UNITÉ 13 : COMBINATOIRE

La **combinatoire** est la branche des mathématiques qui étudie l'énumération, la construction et l'existence de propriétés de configurations qui satisfont certaines conditions établies. De plus, il étudie les ordinations ou groupements d'un certain nombre d'éléments.

1. Des évènements

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat est uniquement déterminé par le hasard.

Les expériences aléatoires simples et composées

- Une **expérience aléatoire simple** est une expérience aléatoire qui se réalise en une seule étape.

L'univers des résultats possibles lors d'une expérience aléatoire simple est formé par l'énumération entre accolades de tous les résultats qu'il est possible d'obtenir.

- Une **expérience aléatoire composée** est une expérience aléatoire qui se réalise en plusieurs étapes.

Pour déterminer le nombre de résultats possibles lors d'une expérience aléatoire à plusieurs étapes, il suffit de multiplier le nombre de résultats possibles correspondant à chacune des étapes.

Les expériences aléatoires composées avec et sans remise

Une **expérience aléatoire avec remise** est une expérience lors de laquelle un élément pigé est toujours remis dans l'univers des possibles avant le tirage suivant.

Les expériences aléatoires composées avec et sans ordre

On peut considérer que l'ordre de tirage est important ou non, c'est-à-dire, dans une expérience aléatoire composée, on peut tenir compte de l'ordre des résultats ou ne pas en tenir compte.

Exemple
Dans un sac, il y a 3 billes vertes et 2 rouges. Piger une bille rouge et une bille verte si l'on remet les billes dans le sac à chaque pige ?

Un événement est une partie (un sous-ensemble) de l'univers des possibles, qui correspond à un résultat ou un ensemble de résultats

Les éléments qui appartiennent à un tel sous-ensemble sont appelés les **résultats** (ou **cas**) **favorables** à la réalisation de l'événement.

On peut qualifier les événements de diverses façons :

– Un événement élémentaire ne contient qu'un seul résultat de l'univers des possibles.
– Un événement impossible ne contient aucun résultat de l'univers des possibles puisqu'il ne peut pas se produire.
– Un événement certain contient tous les résultats de l'univers des possibles puisqu'il se produit toujours.

Une **probabilité** est une valeur qui indique la chance d'obtenir un résultat précis parmi tous les résultats possibles. Cette valeur est toujours comprise entre 0 et 1.

FORMULE DE LAPLACE

Probabilité=nombre de cas favorables / nombre de cas possibles

2. Représentation de l'univers des résultats possibles : Diagramme en arbre et le tableau à double entrée

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est nommé **univers des résultats possibles**.

On représente l'univers des possibles par la lettre oméga Ω.

Diagramme en arbre

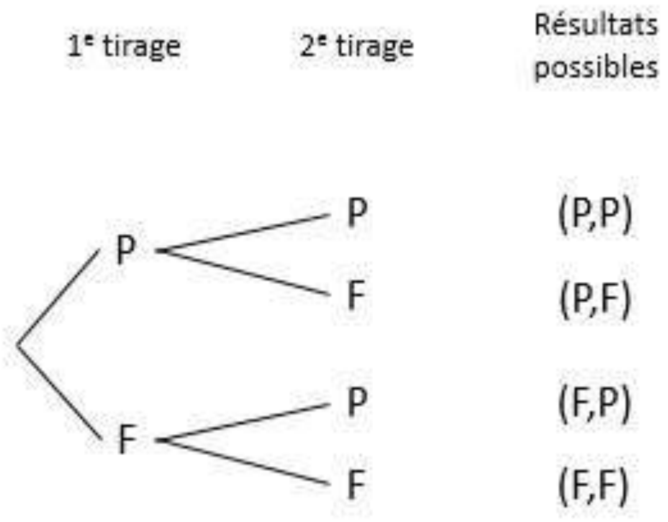
Le diagramme en arbre ou diagramme de probabilité est un outil qui s'utilise pour les problèmes de dénombrement et de probabilité. Le diagramme permet de connaître l'univers des résultats possibles.

