Propiedades sucesión de Fibonacci

1. $a_n = \frac{a_{n-2}+a_{n+1}}{2}$

Demostración:

Aplicando la definición de la sucesión sabemos que $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$, luego:

$\frac{a_{n-2}+a_{n+1}}{2} = \frac{a_{n-2}+a_{n-1}+a_n}{2} = \frac{a_n+a_n}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n$ **cqd**

2. $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_{n+2} - 1$

Demostración:

Utilizaremos el método de inducción.

- Veamos se cumple para n=1

  $a_1 = a_{1+2} - 1$

  $a_1 = a_3 - 1$

  1 = 2-1 se cumple

- Supongamos que es cierto para n

  $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_{n+2} - 1$

- Veamos se cumple para n+1

  $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} = a_{(n+1)+2} - 1$

  Como se cumple para n, tenemos que:

  $a_{n+2} - 1 + a_{n+1} = a_{(n+1)+2} - 1$, simplificando

  $a_{n+2} + a_{n+1} = a_{n+3}$, lo cual es cierto por como se define la sucesión. **cqd**

3. $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n-1} = a_{2n}$

Demostración:

Utilizaremos el método de inducción.

- Veamos se cumple para n=1

  $a_1 = a_{2\cdot 1}$
  $a_1 = a_2$, es decir, 1 = 1 se cumple

- Supongamos que es cierto para n

  $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n-1} = a_{2n}$

- Veamos se cumple para n+1

  $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n-1} + a_{2n+1} = a_{2(n+1)}$

  Como se cumple para n, tenemos que:

  $a_{2n} + a_{2n+1} = a_{2n+2}$, lo cual es cierto por como se define la sucesión. **cqd**

4. $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$

Demostración:

Utilizaremos el método de inducción.

- Veamos se cumple para n=1

  $a_2 = a_{2\cdot 1+1} - 1$

  $a_2 = a_3 - 1$, es decir, 1 = 2 – 1 se cumple

- Supongamos que es cierto para n

  $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$

- Veamos se cumple para n+1

  $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2n\,+}\, a_{2n+2} = a_{2(n+1)+1} - 1$

  Como se cumple para n, tenemos que:

  $a_{2n+1} - 1 + a_{2n+2} = a_{2n+3} - 1$, simplificando

  $a_{2n+1} + a_{2n+2} = a_{2n+3}$ lo cual es cierto por como se define la sucesión. **cqd**

5. $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = a_n \cdot a_{n+1}$

Demostración:

Utilizaremos el método de inducción.

- Veamos se cumple para n=1

  $a_1^2 = a_1 \cdot a_2$, es decir, $1^2 = 1 \cdot 1$ se cumple

- Supongamos que es cierto para n

  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = a_n \cdot a_{n+1}$

- Veamos se cumple para n+1

  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{n+1} \cdot a_{(n+1)+1}$

  Como se cumple para n, tenemos que:

  $a_n \cdot a_{n+1} + a_{n+1}^2 = a_{n+1} \cdot a_{n+2}$, saco factor común

  $a_{n+1} \cdot (a_n + a_{n+1}) = a_{n+1} \cdot a_{n+2}$ Por definición $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$, luego

  $a_{n+1} \cdot a_{n+2} = a_{n+1} \cdot a_{n+2}$ **cqd**

6. $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} = 1 - a_{2n-1}$

Demostración:

Sabemos que:

$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1} = a_{2n}$

$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$

Ordenando los términos tenemos que:

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} = (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1}) - (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n}) =$

$= a_{2n} - (a_{2n+1} - 1) = a_{2n} - (a_{2n-1} + a_{2n}) + 1 = -a_{2n-1} + 1 = 1 - a_{2n-1}$ **cqd**

7. $a_n \cdot a_{n+1} - a_{n-1} \cdot a_{n-2} = a_{2n-1}$

Demostración:

Usando la propiedad 5, tenemos que:

$(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + \dots + a_n{}^2) - (a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + \dots + a_{n-2}{}^2) = a_{2n-1}$, simplificando queda

$a_{n-1}{}^2 + a_n{}^2 = a_{2n-1}$ **cqd**

8. $a_{n+4} = 5\, a_n + 3\, a_{n-1}$

Demostración:

Aplicando la definición de la sucesión sucesivamente hasta expresar todos los sumandos como a_n y a_{n-1} tenemos que:

$a_{n+4} = a_{n+2} + a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+1} + a_{n+2} = a_n + a_{n-1} + a_n + a_{n-1} + a_n + a_n + a_{n+1} =$

$= a_n + a_{n-1} + a_n + a_{n-1} + a_n + a_n + a_{n-1} + a_n = 5\, a_n + 3\, a_{n-1}$ **cqd**

