

SISTEMA DIÉDRICO I

Intersección de planos y de recta con plano

TEMA 8

Objetivos y orientaciones metodológicas

Como primer problema del espacio que presenta la geometría descriptiva, el alumno obtendrá la intersección de dos planos. Finalmente, determinará el punto de intersección de una recta con un plano, siguiendo el esquema de operaciones a realizar.

Las actividades se centrarán en resolver los problemas de intersección de planos e intersección de recta con plano.

Esta unidad temática abarcará un mínimo de dos clases.

INTERSECCIONES

1. Introducción

Vamos a resolver dos problemas del espacio de constante aplicación en el estudio de la geometría descriptiva:

1. Hallar la recta de intersección de dos planos.
2. Hallar el punto de intersección de una recta con un plano.

2. Intersección de dos planos. Procedimiento general

La intersección de dos planos es una recta que quedará definida cuando se conozcan dos de sus puntos.

Aunque parezca paradójico, para determinar esta intersección se corta a los dos planos por un tercer plano y se determinan las intersecciones con cada uno de ellos; estas rectas se cortan en un punto que será de la intersección buscada; se repite la operación con un segundo plano secante auxiliar y las rectas obtenidas se cortarán en otro punto de la intersección, que con el anterior define la misma. Los planos auxiliares que se toman son los planos de proyección H y V , o planos paralelos a ellos, cuyas intersecciones con los planos dados son las trazas de estos planos, o bien rectas horizontales o frontales de plano.

Sean, por ejemplo, los planos α y β , cuya recta intersección i se trata de hallar (Fig. 1). Se toma un plano cualquiera γ y se determinan las rectas r y s de intersección con los anteriores, las cuales se cortan en el punto 1. Tomando otro plano ε , obtenemos las rectas r_1 y s_1 , que se cortan en el punto 2. La recta que une los puntos 1 y 2 es la intersección i de los dos planos.

A continuación se resuelven algunos casos de intersección de dos planos.

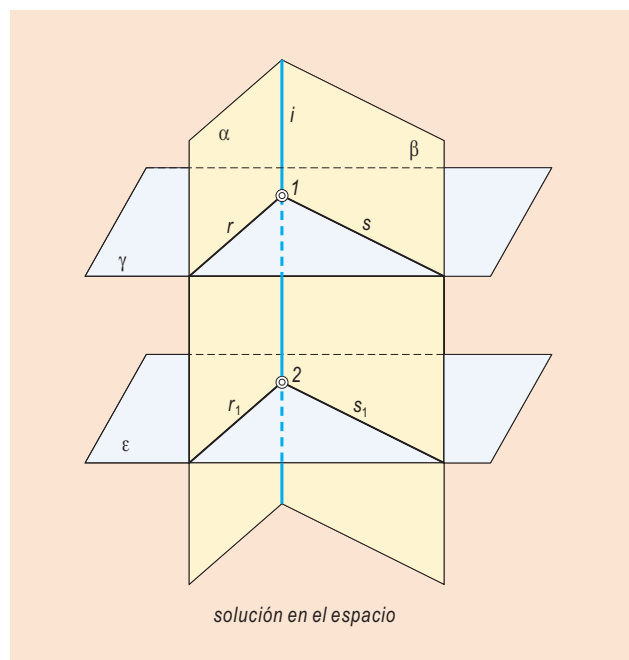


Fig. 1.

3. Intersección de dos planos oblicuos (Figs. 2 y 3)

Resolvemos el problema en el espacio (Fig. 2). Sean los planos $\alpha(\alpha_1-\alpha_2)$ y $\beta(\beta_1-\beta_2)$. Se observa que la recta intersección es la que une los puntos H' y V'' , donde se cortan las trazas del mismo nombre de los dos planos.

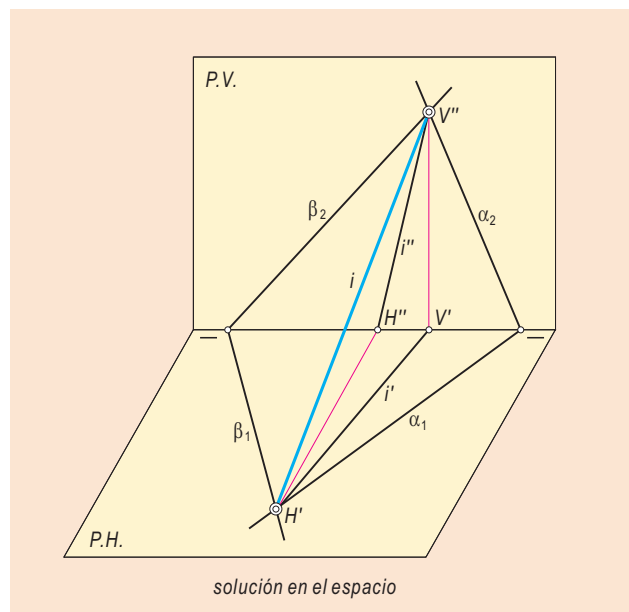


Fig. 2.