Le diagramme en arbre permet de représenter une expérience aléatoire à deux ou plusieurs étapes. Dans ce diagramme, les résultats possibles de chaque étape sont reliés par des branches.

CONSTRUTION : On place chacun des résultats possibles de la première étape sur une branche qui débute à un point de départ donné. À partir de l'extrémité de chacune des branches ainsi tracées, on place chacun des résultats possibles de la seconde étape sur des nouvelles branches. On procède de la même manière pour chaque étape supplémentaire.

Exemple

On veut déterminer le nombre de combinaisons possibles pouvant être formées lors du tirage d'une pièce de monnaie à deux reprises. Le diagramme en arbre ci-dessous illustre toutes les possibilités.



Il y a donc 4 résultats possibles : 2×2=4

Le tableau à double entrée

Le tableau à double entrée, ou grille, permet de représenter une expérience aléatoire à deux étapes.
Remarque : S'il y a plus que deux étapes dans l'expérience, on ne peut pas utiliser le tableau à double entrée.

Dans ce tableau, les en-têtes de rangée présentent les résultats possibles de la première étape et les en-têtes de colonne présentent les résultats possibles de la seconde étape.
CONSTRUTION : On place les résultats possibles d’une des deux étapes dans la première colonne du tableau et on place les résultats possibles de l’autre étape sur la première ligne du tableau. Il reste à indiquer toutes les possibilités dans le tableau.

Exemple 1

On veut déterminer le nombre de combinaisons possibles lorsqu'on tire une pièce de monnaie à deux reprises. Le tableau ci-dessous illustre toutes les possibilités.

Résultats possibles au 2e tirage

Résultats possibles au 1e tirage

	Pile	Face
Pile	(P, P)	(F, P)
Face	(P, F)	(F, F)

Il y a donc 4 résultats possibles : Ω = {(P, P), (F, P), (P, F), (F, F)}.

Exemple 2

Dans un sac, il y a 3 billes : une bille rouge, une bille bleue et une bille verte. On veut déterminer le nombre de combinaisons possibles lorsqu'on tire successivement deux billes du sac.

Si le tirage a lieu **avec remise** de la première bille pigée, le tableau ci-dessous illustre toutes les possibilités.

	Rouge (R)	Bleue (B)	Verte (V)
Rouge (R)	(R, R)	(R, B)	(R, V)
Bleue (B)	(B, R)	(B, B)	(B, V)
Verte (V)	(V, R)	(V, B)	(V, V)

Il y a donc 9 résultats possibles:
Ω = {(R, R), (B, R), (V, R), (R, B), (B, B), (V, B), (R, V), (B, V), (V, V)}

Si le tirage a lieu **sans remise** de la première bille pigée, le tableau ci-dessous illustre toutes les possibilités.

	Rouge (R)	Bleue (B)	Verte (V)
Rouge (R)		(R, B)	(R, V)
Bleue (B)	(B, R)		(B, V)
Verte (V)	(V, R)	(V, B)	

Il y a donc 6 résultats possibles :
Ω = {(B, R), (V, R), (R, B), (V, B), (R, V), (B, V)}

3. Dénombrement

Le **dénombrement** correspond au calcul du nombre de résultats de l'univers des résultats possibles lors d'une expérience aléatoire à plusieurs étapes.

Lors d'une expérience aléatoire à plusieurs étapes, il est souvent utile de dénombrer les résultats possibles pouvant être obtenus. Pour ce faire, on peut recourir à certaines techniques de dénombrement :

- Le principe de multiplication :
Si une première étape peut être effectuée de n_1 manières différentes, puis une deuxième étape peut être effectuée de n_2 manières différentes, et ainsi de suite jusqu'à la k-ième étape. Alors la suite de toutes ces étapes successives peut être effectuée de $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_k$ manières différentes.
C'est ce que l'on appelle le **principe de multiplication**

Exemple

En regardant dans sa garde-robe, Monique constate qu'elle possède 5 chandails, 4 pantalons, 6 paires de souliers et 3 sacs à main.

Combien de tenues différentes peut-elle agencer si on admet qu'une tenue comporte 1 chandail, 1 pantalon, 1 paire de souliers et 1 sac à main ?