9. $a_{n+3} = 2\, a_{n+1} + a_n$

Demostración:

Aplicando la definición de la sucesión tenemos que:

$a_{n+3} = a_{n+1} + a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + a_{n+1} = 2\, a_{n+1} + a_n$ **cqd**

10. $a_{n+4} = 3\, a_{n+1} + 2\, a_n$

Demostración:

Aplicando la definición de la sucesión tenemos que:

$a_{n+4} = a_{n+2} + a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+1} + a_{n+2} = a_n + a_{n+1} + a_{n+1} + a_n + a_{n+1} = 3\, a_{n+1} + 2\, a_n$ **cqd**

11. $a_{n+5} = 5\, a_{n+1} + 3\, a_n$ (es la misma que la propiedad 8 cambiando n+1 por n)

Demostración:

Aplicando la definición de la sucesión tenemos que:

$a_{n+5} = a_{n+3} + a_{n+4}$ y usando las propiedades 9 y 10 tenemos que:

$a_{n+5} = a_{n+3} + a_{n+4} = 2\, a_{n+1} + a_n + 3\, a_{n+1} + 2\, a_n = 5\, a_{n+1} + 3\, a_n$ **cqd**

12. $a_{n+m} = a_{n-1} \cdot a_m + a_n \cdot a_{m+1}$ (Generalización propiedades 9, 10 y 11)

Demostración:

Utilizaremos el método de inducción. Fijamos n y lo probamos para los valores de m.

- Veamos se cumple para m=1

  $a_{n+1} = a_{n-1} . a_1 + a_n . a_{1+1}$

  $a_{n+1} = a_{n-1} . a_1 + a_n . a_2$, como $a_1 = a_2 = 1$ se tiene que

  $a_{n+1} = a_{n-1} . + a_n$, lo cual es cierto por como se define la sucesión.

- Supongamos que es cierto para m y m+1

  para m : $a_{n+m} = a_{n-1} . a_m + a_n . a_{m+1}$
  para m+1: $a_{n+(m+1)} = a_{n-1} . a_{m+1} + a_n . a_{(m+1)+1}$, es decir, $a_{n+m+1} = a_{n-1} . a_{m+1} + a_n . a_{m+2}$

- Veamos se cumple para m+2

  $a_{n+(m+2)} = a_{n-1} . a_{m+2} + a_n . a_{(m+2)+1}$, es decir, $a_{n+(m+2)} = a_{n-1} . a_{m+2} + a_n . a_{m+3}$

  Por definición, $a_{n+(m+2)} = a_{n+m} + a_{n+(m+1)}$

  Usando las hipótesis de que es cierto para m y m+1, tenemos que:

  $a_{n+(m+2)} = a_{n+m} + a_{n+(m+1)} = a_{n-1} . a_m + a_n . a_{m+1} + a_{n-1} . a_{m+1} + a_n . a_{m+2} =$

  $= a_{n-1} \cdot (a_m + a_{m+1}) + a_n \cdot (a_{m+1} + a_{m+2}) = a_{n-1} \cdot a_{m+2} + a_n \cdot a_{m+3}$ **cqd**

13. $a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 = a_{2n}$

Demostración:

Sabemos que $a_{n+m} = a_{n-1} \cdot a_m + a_n \cdot a_{m+1}$ (propiedad 12) si m=n tenemos que:

$a_{2n} = a_{n+n} = a_{n-1} \cdot a_n + a_n \cdot a_{n+1} = a_n \cdot (a_{n-1} + a_{n+1}) = *$

como $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$, si despejamos a_n tenemos que $a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$, sustituyendo queda:

$* = (a_{n+1} - a_{n-1}) \cdot (a_{n-1} + a_{n+1}) = a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2$ (usando la identidad notable) **cqd**.

14. $a_{n-1}^2 + a_n^2 = a_{2n-1}$

Demostración:

Utilizaremos el método de inducción.

- Veamos se cumple para n=2

  $a_{2-1}^2 + a_2^2 = a_{2\cdot 2-1}$

  $a_1^2 + a_2^2 = a_3$

  $1^2 + 1^2 = 2$ se cumple

- Supongamos que es cierto para n

  $a_{n-1}^2 + a_n^2 = a_{2n-1}$

- Veamos se cumple para n+1

  $a_{(n+1)-1}^2 + a_{n+1}^2 = a_{2(n+1)-1}$

  $a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{2n+1}$, como $a_{2n+1} = a_{2n-1} + a_{2n}$

  $a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{2n-1} + a_{2n}$

  usando la hipótesis de inducción $a_{2n-1} = a_{n-1}^2 + a_n^2$

  tenemos que :

  $a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{n-1}^2 + a_n^2 + a_{2n}$ despejando a_{2n} tenemos que

  $a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 = a_{2n}$ que es la propiedad 13.

