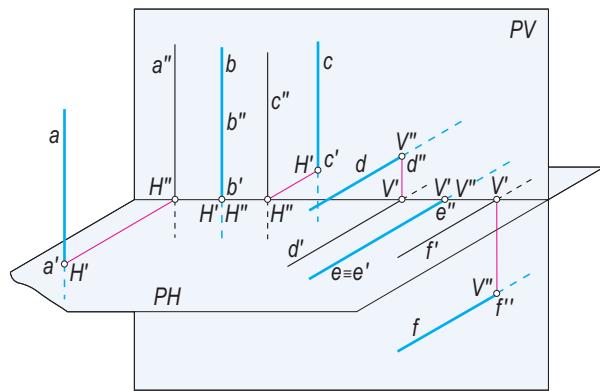


Fig. 13.

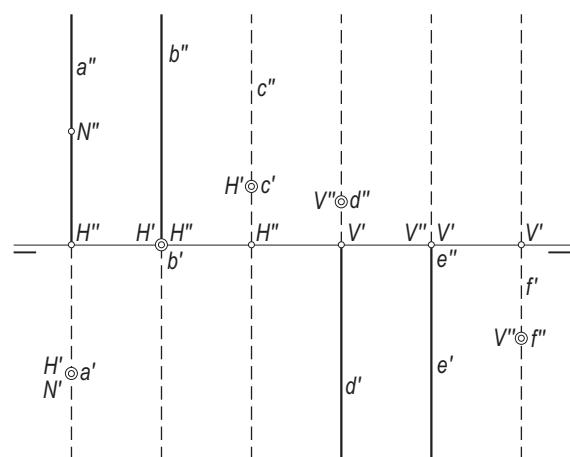


Fig. 14.

1º. Rectas perpendiculares al plano H (tres posiciones)

Recta $a(a'-a'')$: Es perpendicular al H por delante del V ; la proyección horizontal es el punto a' ; la traza horizontal es $H'-H''$; no tiene traza vertical; un punto N de ella es el $N'-N''$, estando N' en a' .

Recta $b(b'-b'')$: Está contenida en el plano vertical; la proyección b' está en la $L.T.$; su traza horizontal es $H'-H''$.

Recta $c(c'-c'')$: Es perpendicular al H , por detrás del V ; la proyección horizontal es c' ; la traza horizontal es $H'-H''$; esta recta es toda oculta.

2º. Rectas perpendiculares al plano V (tres posiciones)

Recta $d(d'-d'')$: Es perpendicular al plano V por encima del H ; la proyección vertical es el punto d'' ; la traza vertical es $V'-V''$; no tiene traza horizontal.

Recta $e(e'-e'')$: Está situada en el plano H ; la proyección vertical e'' está en $L.T.$; su traza vertical es $V'-V''$.

Recta $f(f'-f'')$: Es perpendicular al plano V , por debajo del H ; la proyección vertical es el punto f'' ; la traza vertical es $V'-V''$.

Como puede apreciarse, las seis rectas tienen una proyección perpendicular a $L.T.$ y la otra proyección es un punto, que puede estar por debajo de $L.T.$, en ella o por encima de ella.

6. Recta paralela a $L.T.$ (Fig. 15)

Una recta paralela a $L.T.$ tiene las dos proyecciones paralelas a $L.T.$ En la parte superior de la figura se representa la recta en el espacio. En la parte inferior, la recta r tiene sus proyecciones r' y r'' paralelas a $L.T.$. El punto $A'-A''$ pertenece a ella.

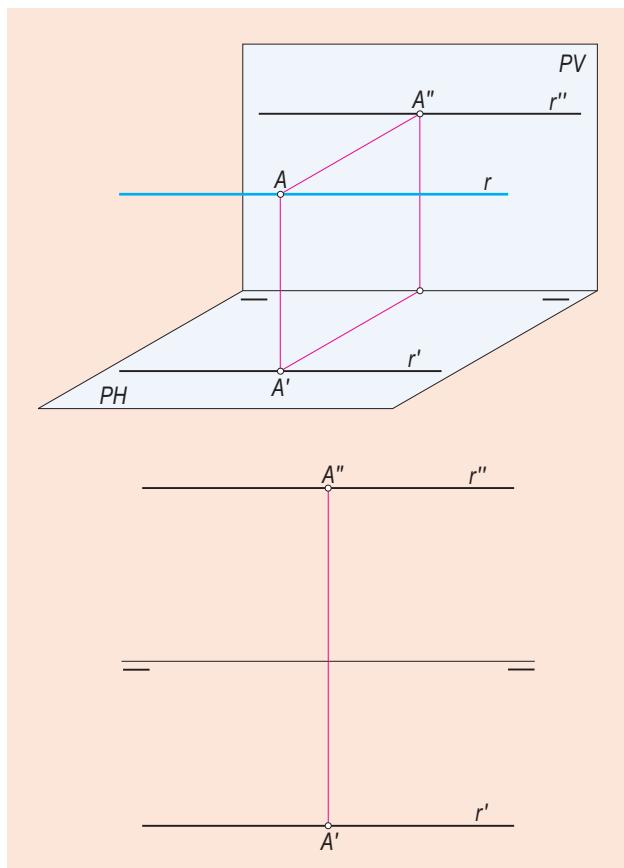


Fig. 15.

7. Recta paralela al plano H (Fig. 16)

Recta $r(r'-r'')$: Paralela al H por encima de él; la traza vertical es el punto $V'-V''$; no tiene traza horizontal; la proyección r' es cualquiera y la proyección vertical r'' es paralela a $L.T.$. El punto $A(A'-A'')$ pertenece a ella; los puntos $M'-M''$ y $N'-N''$ son los de intersección de la recta con el primer y segundo bisectores, respectivamente.

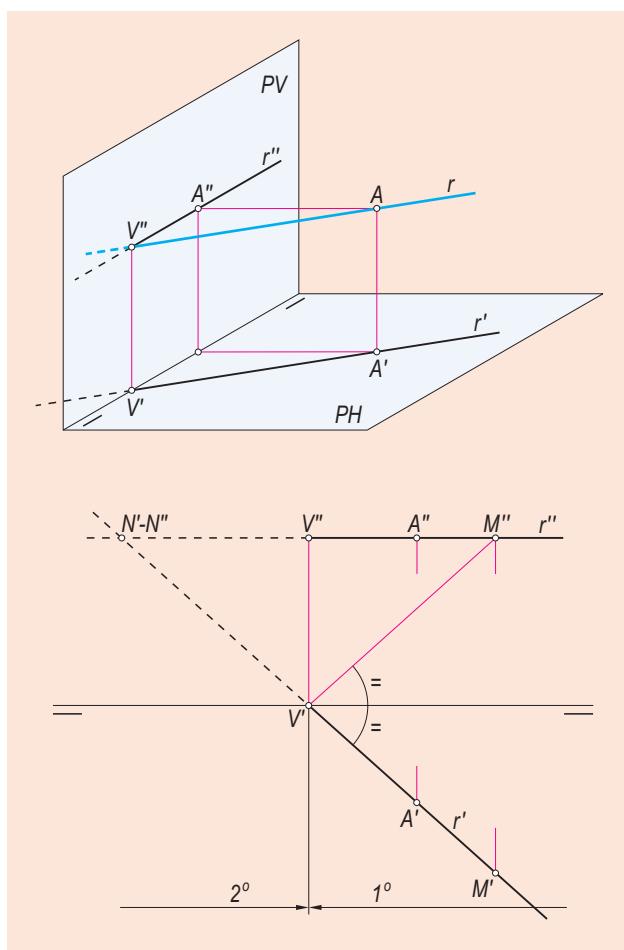


Fig. 16.