Ya en diédrico (Fig. 3), si cortamos a los planos α y β por el plano H , las intersecciones son las rectas $s_2(s'_2-s''_2)$ y $r_2(r'_2-r''_2)$, que son precisamente las trazas horizontales α_1 y β_1 y cuyo punto de intersección es $H'-H''$. Tomando como plano auxiliar secante el plano V , éste corta a los dados según las rectas $s_1(s'_1-s''_1)$ y $r_1(r'_1-r''_1)$, que son las trazas verticales α_2 y β_2 y que se cortan en el punto $V'-V''$.

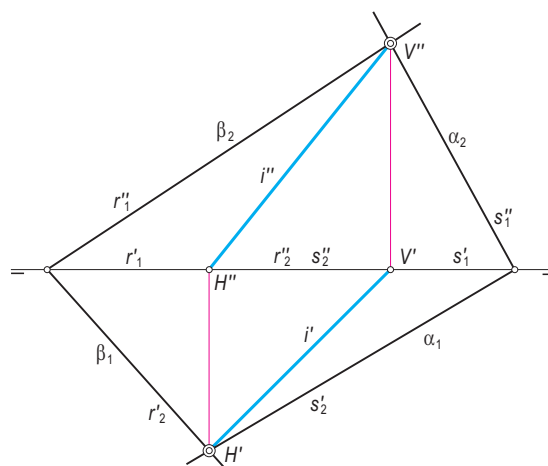


Fig. 3.

La recta $i(i'-i'')$, que une los puntos $H(H'-H'')$ y $V(V'-V'')$, es la intersección de los dos planos.

4. Intersección de un plano proyectante horizontal con un plano proyectante vertical (Fig. 4)

La recta intersección, por pertenecer al plano $\beta(\beta_1-\beta_2)$, se proyecta verticalmente sobre β_2 , ya que el plano es proyectante vertical, y por pertenecer al plano $\alpha(\alpha_1-\alpha_2)$, que es proyectante horizontal, se proyecta horizontalmente sobre α_1 ; la intersección es, pues, la recta $i(i'-i'')$, que pasa por los puntos $H'-H''$ y $V'-V''$, donde se cortan las trazas del mismo nombre de los planos.

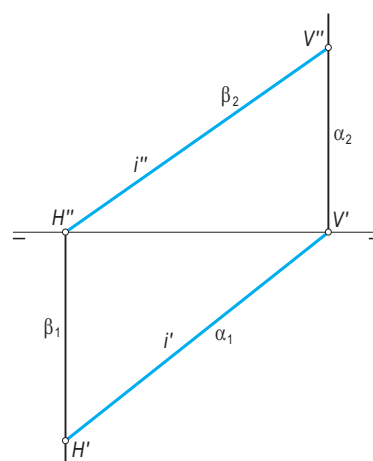


Fig. 4.

5. Intersección de un plano oblicuo con otro horizontal (Fig. 5)

Todo plano horizontal corta a un plano cualquiera según una recta horizontal; en este caso, el plano horizontal $\alpha(\alpha_2)$ corta al plano oblicuo ($\beta_1-\beta_2$) según la horizontal $i'-i''$, que pasa por el punto $V(V'-V'')$, donde se cortan las trazas verticales; la traza β_1 corta a la traza α_1 , que es impropia, en el punto del infinito, por lo que i' y β_1 han de ser paralelas.

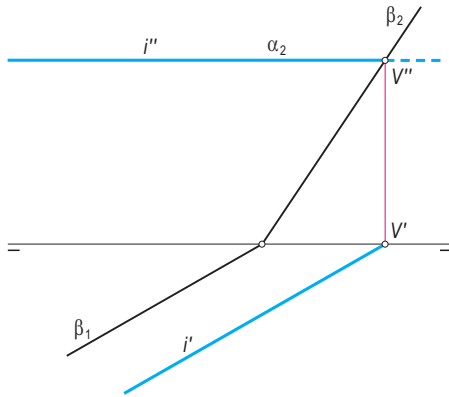


Fig. 5.