  Luego la propiedad 14 es cierta. **cqd**

15. $a_3 + a_6 + ... + a_{3n} = \frac{1}{2} \cdot (a_{3n+2} - 1)$

Demostración:

Utilizaremos el método de inducción.

- Veamos se cumple para n=1

  $a_3 = \frac{1}{2} \cdot (a_{3\cdot 1+2} - 1)$

  $a_3 = \frac{1}{2} \cdot (a_5 - 1)$

  $2= \frac{1}{2} \cdot (5- 1)$ se cumple.

- Supongamos que es cierto para n
  $a_3 + a_6 + ... + a_{3n} = \frac{1}{2} \cdot (a_{3n+2} - 1)$

- Veamos se cumple para n+1

  $a_3 + a_6 + ... + a_{3n} + a_{3(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot (a_{3(n+1)+2} - 1)$ usando la hipótesis de inducción

  $\frac{1}{2}\cdot (a_{3n+2} - 1) + a_{3(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot (a_{3n+5} - 1)$, multiplicamos toda la expresión por 2

  $(a_{3n+2} - 1) + 2\cdot a_{3(n+1)} = (a_{3n+5} - 1)$ simplificando

  $a_{3n+2} + 2\cdot a_{3n+3} = a_{3n+5}$, arreglamos los subíndices

  $a_{3n+2} + 2\cdot a_{(3n+2)+1} = a_{(3n+2)+3}$ esta igualdad es cierta por la propiedad **9** que dice:

  $a_{n+3} = 2\, a_{n+1} + a_n$, basta con cambiar n por 3n+2. **cqd**

16. $a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+3}$

Demostración:

Utilizaremos el método de inducción.

- Veamos se cumple para n=1

  $a_{1+2}^2 - a_{1+1}^2 = a_1 \cdot a_{1+3}$

  $a_3^2 - a_2^2 = a_1 \cdot a_4$. Es decir, $2^2 - 1^2 = 1 \cdot 3$ se cumple.

- Supongamos que es cierto para n

  $a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+3}$

- Veamos se cumple para n+1

  $a_{(n+1)+2}^2 - a_{(n+1)+1}^2 = a_{n+1} \cdot a_{(n+1)+3}$ es decir, $a_{n+3}^2 - a_{n+2}^2 = a_{n+1} \cdot a_{n+4}$

  En este caso, vamos a desarrollar ambos miembros hasta obtener la misma expresión.

  1r miembro:

  $a_{n+3}^2 - a_{n+2}^2 = a_{n+3} \cdot a_{n+3} - a_{n+2} \cdot a_{n+2} = (a_{n+1} + a_{n+2})^2 - a_{n+2} \cdot (a_n + a_{n+1}) =$

  $= a_{n+1}^2 + 2 \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} + a_{n+2}^2 - a_{n+2} \cdot a_n - a_{n+2} \cdot a_{n+1} =$

  $= a_{n+1}^2 + 2 \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} + (a_n + a_{n+1})^2 - a_{n+2} \cdot a_n - a_{n+2} \cdot a_{n+1} =$

  $= a_{n+1}^2 + 2 \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} + a_n^2 + 2a_n \cdot a_{n+1} + a_{n+1}^2 - a_{n+2} \cdot a_n - a_{n+2} \cdot a_{n+1} =$

  $= 2\, a_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n+1} \cdot a_{n+2} + 2a_n \cdot a_{n+1} - a_{n+2} \cdot a_n =$

  $= 2\, a_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n+1} \cdot a_{n+2} + 2a_n \cdot a_{n+1} - (a_n + a_{n+1}) \cdot a_n =$

  $= 2\, a_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n+1} \cdot a_{n+2} + 2a_n \cdot a_{n+1} - a_n^2 - a_{n+1} \cdot a_n =$

  $= 2\, a_{n+1}^2 + a_{n+1} \cdot a_{n+2} + a_n \cdot a_{n+1} = 2\, a_{n+1}^2 + a_{n+1} \cdot (a_n + a_{n+1}) + a_n \cdot a_{n+1} =$

  $= 2\, a_{n+1}^2 + a_{n+1} \cdot a_n + a_{n+1}^2 + a_n \cdot a_{n+1} = 3\, a_{n+1}^2 + 2\, a_{n+1} \cdot a_n = a_{n+1} \cdot (3\, a_{n+1} + 2\, a_n)$

  2º miembro:

  $a_{n+1} \cdot a_{n+4} = a_{n+1} \cdot (a_{n+2} + a_{n+3}) = a_{n+1} \cdot [(a_n + a_{n+1}) + (a_{n+1} + a_{n+2})] =$

  $= a_{n+1} \cdot \{[a_n + a_{n+1}] + [a_{n+1} + (a_n + a_{n+1})]\} = a_{n+1} \cdot (2a_n + 3a_{n+1})$

  Ambas expresiones son iguales, la propiedad es cierta. **cqd**

17. $a_{n+1} \cdot a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n$ (Identidad de Cassini)

Demostración:

Utilizaremos el método de inducción.