8. Recta paralela al plano **V** (Fig. 17)

Recta $r(r'-r'')$: Es paralela al plano vertical por delante de él. Esta recta recibe el nombre de “**recta frontal**”. Su traza horizontal es $H'-H''$ y no tiene traza vertical. Un punto de ella es el $A'-A''$ y los puntos $M'-M''$ y $N'-N''$ son los de intersección de la recta con el primer y segundo bisectores. Pasa del primer diedro al cuarto.

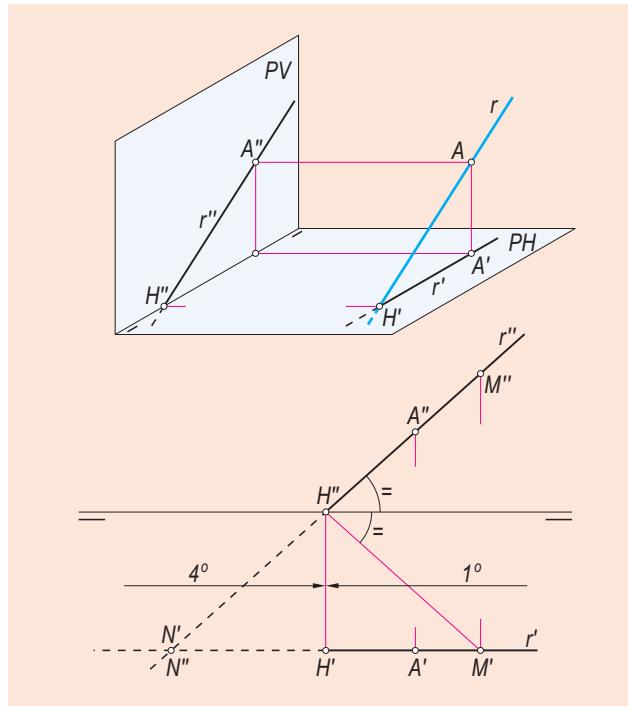


Fig. 17.

9. Rectas oblicuas a los planos y que cortan a L.T. (Figs. 18 y 19)

Hay cuatro posiciones de este tipo de rectas, las cuales pasan por dos diedros y tienen las dos trazas en L.T.

Recta $s(s'-s'')$: (Fig. 18). Pasa del primero al tercer diedro y es oblicua a L.T.

Recta $s_1(s'_1-s''_1)$: (Fig. 18). Pasa del segundo al cuarto diedro y es oblicua a L.T.

Recta $s_2(s'_2-s''_2)$: (Fig. 19). Pasa del primero al tercer diedro y es perpendicular a L.T.; es una recta llamada de *perfil*, por tener las dos proyecciones confundidas y perpendiculares a L.T. Para definirla hay que dar un punto $A'-A''$ de ella, en este caso, del primer diedro.

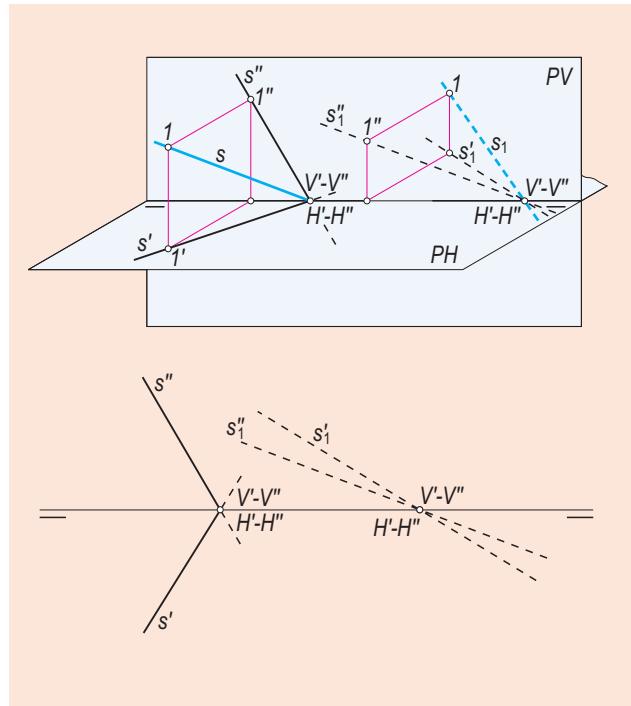


Fig. 18.

Recta $s_3(s'_3-s''_3)$: (Fig. 19). Pasa del segundo al cuarto diedro; hay que definirla por un punto, en este caso, el $B'-B''$ del segundo diedro.

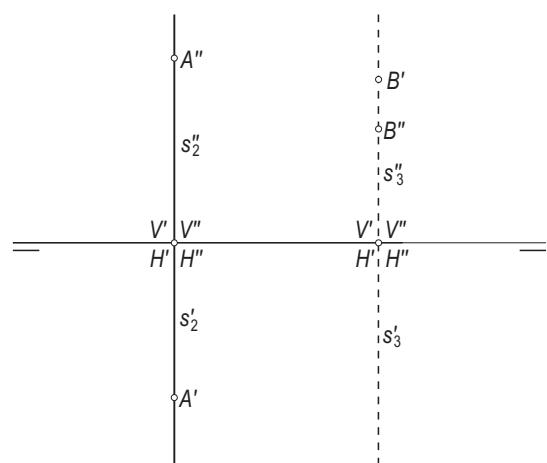
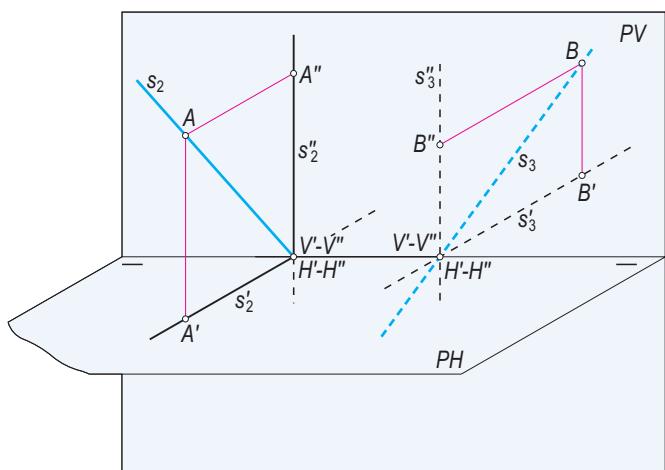


Fig. 19.