6. Intersección de un plano oblicuo con otro de perfil (Fig. 6)

La intersección del plano α , oblicuo, y del β , de perfil, es la recta de perfil $i(i'-i'')$, cuyas trazas son $H'-H''$ la horizontal y $V'-V''$ la vertical; sus proyecciones están confundidas con las trazas β_1 y β_2 del plano del perfil. En la figura, se ha pasado la recta i a tercera proyección, con ayuda de los puntos H y V .

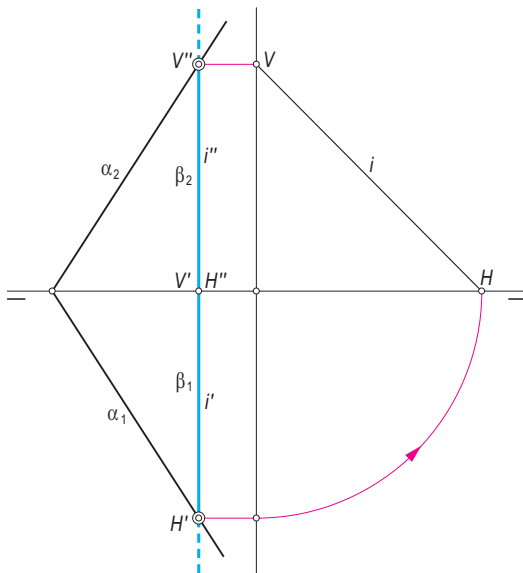


Fig. 6.

7. Intersección de dos planos paralelos a la L.T. (Figs. 7 y 8)

Primer procedimiento (Fig. 7)

Siguiendo el procedimiento general, cortamos a los planos dados α y β por un plano γ oblicuo cualquiera. Los planos α y γ se cortan según la recta $r(r'-r'')$ y los planos β y γ , según la recta $s(s'-s'')$; estas dos rectas se cortan en el punto $1(1'-1'')$, que es de la intersección; como los planos son paralelos a L.T., su intersección también resulta paralela a L.T., por lo que basta trazar por $1'-1''$ las paralelas a L.T. para obtener las proyecciones i' e i'' de la intersección buscada.

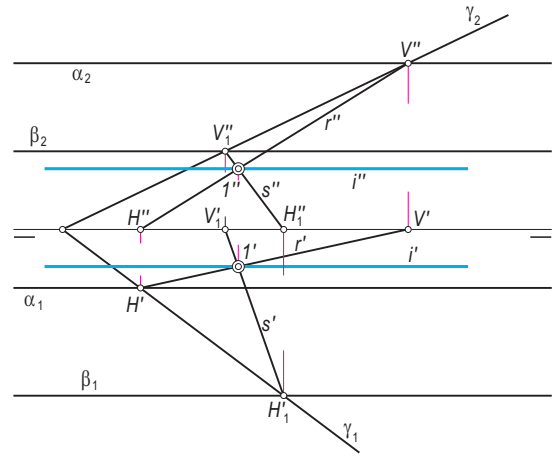


Fig. 7.

Segundo procedimiento (Fig. 8)

Cortando a los dos planos por un plano de perfil, se ven éstos según las rectas α y β , que se cortan en i , proyección tercera de la recta intersección; las proyecciones de la intersección $i'-i''$ se obtienen al proyectar i sobre los dos planos.

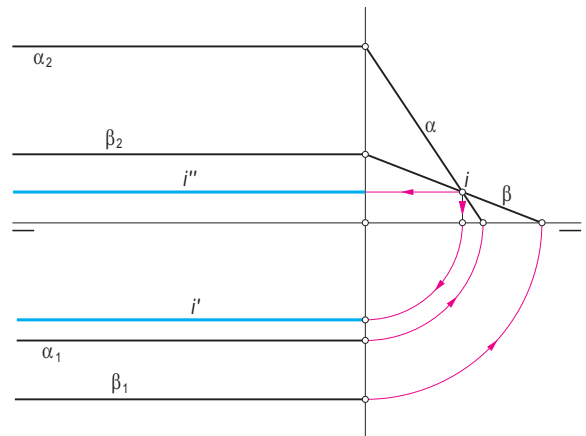


Fig. 8.