Pour trouver le nombre de tenues différentes, on peut utiliser le principe de multiplication.

Première étape : On choisit 1 chandail. Il y a 5 choix.
Deuxième étape : On choisit 1 pantalon. Il y a 4 choix.
Troisième étape : On choisit 1 paire de souliers. Il y a 6 choix.
Quatrième étape : On choisit 1 sac à main. Il y a 3 choix.

On multiplie le nombre de choix possibles à chacune des étapes ensemble.
$5 \times 4 \times 6 \times 3 = 3605 \times 4 \times 6 \times 3 = 360$ tenues différentes.

Monique peut donc agencer 360 tenues différentes.

Remarque : Dans ce cas, faire un arbre des possibilités serait très hasardeux.

4. Des nombres combinatoires ou coefficients binomiaux

– La **notation factorielle**, notée n! , est la façon d'écrire le produit de tous les entiers positifs inférieurs ou égaux à un nombre n, où n est un nombre naturel.

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

La notation factorielle permet de simplifier l'écriture de l'opération mathématique à effectuer. Plutôt que d'écrire le produit de tous les nombres entiers impliqués, il suffit d'écrire l'entier dont on veut calculer la factorielle suivie d'un point d'exclamation.

Remarque : Par convention, 0! = 1.

– **Des nombres combinatoires.**

Donnés deux nombres naturels m et n avec $m \le n$ le nombre combinatoire n sur m est :

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$$

PROPRIÉTÉS

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

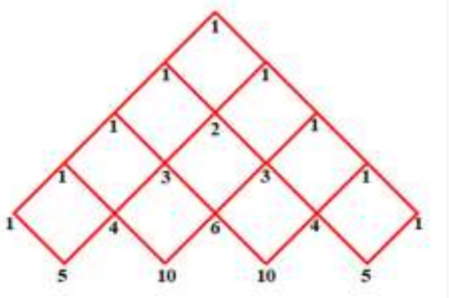
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Cette notion sert à calculer les coefficients du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 \cdot b^n$$

Triangle de Pascal					Développements		
1					***$(x+y)^1$***	=	**x+y**
2	**1**				***$(x+y)^2$***		**$x^2 + 2xy+y^2$**
3	**3**	**1**			***$(x+y)^3$***		**$x^3+ 3x^2y +3xy^2+y^3$**
4	**6**	**4**	**1**		***$(x+y)^4$***		**$x^4+ 4x^3y +6x^2y^2 + 4xy^3+ y^4$**
5	**10**	**10**	**5**	**1**	***$(x+y)^5$***		**$x^5+ 5x^4y + 10x^3y^2+ \ldots$**

Triangle de Pascal (ou Tartaglia)



5. Arrangements

L'**arrangement** d'un ensemble d'éléments est une **disposition ordonnée d'un certain nombre d'éléments** de cet ensemble.
Deux arrangements d'un même ensemble se distinguent par l'ordre de disposition de leurs éléments.

Par exemple, si nous avons un ensemble contenant les lettres {A, B, C}, nous retrouvons les arrangements suivants parmi tous les arrangements possibles de l'ensemble : (A, B) et (B, A).

Le calcul du nombre d'arrangements possibles diffère selon qu'il s'agit d'une expérience avec remise ou sans remise.

FORMULE :

1) Lorsqu'il s'agit d'une expérience **sans remise**, le nombre d'arrangements possibles se calcule à l'aide de la formule suivante :

   Nombre d'arrangements possibles=$\frac{n!}{(n-m)!}$,c'est-à-dire, $A_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$

Où n représente le nombre d'éléments dans l'ensemble et m représente le nombre d'éléments sélectionnés dans l'ensemble.

Exemple

On choisit au hasard deux lettres dans l'ensemble {D, E, F, G}.
Si l'expérience aléatoire est réalisée **sans remise**, il y a 4 éléments possibles pour le 1er tirage et 3 éléments possibles pour le 2e tirage. Les arrangements possibles sont donc les suivants:
(D, E), (D, F), (D, G), (E, D), (E, F), (E, G), (F, D), (F, E), (F, G), (G, D), (G, E) et (G, F).
Il y a donc un total de 12 résultats possibles.