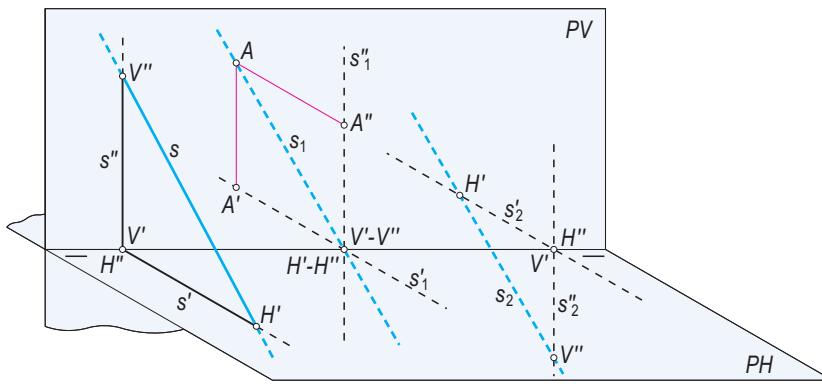


Fig. 20.

10. Rectas de perfil (Figs. 20, 21 y 22)

Estas rectas reciben este nombre por estar situadas en planos de perfil; tienen las dos proyecciones confundidas sobre una misma perpendicular a *L. T.*, por lo que para definirlas hay que dar dos puntos cualesquiera de ellas o bien sus dos trazas.

Hay que distinguir:

- Rectas de perfil que son perpendiculares a los bisectores.
 - Rectas de perfil que no son perpendiculares a los bisectores.

1º. Rectas de perfil perpendiculares a los bisectores (seis posiciones) (Figs. 20 y 21)

Recta $s(s'-s'')$: (Fig. 20). Es perpendicular al primer bisector por encima del segundo. Sus trazas H'' y V'' equidistan de $L.T.$

Recta $s_1(s'_1-s'')$: (Fig. 20). Es perpendicular al primer bisector y está contenida en el segundo; se define por un punto $A'-A''$ del segundo bisector; las trazas están en $L.T$ y es toda oculta.

Recta $s_2(s'_2-s''_2)$: (Fig. 20). Es perpendicular al primer bisector por debajo del segundo; es toda oculta. Sus trazas H' y V'' equidistan de $L.T$; pero están dispuestas la H' , por encima de $L.T$, y la V'' , por debajo de $L.T$.

Recta $r(r'-r'')$: (Fig. 21). Es perpendicular al segundo bisector por encima del primero. Sus trazas H y V'' coinciden. Obsérvese con detenimiento esta recta para comprobar que es oculta solamente la parte comprendida entre las trazas.

Recta $r_1(r'_1-r''_1)$: (Fig. 21). Es perpendicular al segundo bisector y está contenida en el primero; se define por un punto $A'-A''$ del primer bisector. Las trazas están en la $L.T$ y es toda vista.

Recta $r_2(r'_2-r''_2)$: (Fig. 21). Es perpendicular al segundo bisector por debajo del primero. Sus trazas H' y V'' coinciden y es oculta solamente la parte comprendida entre las trazas.

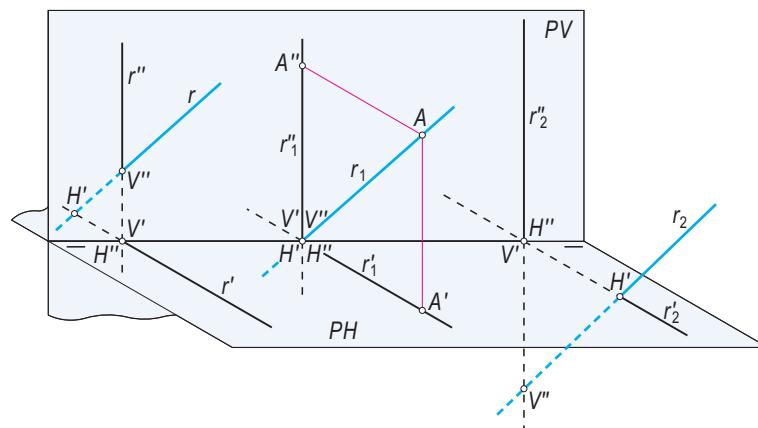
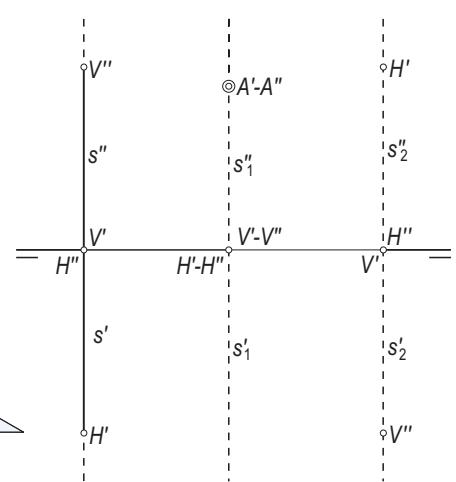


Fig. 21.



2º. Rectas de perfil no perpendiculares a los bisectores (Fig. 22)

Son cuatro posiciones. En la parte superior de la figura se indica la posición de estas cuatro rectas: **a**, **b**, **c** y **d**.

En la parte inferior de la figura se obtienen las proyecciones de las mismas, que son similares a las rectas anteriores, con la única diferencia de que las trazas no son simétricas ni coinciden.

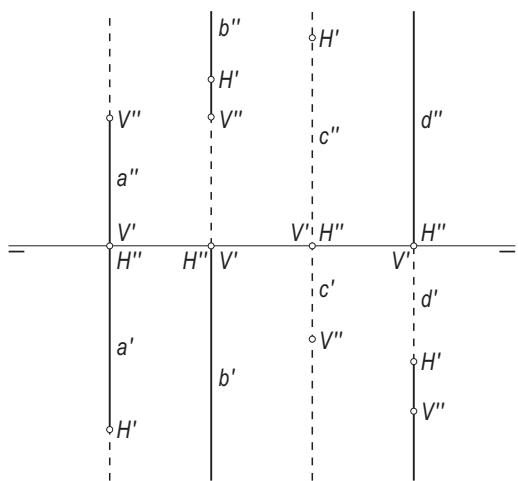
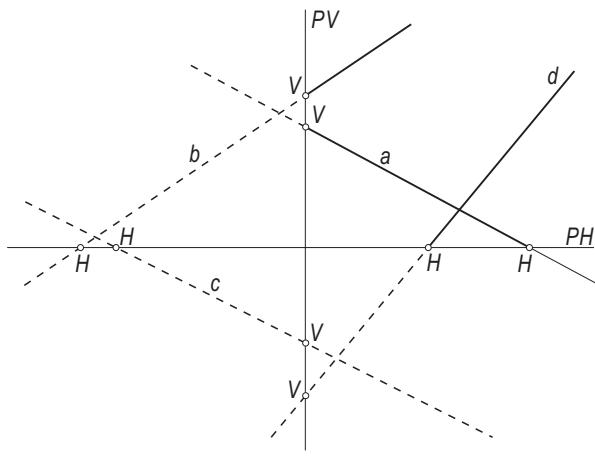


Fig. 22.

