GÉOMÉTRIE

UNITÉ 8 : DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES. DES FIGURES PLANES

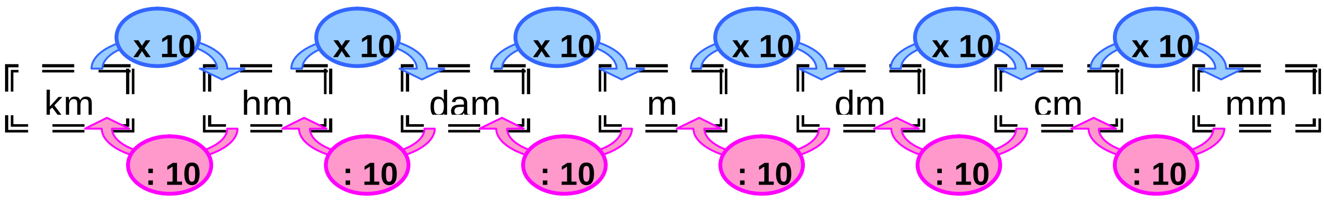
POUR DÉBUTER

Il faut rappeler

- **Les unités de mesure :**

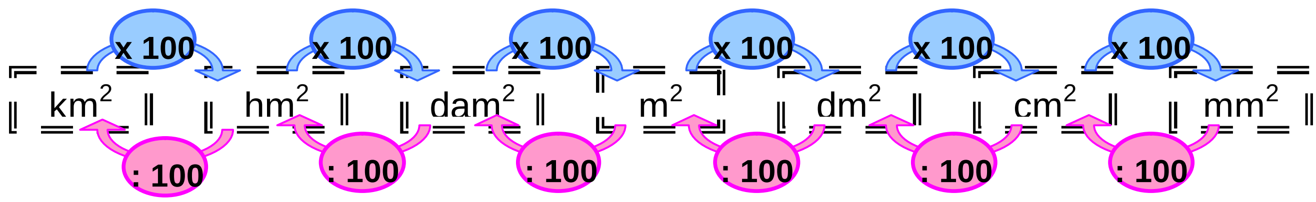
1. UNITÉS DE LONGUEUR

MULTIPLES			UNITÉ	SOUS-MULTIPLES		
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
kilomètre	**hectomètre**	**décamètre**	**mètre**	**décimètre**	**centimètre**	**millimètre**



2. UNITÉS DE SUPERFICIE

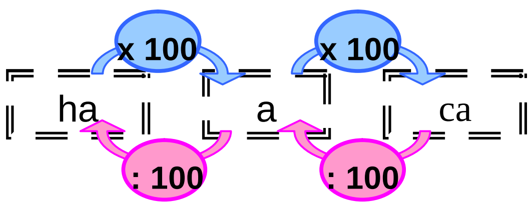
MULTIPLES			UNITÉ	SOUS-MULTIPLES		
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
kilomètre carré	**hectomètre carré**	**décamètre carré**	**mètre carré**	**décimètre carré**	**centimètre carré**	**millimètre carré**



3. UNITÉS AGRAIRES

Celles-ci sont unités employées dans le monde de l'agriculture pour mesurer la surface des terrains.

MULTIPLES	UNITÉ	SOUS-MULTIPLES
ha	a	ca
hectare	**are**	**centiare**

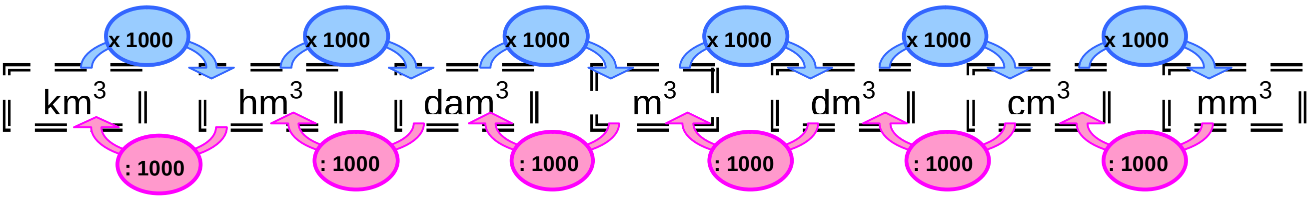


4. ÉQUIVALENCE ENTRE LES UNITÉS DE SUPERFICIE ET LES AGRAIRES

U. SUPERFICIE	U. AGRAIRES
1 hm^2	1 ha
1 dam^2	1 a
1 m^2	1 ca

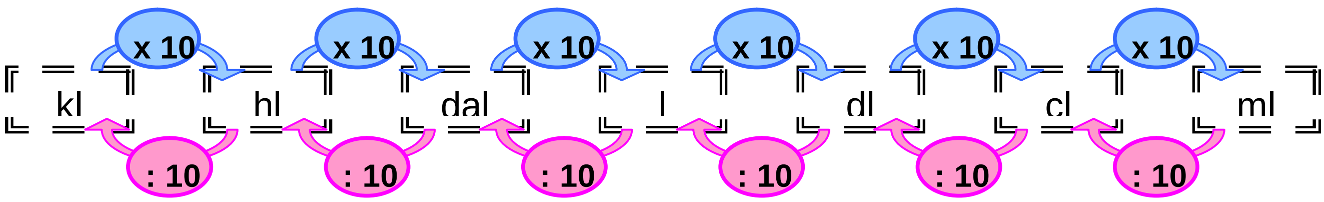
5. UNITÉS DE VOLUME

MULTIPLES			UNITÉ	SOUS-MULTIPLES		
km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
kilomètre cube	**hectomètre cube**	**décamètre cube**	**mètre cube**	**décimètre cube**	**centimètre cube**	**millimètre cube**



6. UNITÉS DE CAPACITÉ

MULTIPLES			UNITÉ	SOUS-MULTIPLES		
kl	hl	dal	l	dl	cl	ml
kilolitre	**hectolitre**	**décalitre**	**litre**	**décilitre**	**centilitre**	**millilitre**



7. ÉQUIVALENCE ENTRE LES UNITÉS DE VOLUME ET CAPACITÉ.