8. Intersección de un plano cualquiera con el segundo plano bisector (Fig. 9)

Como la recta ha de estar en el segundo bisector, sus proyecciones estarán confundidas. En la figura, un punto de la intersección es el punto $2'-2''$, donde el plano α corta a la $L.T.$ Sabiendo que los puntos del segundo bisector tienen las proyecciones confundidas, se toma una horizontal $r'-r''$ del plano α y sus proyecciones, prolongadas, se cortan en el punto $1'-1''$ del segundo bisector. La recta que une los puntos 1 y 2 es la $i'-i''$, intersección del plano α con el segundo bisector.

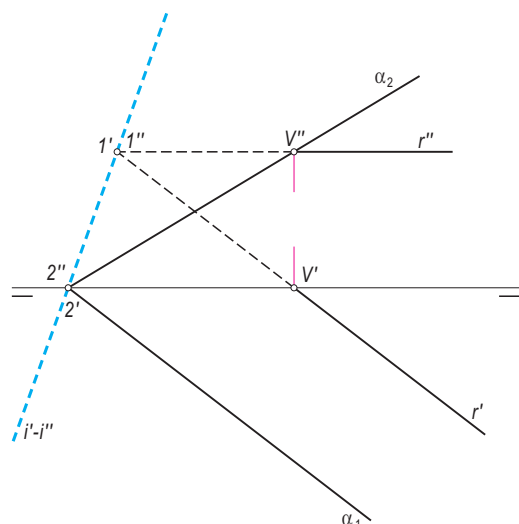


Fig. 9.

Como aplicación de esta recta de intersección de un plano con el segundo bisector resolvemos el problema siguiente:

9. Proyecciones de una figura plana (Fig. 10)

Se trata de resolver el siguiente problema de tipo general:

Dados un plano y una figura contenida en dicho plano, de la que se conoce una de las proyecciones, hallar la otra proyección.

En la Fig. 10, tenemos el plano $\alpha_1-\alpha_2$ y una figura contenida en él que se proyecta verticalmente según un pentágono regular estrellado. Hay que hallar la proyección horizontal de dicha figura.

Este problema se puede resolver por **afinidad**. Las dos proyecciones de una figura plana son figuras afines, siendo los elementos de esta afinidad los siguientes:

- **Dirección de afinidad:** perpendicular a $L.T.$
Dirección D_a .
- **Eje de afinidad:** la recta intersección del plano con el segundo bisector.

Sabemos que los puntos del eje son dobles; según esto, si la recta h' es afín de h'' , el punto M de intersección de ambas es del eje de afinidad; como el punto N de $L.T.$ también es doble, la recta $M-N$ es el eje de afinidad y es precisamente la recta intersección del plano α con el segundo bisector, pues todos sus puntos tienen las proyecciones confundidas. Se halla una pareja de puntos afines, por ejemplo el $1'$ afín de $1''$, por medio de la horizontal $h'-h''$, y a partir de éstos se obtienen los demás puntos.

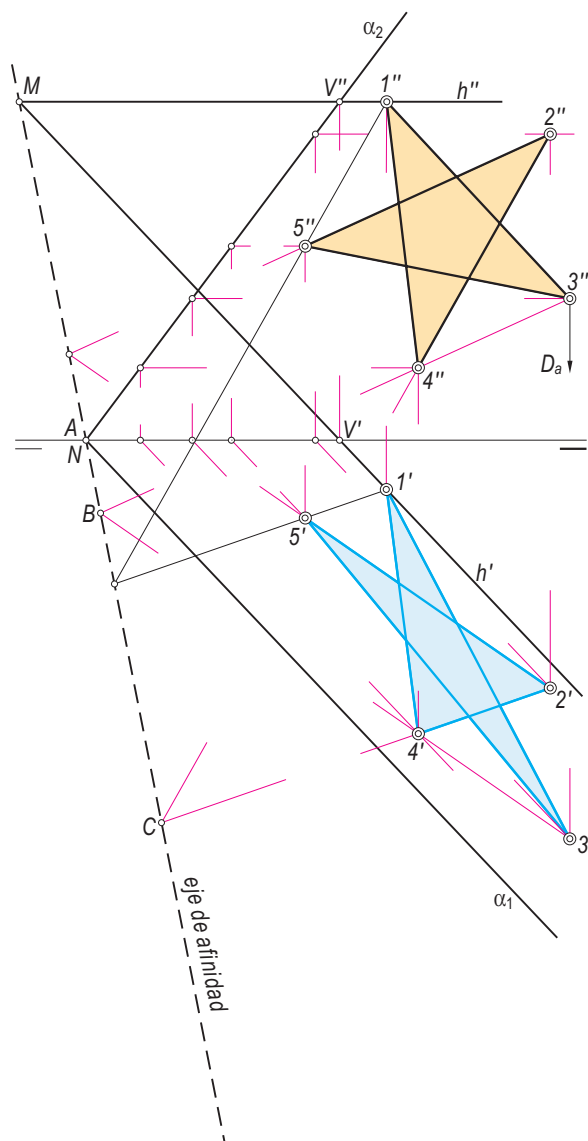


Fig. 10.