11. Tercera proyección de una recta de perfil (Fig. 23)

En la parte superior de la figura se representa en el espacio una recta s , de perfil, y se obtienen sus proyecciones s' y s'' sobre los planos H y V y s_1 sobre un plano de perfil, designado por PP . En la parte inferior se proyecta la recta $s'-s''$ sobre el plano de perfil $\alpha_1-\alpha_2$ llevando las trazas H' y V'' a los puntos H y V ; se abate el plano de perfil sobre el vertical y éste sobre el horizontal, con lo que se obtiene la tercera proyección s_1 de la recta.

Con mucha frecuencia nos veremos obligados a emplear esta tercera proyección, por lo que es preciso saber pasar de proyecciones a tercera proyección y de ésta a las dos proyecciones diédricas sobre H y V .

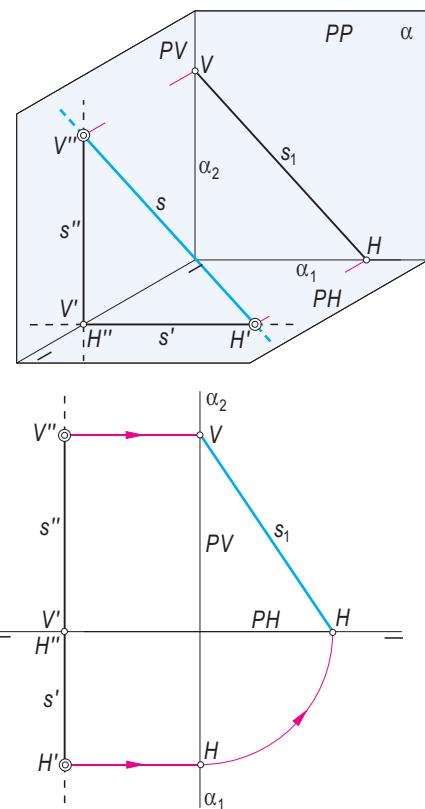


Fig. 23.

12. Problema (Fig. 24)

Dada la proyección de un punto contenido en una recta de perfil, hallar la otra proyección.

Se conoce la proyección A' de un punto situado en la recta $r'-r''$; pasamos la recta r a tercera proyección según r_1 , con ayuda de las trazas H' y V'' , y el punto A' nos da A_1 en r_1 ; la proyección A_1 se refiere a A'' en r'' y tenemos así la proyección vertical del punto A . Según esto, para poner un punto en una recta de perfil, no se puede hacer directamente sobre las proyecciones, sino que hay que situarlo previamente en la tercera proyección.

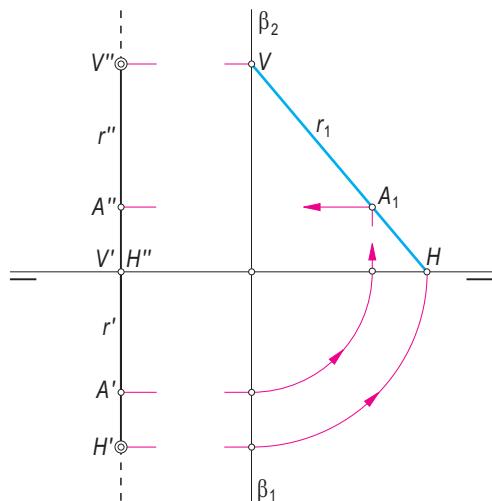


Fig. 24.

13. Problema (Fig. 25)

Dada una recta de perfil por dos de sus puntos, hallar sus trazas.

Sea la recta $r(r'-r'')$ de perfil que está definida por los puntos $A'-A''$ y $B'-B''$. Se toma un plano β_1 - β_2 de perfil y se halla la tercera proyección de la recta; se obtienen los puntos A_1 y B_1 que, unidos, definen la proyección r_1 ; esta proyección corta a los planos en H y V , que son las trazas pedidas, y éstas se refieren a la recta en $H'-H''$ y en $V'-V''$.

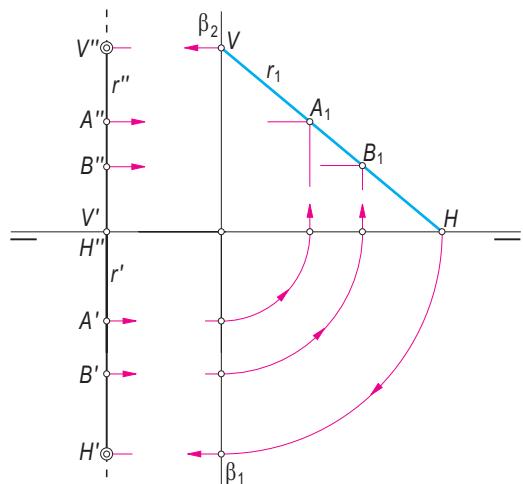


Fig. 25.

14. Problema (Fig. 26)

Averiguar si se cortan o no dos rectas dadas, una de perfil y otra cualquiera.

Las rectas $r'-r''$ y $s'-s''$ aparentemente se cortan pero referido el punto $I'-I''$ a la tercera proyección, vemos que no pertenece a la recta r , de perfil, lo que indica que las rectas se cruzan. El punto $I'-I''$ sólo pertenece a la recta s .

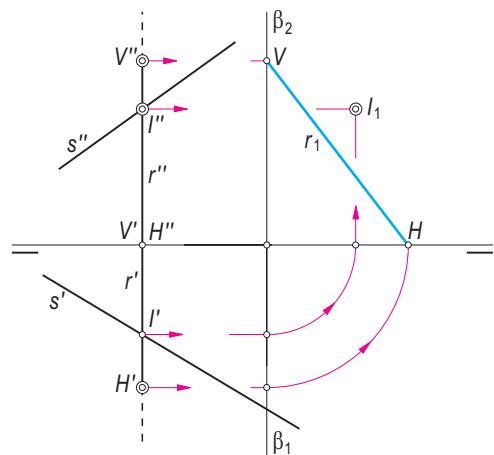


Fig. 26.

