APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

VOLUMEN DE UN CUERPO DE REVOLUCIÓN SOBRE EL EJE X

$$V = \pi\cdot\int_a^b [f(x)]^2\cdot dx$$

LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\cdot dx$$

ÁREA DE UN CUERPO DE REVOLUCIÓN SOBRE EL EJE X

$$A = 2\pi\cdot\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\cdot dx$$

DEMOSTRACIÓN DEL ÁREA DE UN TRIÁNGULO

Dada la recta que corta a los ejes coordenados en los puntos (0,b) y (a,0). Calcula el área comprendida entre los ejes y la recta.
La recta es y=m·x+n
Luego b = m·0 +n entonces n = b

0 = m·a +n entonces m = $\dfrac{-n}{a} = \dfrac{-b}{a}$

es decir la recta es y = $\dfrac{-b}{a}\cdot x + b$

$$A = \int_0^a f(x)\cdot dx = \int_0^a \left(\frac{-b}{a}\cdot x + b\right)\cdot dx = \left[\frac{-b}{a}\cdot\frac{x^2}{2} + b\cdot x\right]_0^a = \left(\frac{-b}{a}\cdot\frac{a^2}{2} + b\cdot a\right) - \left(\frac{-b}{a}\cdot\frac{0^2}{2} + b\cdot 0\right) = \frac{b\cdot a}{2}$$

DEMOSTRACIÓN DEL ÁREA DEL CÍRCULO

Circulo de centro C(0,0) y radio r $x^2+y^2 = r^2$ despejo y f(x) = $\sqrt{r^2 - x^2}$
Consideramos la región del primer cuadrante

$$A = \int_0^r f(x)\cdot dx = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\cdot dx = \left[\frac{r^2}{2}\cdot arcsen\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{x}{r}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]_0^r =$$

$$= \left(\frac{r^2}{2}\cdot arcsen\left(\frac{r}{r}\right) + \frac{x}{r}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{r}{r}\right)^2}\right) - \left(\frac{r^2}{2}\cdot arcsen\left(\frac{0}{r}\right) + \frac{0}{r}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{0}{r}\right)^2}\right) =$$

$$\frac{r^2}{2}\cdot arcsen1 - \frac{r^2}{2}\cdot arcsen0 = \frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{r^2\cdot\pi}{4}$$

como son 4 partes iguales multiplico por 4 y tengo el área del círculo.

$$A = 4\cdot\frac{r^2\cdot\pi}{4} = r^2\cdot\pi$$

DEMOSTRACIÓN DEL ÁREA DE LA ELIPSE

Ecuación de la elipse centrada en el origen de eje mayor 2a y eje menor 2b $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

despejo y f(x) = $\sqrt{b^2\cdot\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$

Consideramos la región del primer cuadrante

$$A=\int_0^a f(x)\cdot dx=\int_0^a\sqrt{b^2\cdot\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\cdot dx=b\cdot\int_0^a\sqrt{\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}\cdot dx=b\cdot\frac{a}{2}\cdot\left[arcsen\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{a}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right]_0^a=$$

$$=b\cdot\frac{a}{2}\cdot\left[\left(arcsen\left(\frac{a}{a}\right)+\frac{a}{a}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{a}{a}\right)^2}\right)-\left(arcsen\left(\frac{0}{a}\right)+\frac{0}{a}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{0}{a}\right)^2}\right)\right]=$$

$$b\cdot\frac{a}{2}\cdot[arcsen1-arcsen0]=b\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{a\cdot b\cdot\pi}{4}$$

como son 4 partes iguales multiplico por 4 y tengo el área del círculo.

$$A=4\cdot\frac{a\cdot b\cdot\pi}{4}=a\cdot b\cdot\pi$$

DEMOSTRACIÓN DE LA LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA

Circulo de centro C(0,0) y radio r $x^2+y^2=r^2$ despejo y f(x) = $\sqrt{r^2-x^2}$,

f ’(x) = $\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$

Consideramos la región del primer cuadrante

$$L=\int_0^r\sqrt{1+[f'(x)]^2}\cdot dx=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\cdot dx=r\cdot\int_0^r\sqrt{\frac{1}{r^2-x^2}}\cdot dx=r\cdot\int_0^r\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=$$

$$=\int_0^r\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}dx=\left[r\cdot arcsen\left(\frac{x}{r}\right)\right]_0^r=\left[r\cdot arcsen\left(\frac{r}{r}\right)\right]-\left[r\cdot arcsen\left(\frac{0}{r}\right)\right]=$$

$$r\cdot arcsen1-r\cdot arcsen0=r\cdot\frac{\pi}{2}$$

como son 4 partes iguales multiplico por 4 y tengo la longitud de la circunferencia.

$$L=4\cdot r\cdot\frac{\pi}{2}=2\cdot r\cdot\pi$$

DEMOSTRACIÓN DEL ÁREA DE LA ESFERA

Circulo de centro C(0,0) y radio r $x^2+y^2=r^2$ despejo y f(x) = $\sqrt{r^2-x^2}$,

$f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$

$$A=2\pi\cdot\int_{-r}^{r} f(x)\cdot\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\cdot dx=2\pi\cdot\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left[\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right]^2}\cdot dx=$$

$$=2\pi\cdot r\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\cdot dx=2\pi\cdot r\int_{-r}^{r}1\cdot dx=2\pi\cdot r\cdot\left[x\right]_{-r}^{r}=2\pi\cdot r\cdot\left[r-(-r)\right]=$$

$$=2\cdot\pi\cdot r\cdot 2\cdot r=4\cdot\pi\cdot r^2$$

DEMOSTRACIÓN DEL VOLUMEN DE UNA ESFERA

$$V=\pi\cdot\int_{-r}^{r}\left[f(x)\right]^2\cdot dx=\pi\cdot\int_{-r}^{r}r^2-x^2\cdot dx=\pi\cdot\left[r^2\cdot x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=$$

$$=\pi\cdot\left(r^2\cdot r-\frac{r^3}{3}\right)-\left(r^2\cdot(-r)-\frac{(-r)^3}{3}\right)=\pi\cdot\left[\left(\frac{2\cdot r^3}{3}\right)-\left(\frac{-2\cdot r^3}{3}\right)\right]=\pi\cdot\frac{4\cdot r^3}{3}$$