10. Intersección de recta y plano (Fig. 11)

En la parte superior izquierda de la figura se indica el procedimiento a seguir en el espacio. Se tiene la recta r y el plano α . Para hallar el punto de intersección, se hace pasar por la recta un plano cualquiera β , se halla la intersección de ambos planos, recta i , y esta recta corta a la r en el punto I , que es el de intersección de la recta r con el plano α .

En diédrico, para facilitar las operaciones, el plano β que se hace pasar por la recta es uno de los proyectantes de ella, en el caso de la figura, es el proyectante horizontal β_1 - β_2 ; este plano y el α se cortan según la recta i' - i'' ; la proyección vertical i'' corta a r'' en el punto I'' y este punto se refiere a r' , con lo que se obtiene I' . Por ser el plano β proyectante horizontal, i' y r' coinciden con β_1 .

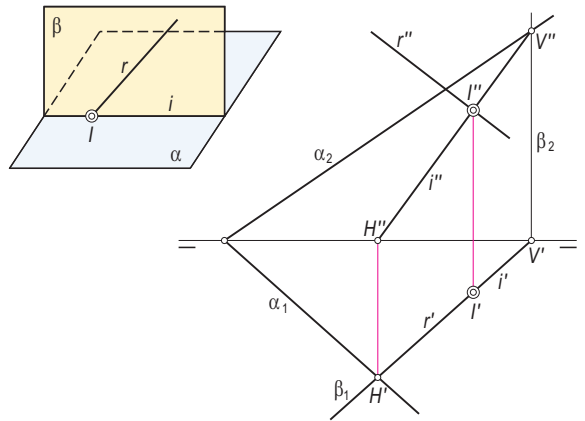


Fig. 11.

11. Repaso de los conocimientos más necesarios de la geometría del espacio

- Si una recta tiene dos puntos en un plano, está en el plano.
- Una recta que sólo tiene un punto común con un plano, corta a dicho plano.
- La recta y el plano que no tienen ningún punto común, se dice que son paralelos.
- Tres puntos del espacio no alineados determinan un solo plano.
- La intersección de dos planos es siempre una recta.
- Un plano puede definirse también de las formas siguientes: por una recta y un punto que no se pertenecen, por dos rectas que se cortan o por dos rectas paralelas.
- Las posiciones relativas de dos rectas son: rectas que se cruzan (no tienen ningún punto en común y no forman plano); rectas que se cortan (determinan un plano y tienen un punto común); rectas paralelas (determinan un plano y tienen un punto común que es el del infinito, llamado *punto impropio*).

ACTIVIDADES

1. Determinar la recta intersección de dos planos, uno oblicuo y otro paralelo a la *L.T.*
2. Hallar la intersección de dos planos proyectantes horizontales.
3. Hallar la intersección de dos planos proyectantes verticales.
4. Hallar la intersección de un plano oblicuo con un plano frontal.
5. Hallar la intersección de un plano oblicuo con un plano proyectante horizontal.
6. Hallar la intersección de un plano oblicuo con un plano proyectante vertical.
7. Hallar la intersección de un plano oblicuo con otro que pasa por la *L.T.*
8. Hallar la intersección de un plano cualquiera con los dos planos bisectores.
9. Determinar la intersección de una recta con los planos bisectores, en los casos siguientes:
 - a) La recta es horizontal y no es paralela a *L.T.*
 - b) La recta es perpendicular a uno de los planos de proyección.
 - c) La recta es de perfil.
10. Determinar el punto común a tres planos. (Primero se halla la intersección de dos planos y después la intersección de la recta obtenida con el tercer plano.)
11. Determinar el punto común a tres planos en el caso siguiente:

Un plano oblicuo cualquiera, otro frontal y un tercero paralelo a la *L.T.*
12. Determinar el punto de intersección de una recta con un plano en los siguientes casos:
 - a) La recta es de punta y el plano es uno oblicuo cualquiera.
 - b) La recta es de perfil y el plano es uno oblicuo cualquiera.
13. En un plano oblicuo hay una figura cuya proyección horizontal es un hexágono regular. Hallar la proyección vertical por afinidad.