15. Representación del plano. Trazas de un plano

Se llaman "trazas de un plano" las rectas intersección de éste con cada uno de los planos de proyección. Un plano tiene, pues, dos trazas, la horizontal y la vertical.

Sea el plano α (Fig. 27). Las trazas son las rectas α_1 y α_2 que se cortan en el punto N de la $L.T.$ Obsérvese que la traza horizontal α_1 es una recta $s'-s''$ del plano horizontal y que, por lo tanto, se proyecta verticalmente sobre la $L.T.$ Igualmente, la traza vertical α_2 es una recta $r'-r''$ del plano vertical, que se proyecta horizontalmente sobre la $L.T.$

Al abatir el plano V sobre el H , el plano queda en la disposición que indica la Fig. 28.

Un plano puede definirse de alguna de las formas siguientes:

- Por tres puntos no alineados.
- Por dos rectas que se cortan.
- Por dos rectas paralelas.
- Por un punto y una recta que no se pertenecen.

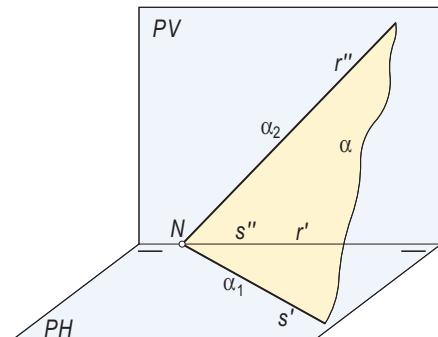


Fig. 27.

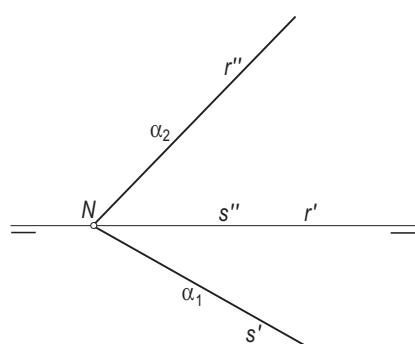


Fig. 28.

En general, en este sistema, el plano lo vamos a definir por dos rectas que se cortan, que van a ser precisamente las trazas de dicho plano.

En el caso de que un plano esté determinado de alguna otra forma, se pueden hallar las trazas del plano para operar con ellas. Hay que tener en cuenta que las trazas de un plano son los lugares geométricos de las trazas de todas las rectas contenidas en dicho plano.

Sean los puntos $A'-A''$, $B'-B''$ y $C'-C''$, no alineados (Fig. 29). Estos tres puntos definen un plano único, cuyas trazas vamos a determinar.

Se unen los puntos A y B y tenemos la recta $r'-r''$; igualmente, se unen los puntos A y C y tenemos la recta $s'-s''$; estas dos rectas se cortan en el punto A y definen el plano.

Se hallan las trazas horizontales H' y H_1'' de las rectas r y s , y al unirlas, tenemos la traza horizontal α_1 del plano. Se hallan las trazas verticales V'' y V_1' de las rectas, y al unirlas, tenemos la traza vertical α_2 del plano. Estas trazas han de cortarse en un punto de la *L.T.* La recta BC , que en la figura no se ha utilizado, también está en el plano.

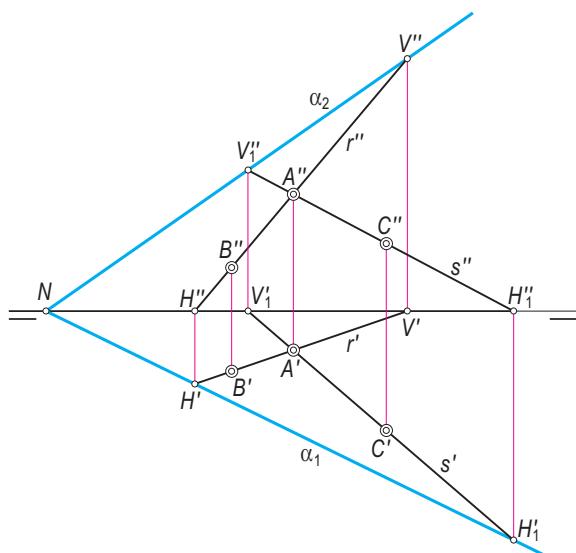


Fig. 29.

16. Rectas particulares de un plano

Una recta está situada en un plano cuando las trazas de la recta están situadas sobre las trazas del mismo nombre del plano.

La recta $r(r'-r'')$ (Fig. 30) está situada en el plano α por estar V'' en α_2 y H' en α_1 .

Si se conoce la proyección horizontal r' de una recta contenida en un plano α , para hallar la proyección vertical r'' , se traza por V' la perpendicular a *L.T.*, hasta que corte en V'' a α_2 , se refiere H' a *L.T.* en H'' y unidos los puntos H'' y V'' dan la proyección vertical r'' . El problema inverso se resuelve de la misma forma.

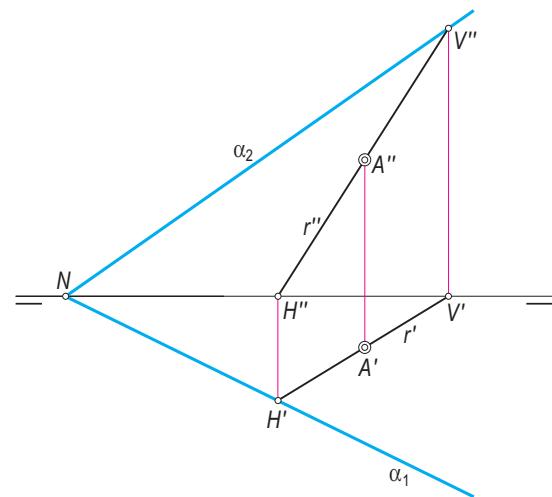


Fig. 30.

Un punto está en un plano cuando sus proyecciones están sobre las proyecciones del mismo nombre de una recta contenida en dicho plano. Así, el punto $A'-A''$ está en el plano α por pertenecer a la recta $r'-r''$ de este plano.

Según lo anterior, un punto no puede situarse en un plano de forma arbitraria, pues previamente se ha de situar una recta en dicho plano. Esta recta puede ser una cualquiera oblicua o, mejor aún, por su sencillez, una recta horizontal o una recta frontal.

En el alfabeto de la recta se estudiaron las proyecciones de una recta horizontal y de una recta frontal. En la Fig. 31, parte superior, la recta $h'-h''$ es una recta horizontal situada en el plano $\alpha_1-\alpha_2$; según este esquema del espacio, obtenemos la figura inferior; la traza vertical V'' de la recta $h'-h''$ está en α_2 , h'' es paralela a *L.T.* y h' es paralela a α_1 , ya que la traza horizontal H' de la recta es impropia. La cota de la recta h es c .