On peut simplifier le dénombrement des résultats possibles en multipliant le nombre d'éléments possibles pour chaque tirage :
4×3=12 arrangements possibles.

Avec la formule de l'encadré ci-haut où n=4 et m=2, on effectue le calcul :
$A_{4,2} = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2}$=12 arrangements possibles.

2) Lorsqu'il s'agit d'une expérience **avec remise (ou avec répétition)**, le nombre d'arrangements possibles se calcule à l'aide de la formule suivante :

   Nombre d'arrangements possibles=n^m , c'est-à-dire, $AR_{n,m} = n^m$

où n représente le nombre d'éléments dans l'ensemble et m représente le nombre d'éléments sélectionnés dans l'ensemble.

Exemple

On choisit au hasard deux lettres dans l'ensemble {D, E, F, G}.
Si l'expérience aléatoire est réalisée **avec remise**, il y a 4 éléments possibles pour le 1er tirage et 4 éléments possibles pour le 2e tirage. Les arrangements possibles sont donc les suivants:
(D, D), (D, E), (D, F), (D, G), (E, D), (E, E), (E, F), (E, G), (F, D), (F, E), (F, F), (F, G), (G, D), (G, E), (G, F) et (G, G). Il y a donc un total de 16 résultats possibles.

On peut simplifier le dénombrement des résultats possibles en multipliant le nombre d'éléments possibles pour chaque tirage : 4×4=16 arrangements possibles.
Avec la formule de l'encadré ci-haut où n=4 et m=2, on effectue le calcul :
$AR_{4,2} = n^m = 4^2$ =16 arrangements possibles.

6. Permutations

Permutations

La **permutation** d'un ensemble d'éléments est une **disposition ordonnée de tous les éléments** de cet ensemble.
Deux permutations d'un même ensemble se distinguent par l'ordre de disposition des éléments qui les composent.
Par exemple, les permutations possibles d'un ensemble contenant les chiffres de 1 à 3 {1, 2, 3} sont les suivantes:
(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).
IMPORTANT Puisque tous les éléments de l'ensemble doivent être utilisés, l'expérience aléatoire est toujours sans remise.
FORMULE : Nombre de permutations d'un ensemble à n éléments distincts :
$P_{n=}$n!=n·(n−1)·(n−2)·····3·2·1
Exemple
On tire quatre billes d'un sac contenant une bille rouge (R), une bille bleue (B), une bille jaune (J) et une bille verte (V). Les résultats possibles sont:
(R, B, J, V), (R, B, V, J), (R, J, B, V), (R, J, V, B), (R, V, B, J), (R, V, J, B), (B, R, J, V), (B, R, V, J), (B, J, R, V), (B, J, V, R), (B, V, R, J), (B, V, J, R), (J, R, B, V), (J, R, V, B), (J, B, R, V), (J, B, V, R), (J, V, R, B), (J, V, B, R), (V, R, B, J), (V, R, J, B), (V, B, R, J), (V, B, J, R), (V, J, R, B), (V, J, B, R).
Il y a donc 24 permutations possibles pour cet ensemble.

Pour simplifier le calcul des permutations possibles, il suffit de multiplier le nombre d'éléments possibles pour chaque tirage. Dans ce cas-ci, le calcul sera 4·3·2·1=24.

REMARQUE : On peut utiliser la notation factorielle afin de déterminer le nombre de permutations possibles d'un ensemble de n éléments. $P_{4=}4!$ =4·3·2·1=24

Permutations avec répétitions

Nombre de permutations de n éléments dont n_1 sont identiques, n_2 sont identiques, ... et n_k sont identiques, avec n = $n_1 + n_2 + ... + n_k$
Modèle :Dans une urne se trouvent n_1 jetons identiques de type 1, n_2 jetons identiques de type 2, ... et n_k jetons identiques de type k, avec n = $n_1 + n_2 + ... + n_k$ (on peut distinguer les *k* types); on tire successivement sans remise tous les jetons et on note les résultats dans l'ordre. Combien de résultats possibles?