- Veamos se cumple para n=2

  $a_{2+1} \cdot a_{2-1} - a_2^2 = (-1)^2$

  $a_3 \cdot a_2 - a_2^2 = 1$

  $2 \cdot 1 - 1^2 = 1$ se cumple.

- Supongamos que es cierto para n

  $a_{n+1} \cdot a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n$

- Veamos se cumple para n+1

  $a_{(n+1)+1} \cdot a_{(n+1)-1} - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$, es decir

  $a_{n+2} \cdot a_n - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$

  Usando la definición de la sucesión y aplicando la hipótesis de inducción, tenemos que:

  $(a_n + a_{n+1}) \cdot a_n - a_{n+1} \cdot a_{n+1} = (a_n + a_{n+1}) \cdot a_n - (a_{n-1} + a_n) \cdot a_{n+1} =$

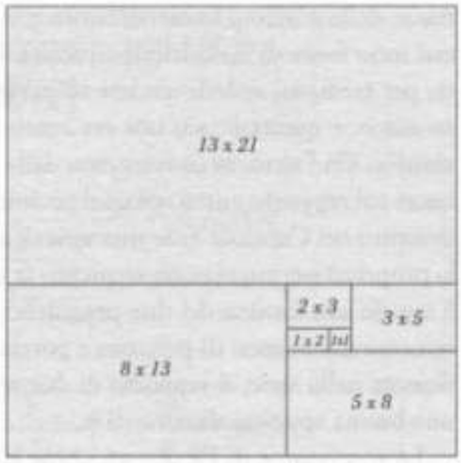
  $= (a_n \cdot a_n + a_{n+1} \cdot a_n) - (a_{n-1} \cdot a_{n+1} + a_n \cdot a_{n+1}) = a_n \cdot a_n - a_{n-1} \cdot a_{n+1} =$

  $= a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = -(a_{n-1} \cdot a_{n+1} - a_n^2) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$ **cqd**

18. $a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + \ldots + a_{2n-1} \cdot a_{2n} = a_{2n}^2$

Demostración:

Haremos una demostración geométrica.



Los términos de la sucesión de Fibonacci son:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21…

Si dibujamos rectángulos de dimensiones: a_1 y a_2; a_2 y a_3 ; a_3 y a_4 ... y los disponemos como la figura de la derecha, podemos comprobar que al sumar las áreas de los rectángulos que van formando cuadrados, se cumple la propiedad.

Demostremos los 4 primeros casos:

- n=1

  $a_1 \cdot a_2 = a_{2\cdot 1}^2$

  $1 \cdot 1 = 1^2$ se cumple

- n=2

  $a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_4 = a_{2\cdot 2}^2$

  $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 3^2$ se cumple

- n=3

  $a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_4 + a_4 \cdot a_5 + a_5 \cdot a_6 = a_{2\cdot 3}^2$

  $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 8 = 8^2$ se cumple

- n=4

  $a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_4 + a_4 \cdot a_5 + a_5 \cdot a_6 + a_6 \cdot a_7 + a_7 \cdot a_8 = a_{2\cdot 4}^2$

  $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + 8 \cdot 13 + 13 \cdot 21 = 21^2$ se cumple

19. El límite cuando n tiende a infinito del cociente de dos términos consecutivos es el número áureo.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \phi$$

Recuerda: el número áureo es $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ *y* $\phi^{\infty} = \infty$

Además: $-1 < \phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$ *y* $\phi'^{\infty} = 0$

Demostración:

Para su demostración utilizaremos el término general de la sucesión de Fibonacci.

Éste es: $a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

Calculemos pues el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}}{\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} - \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} =$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} - \frac{0}{\infty - 0} =$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}} - 0 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}} =$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{(1-\sqrt{5})^n}{(1+\sqrt{5})^n}} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \frac{1}{1-0} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \phi \quad \textbf{cqd}$$

20. El límite cuando n tiende a infinito del cociente de dos términos consecutivos es el inverso del número áureo

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{\phi}$

Demostración:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \frac{1}{\phi}$ **cqd**

21. El límite cuando n tiende a infinito de dos términos alternos cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{1}{\phi + 1}$$

Demostración:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{a_{n+2}}{a_n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}+a_n}{a_n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}+1} = \frac{1}{\phi+1}$ **cqd**

22. El límite cuando n tiende a infinito de dos términos alternos cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-2}} = \phi + 1$$

Demostración:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{a_{n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} + 1 = \phi + 1$ **cqd**