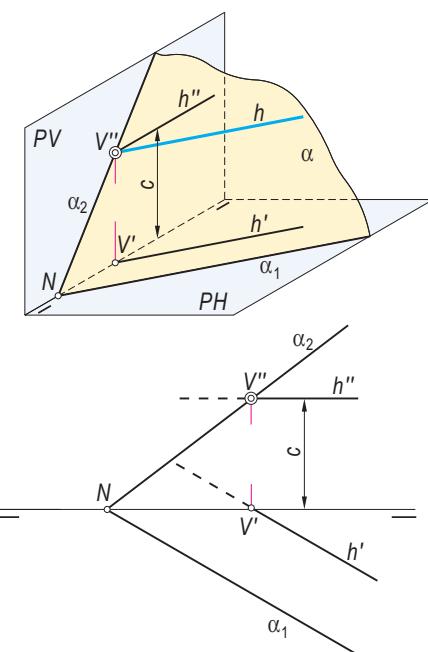


Fig. 31.

De la misma forma, en la **Fig. 32**, se sitúa en un plano $\omega_1-\omega_2$ una recta frontal $f'-f''$. Su única traza H' está en la traza horizontal ω_1 , la proyección f' es paralela a *L.T.* y la proyección f'' es paralela a ω_2 . La magnitud a es el alejamiento de esta recta frontal.

Se llama **línea de máxima pendiente de un plano (l.m.p.)** a la recta de este plano que forma el mayor ángulo con el plano horizontal. En la **Fig. 33**, la recta $r'-r''$ es una *l.m.p.* del plano $\alpha_1-\alpha_2$ y se caracteriza porque su proyección horizontal r' es perpendicular a la traza horizontal α_1 del plano. Para indicar que es *l.m.p.* se pone el signo de perpendicularidad o se colocan sobre r' los dos tracitos que indica la figura.

Se llama **línea de máxima inclinación de un plano** a la recta de este plano que forma el mayor ángulo con el plano vertical. Abreviadamente la designaremos por *l.m.i.* En la **Fig. 34**, la recta $i'-i''$ es una *l.m.i.* del plano $\omega_1-\omega_2$ y se caracteriza porque su proyección vertical i'' es perpendicular a la traza vertical ω_2 del plano. Como la anterior, esta recta se indica con el signo de perpendicularidad o con dos tracitos perpendiculares a la proyección i'' .

Un plano queda definido conociendo una de sus líneas de máxima pendiente o una de sus líneas de máxima inclinación. Así, conocida la recta $r'-r''$, *l.m.p.* de un plano, para hallar las trazas, se dibuja por H' la perpendicular a r' y el punto N , donde corta a la *L.T.*, unido con V'' , nos proporciona la traza vertical. De la misma forma se hallarían las trazas de un plano definido por una de sus *l.m.i.*

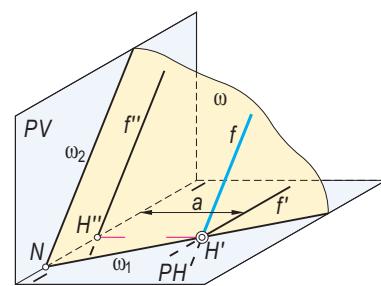


Fig. 32.

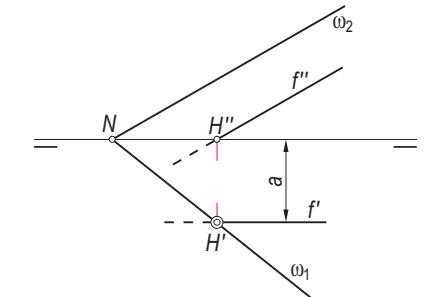


Fig. 33.

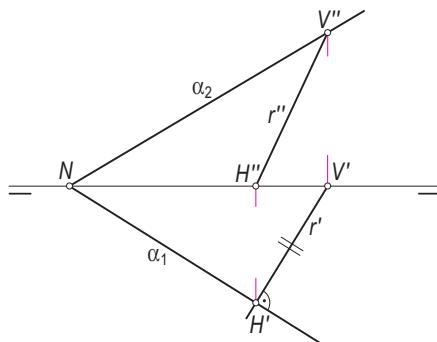


Fig. 34.

17. Planos proyectantes (Figs. 35 y 36)

Se llama **plano proyectante** a aquel que es perpendicular a uno de los planos de proyección. Según esto, hay dos posiciones de planos proyectantes, uno perpendicular al *H* y otro perpendicular al *V*.

• Plano proyectante horizontal (Fig. 35)

En el esquema del espacio de la izquierda, el plano $\alpha_1-\alpha_2$ es perpendicular al plano horizontal, la traza vertical α_2 es perpendicular a *L.T.* y la traza horizontal α_1 es una recta cualquiera. El ángulo A es el que forma el plano con el *V*. Todos los puntos y figuras contenidos en este plano se proyectan horizontalmente sobre su traza horizontal α_1 . Así, la recta r y el punto P tienen r' y P' sobre α_1 . Esta es la característica fundamental de este plano, de ahí su nombre de *proyectante horizontal*, porque proyecta ortogonalmente todo lo que contiene sobre su traza horizontal.

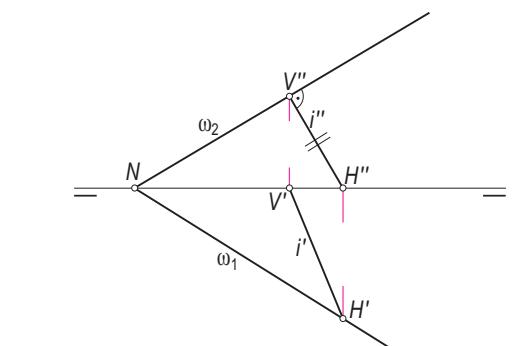


Fig. 35.

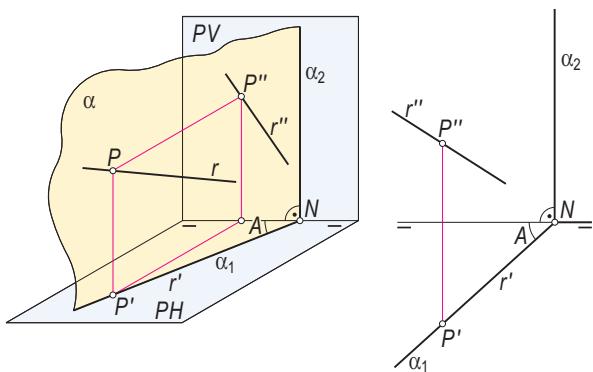


Fig. 35.