$$P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \dots \cdot n_k!}$$

Exemple 1
Combien de mots peut-on former avec 2 R, 3 V et 4 B ?
Exemples de mots : RRVVVBBBB, RVBBRBVVB, ...
Il s'agit de compter des « arrangements » puisque l'ordre des éléments doit être pris en compte.
Exemple 2
Dans une urne se trouvent 2 jetons rouges identiques, 3 jetons verts identiques et 4 jetons bleus identiques ; on tire successivement sans remise tous les jetons et on note les résultats dans l'ordre. Combien de résultats possibles ?

Permutation circulaire : Les permutations circulaires sont les différentes dispositions qu'on peut donner aux objets placés sur le périmètre d'une circonférence. Alors, pour le cas de trois objets, les permutations abc, bca, cab n'en font qu'une, et de même pour bac, acb, cba, puisqu'on petit commencer par un quelconque des objets. Il n'y a donc que deux permutations circulaires de trois objets ; et en général n objets présentent $PC_{n=}$ (n-1)! permutations circulaires différentes.

7. Combinaisons

La **combinaison** d'un ensemble d'éléments est une **disposition non ordonnée d'un certain nombre d'éléments** de cet ensemble.
Une combinaison correspond donc à un sous-ensemble d'éléments non ordonnés dans un ensemble. On détermine le nombre de combinaisons possibles d'une expérience aléatoire **sans remise** de la façon suivante :

FORMULE :

1) Lorsqu'il s'agit d'une expérience aléatoire effectuée **sans remise**, le nombre de combinaisons possibles se calcule à l'aide de la formule suivante :

$$C_{n,m} = \frac{A_{n,m}}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$$

Où n représente le nombre d'éléments possibles dans l'ensemble et m représente le nombre d'éléments sélectionnés dans l'ensemble.

Le calcul du nombre de combinaisons possibles fait donc appel aux notions de permutation et d'arrangement.

Exemple

On tire au hasard trois billes d'un sac contenant une bille rouge (R), une bille bleue (B), une bille jaune (J) et une bille verte (V). On détermine le nombre de combinaisons possibles à l'aide de la formule ci-dessus.

$$C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)! \cdot 3!} = \frac{24}{1 \cdot 6} = 4$$

En tenant compte de l'ordre, il y a 24 arrangements possibles:
(R, B, J), (R, B, V), (R, J, B), (R, J, V), (R, V, B), (R, V, J), (B, R, J), (B, R, V), (B, J, R), (B, J, V), (B, V, R), (B, V, J), (J, R, B), (J, R, V), (J, B, R), (J, B, V), (J, V, R), (J, V, B), (V, R, B), (V, R, J), (V, B, R), (V, B, J), (V, J, R), (V, J, B).
À l'aide des couleurs, on constate qu'il y a 6 façons différentes de piger trois billes de couleur si l'on tient compte de l'ordre. Ceci correspond au nombre de permutations possibles.

Le nombre de combinaisons possibles est donc de 4. Ces combinaisons sont les suivantes :
(R, B, J), (R, B, V), (J, B, V), (J, V, R).

2) Lorsqu'il s'agit d'une expérience aléatoire effectuée **avec remise (ou avec répétition)**, le nombre de combinaisons possibles se calcule à l'aide de la formule suivante :

$$CR_{n,m} = \binom{n+m-1}{m} = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)! \cdot m!}$$

Où n représente le nombre d'éléments dans l'ensemble et m représente le nombre d'éléments sélectionnés dans l'ensemble.

Exemple

On tire au hasard trois billes dans une urne qui contient une bille rouge, deux billes bleues distinctes et quatre billes vertes distinctes. On veut déterminer le nombre de combinaisons possibles si on effectue les tirages avec remise.
Ici, n=7 et m=3.
Avec la formule de l'encadré ci-haut on effectue le calcul suivant :

$$CR_{7,3} = \binom{7+3-1}{3} = \frac{(7+3-1)!}{(7-1)! \cdot 3!} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = 84$$