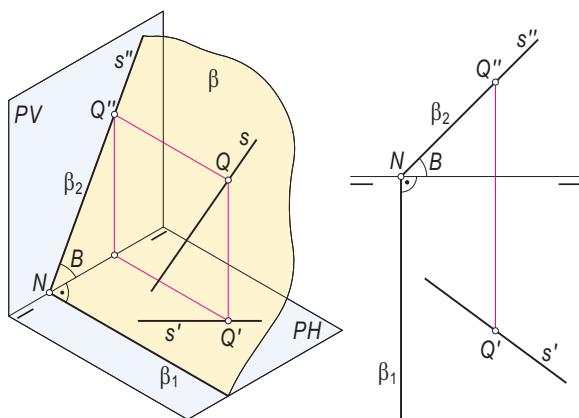


Fig. 36.

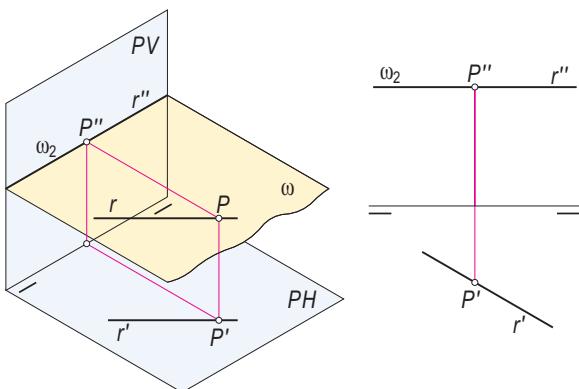


Fig. 37.

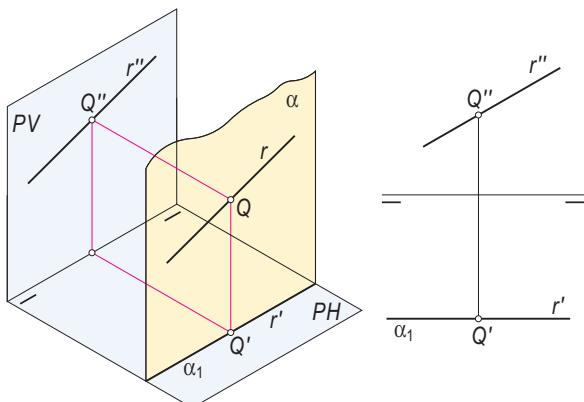


Fig. 38.

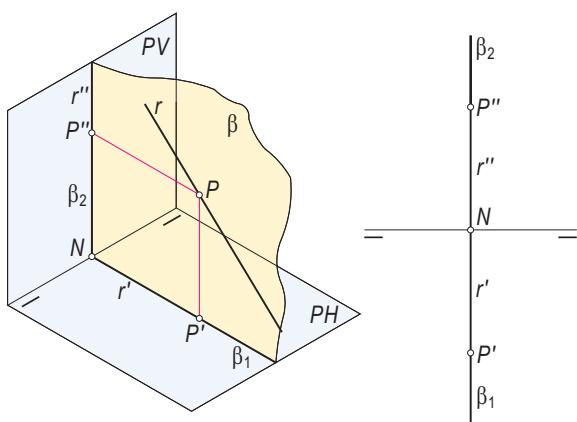


Fig. 39.

• Plano proyectante vertical (Fig. 36)

En el esquema del espacio de la izquierda de la figura, el plano β_1 - β_2 es perpendicular al plano vertical, la traza horizontal β_1 es perpendicular a $L.T$ y la traza vertical β_2 es una recta cualquiera. El ángulo B es el que forma el plano con el plano H . Todos los puntos y figuras contenidos en este plano se proyectan verticalmente sobre su traza vertical β_2 . Así, la recta s y el punto Q tienen s'' y Q'' sobre β_2 . Esta es la característica fundamental de este plano, de ahí su nombre de *proyectante vertical*, porque proyecta ortogonalmente todo lo que contiene sobre su traza vertical.

Se pueden considerar a estos planos como los más importantes, pues en la práctica son los que se utilizan para todas las construcciones auxiliares.

18. Planos paralelos a los de proyección (Figs. 37 y 38)

Estos planos, paralelos al H o al V , son también perpendiculares al otro plano del sistema, por lo que son también planos proyectantes.

• Plano horizontal (Fig. 37)

Es un plano paralelo al plano H y puede estar por encima de él, ser el mismo plano H o estar por debajo del plano H .

En el esquema de la figura, el plano $\omega(\omega_2)$ es horizontal, por encima del H , y no tiene más que una traza, la vertical ω_2 , que es la paralela a $L.T$. Todo lo que contiene lo proyecta verticalmente sobre su traza vertical; así, la recta r y el punto P tienen sus proyecciones r'' y P'' sobre ω_2 . A la derecha se dibuja este plano, que queda definido solamente por su traza ω_2 . Los elementos que contiene se proyectan horizontalmente en verdadera magnitud.

• Plano paralelo al vertical (Fig. 38)

Un plano paralelo al vertical se llama también “**plano frontal**”. En el esquema de la figura, el plano $\alpha(\alpha_1)$ es paralelo al vertical. Puede estar situado delante del vertical, ser el mismo vertical o estar por detrás de él. El plano α es paralelo al vertical por delante de él y por lo tanto no tiene más que traza horizontal, α_1 , que es paralela a $L.T$. Todos los elementos que contiene se proyectan horizontalmente sobre su traza α_1 y en proyección vertical se ven en verdadera magnitud. Así, la recta r y el punto P tienen r' y P' sobre α_1 . A la derecha se dibuja este plano, ya en diédrico, con su única traza α_1 .

19. Plano de perfil (Fig. 39)

La Fig. 39 representa en la parte izquierda un plano de perfil $\beta(\beta_1-\beta_2)$. Este plano es doblemente proyectante, pues es perpendicular a los planos H y V ; también es perpendicular a los dos bisectores. Sus dos trazas están confundidas en una sola y sobre ella están confundidas las dos proyecciones de todos los elementos contenidos en el plano; la recta r y el punto P tienen sus proyecciones confundidas con la recta $\beta_1-\beta_2$.

20. Planos perpendiculares a los bisectores (Fig. 40)

En la **Fig. 40**, el plano $\alpha_1-\alpha_2$ es perpendicular al primer bisector. Sus trazas forman el mismo ángulo con *L.T.*, es decir, son simétricas respecto de ella. En este plano se han dibujado una horizontal $h'-h''$ y un punto $1'-1''$ sobre ella.

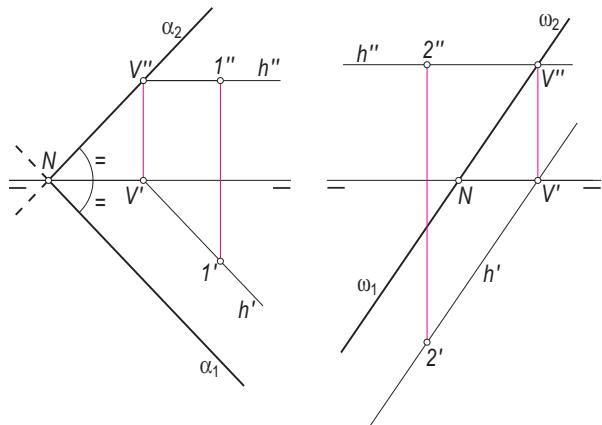


Fig. 40.

El plano $\omega_1-\omega_2$ es perpendicular al segundo bisector; tiene sus trazas en línea recta. También se han dibujado una horizontal $h'-h''$ y un punto $2'-2''$ situados en el plano.

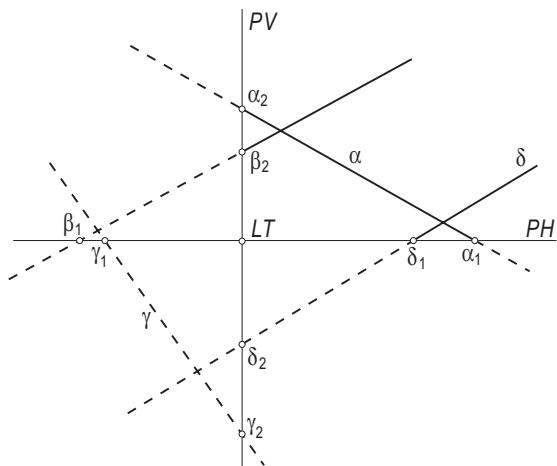


Fig. 41.

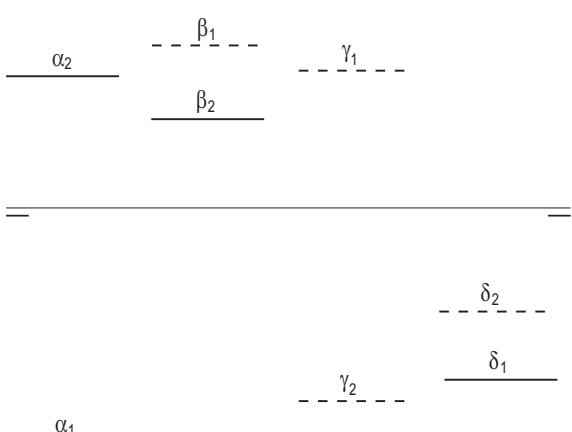


Fig. 42.

21. Planos paralelos a *L.T.* (Figs. 41 y 42)

Un plano paralelo a *L.T.* tiene sus dos trazas paralelas a *L.T.*. En la **Fig. 41** se representan los planos α , β , γ y δ , paralelos a *L.T.*, vistos de perfil. En la **Fig. 42**, se representan estos planos en diédrico, cuyas trazas, vistas u ocultas, se pueden deducir con facilidad de la **Fig. 41**.

22. Proyecciones de una figura plana (Fig. 43)

Se trata de resolver el siguiente problema de tipo general: **Dado un plano y una figura contenida en dicho plano, de la que se conoce una de las proyecciones, hallar la otra proyección.**

En la **Fig. 43**, tenemos el plano $\alpha_1-\alpha_2$ y una figura contenida en él que se proyecta verticalmente según un pentágono regular estrellado. Hay que hallar la proyección horizontal de dicha figura.

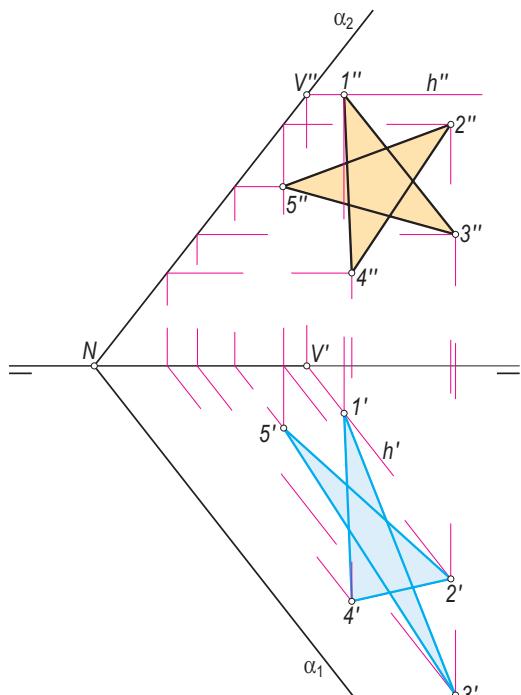


Fig. 43.

El problema puede resolverse trazando rectas horizontales o frontales de dicho plano y refiriendo los puntos a las mismas; así, por $1''$ se traza la horizontal h'' , que corta en V'' a α_2 ; V'' se refiere a la *L.T.* en V' y por V' se traza h' paralela a α_1 ; el punto $1''$ se refiere a h' en $1'$ y tenemos la proyección horizontal de este punto. Repitiendo la operación para todos los vértices, bien con rectas horizontales o con rectas frontales, tendremos la proyección $1'-2'-3'-4'-5'$.

También puede resolverse este problema empleando la relación de afinidad que existe entre las dos proyecciones vertical y horizontal. Este nuevo procedimiento se estudiará en el curso próximo.

ACTIVIDADES

1. Dibujar las proyecciones diédricas de los puntos: $A(3,3,4)$, $B(-3,2,5)$ y $C(-2,4,-3)$.
2. Por el punto $P(-4,2,5)$ trazar: una recta horizontal, una recta frontal y la recta vertical. Hallar sus trazas.
3. Hallar las trazas de la recta de perfil determinada por los puntos $P(4,3,1)$ y $Q(4,2,4)$.
4. Situar puntos y rectas sobre un plano cualquiera.
5. Situar en un plano rectas horizontales y rectas frontales.
6. Situar en una recta cualquiera el punto de cota 4.
7. Por un punto conocido $P'-P''$ trazar la horizontal que corta a otra recta oblicua $r'-r''$ dada.
8. Hallar las trazas del plano definido de las formas siguientes:
 - 1º. Por una recta horizontal y un punto exterior.
 - 2º. Por una recta frontal y un punto exterior.
 - 3º. Por una recta vertical y un punto exterior.
 - 4º. Por una recta de perfil y un punto exterior.
 - 5º. Por los puntos $P(3,3,3)$, $Q(-1,-2,3)$ y $R(1,2,-5)$.
 - 6º. Por dos rectas que se cortan de las que no podemos hallar las trazas.
9. ¿Cómo se hallan las trazas de una recta de perfil de la que se conocen las proyecciones de dos de sus puntos?
 - 1º. Utilizando la tercera proyección.
 - 2º. Sin recurrir a esta proyección.
10. Situar un punto en un plano dado por una de sus líneas de máxima pendiente.
11. Situar una recta en un plano dado por dos rectas que se cortan.
12. Dada una de las proyecciones de un punto situado en un plano, hallar la otra proyección. El plano está dado por dos rectas que se cortan.