U. VOLUME	U. CAPACITÉ
1 dm^3	1 L
1 m^3	1000 L
1 m^3	1 kl

- Les angles :

1. CLASSEMENT

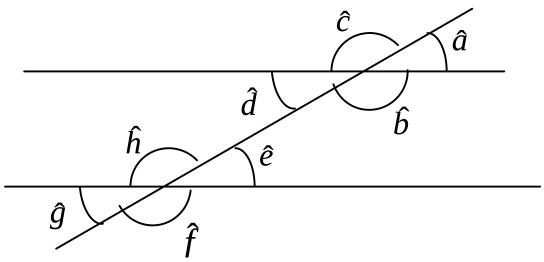
- L'angle aigu a une ouverture inférieure à 90º
- L'angle droit a une ouverture de 90º (est le quart de l'angle plein)
- L'angle obtus a une ouverture supérieure à 90º
- L'angle plein a une ouverture de 360º
- L'angle nul a une ouverture de 0º
- L'angle plat a une ouverture de 180º

Remarque : Au lieu d'ouverture, on peut dire amplitude

2. RAPPORTS ENTRE ANGLES

- Deux angles consécutifs ont en commun le sommet et un côté.
- La somme de deux angles supplémentaires est égale à 180º
- Deux angles sont adjacents si ceux-ci sont consécutifs et supplémentaires
- La somme de deux angles complémentaires est égale à 90º
- Deux angles opposés ont le même sommet leurs côtés se prolongent l'un l'autre

PROPRIÉTÉS RELATIVES AUX ANGLES FORMÉS PAR DEUX PARALLÈLES ET UNE SÉCANTE ET LEURS RÉCIPROQUES



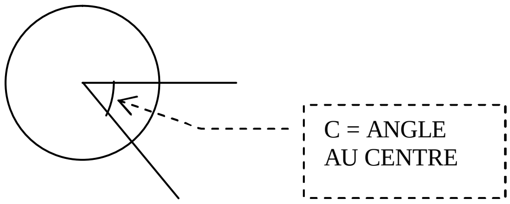
- Les angles a et d sont **angles opposés par le sommet**. Deux **angles opposés par le sommet** sont égaux.

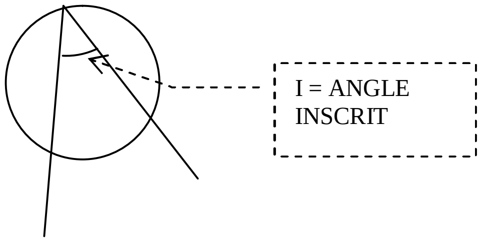
- Les angles a et e sont des **angles correspondants**. Deux **angles correspondants** sont égaux.

- Les angles a et g sont des **angles alternes externes**. Deux **angles alternes externes** sont égaux.

- Les angles d et e sont **angles alternes internes**. Deux **angles alternes internes** sont égaux.

ANGLES DANS LE CERCLE





Propriétés des angles inscrits:

- Deux angles inscrits interceptant le même arc de cercle ont la même mesure.
- Dans un cercle, un angle au centre mesure le double d'un angle inscrit interceptant le même arc.

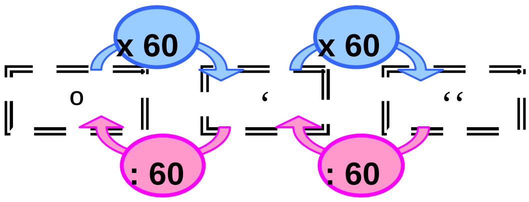
ANGLES D'UN POLYGONE

La somme des angles d'un polygone de N côtés on calcule avec la formule

$$S_N = 180\cdot(N - 2)$$

Remarque : le rapporteur est l'instrument qui sert à mesurer des angles. In ne s'agit pas d'un instrument de tracé mais d'un instrument de mesure. Il existe plusieurs unités pour mesurer les angles : le degré, le grade et le radian 180º = 200grad= π rad.

- Le système sexagésimal :



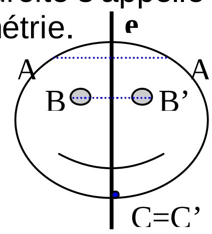
- La symétrie

<table>
<tr>
<td>

Figures symétriques par rapport à un axe.

Deux figures sont symétriques par rapport a une droite si en pliant la feuille suivant la droite les figures se superposent.

- La droite s'appelle axe de symétrie.

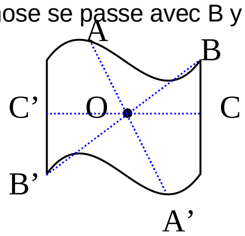


</td>
<td>

Figures symétriques par rapport à un point

Deux figures sont symétriques par rapport à O lorsque l'on passe de l'une à l'autre par un demi-tour autour de O:

- O s'appelle centre de symétrie.
- A et A' sont symétriques par rapport à O, car celui-ci est le point medio du segment AA'. La même chose se passe avec B y B'; C y C'.



</td>
</tr>
</table>

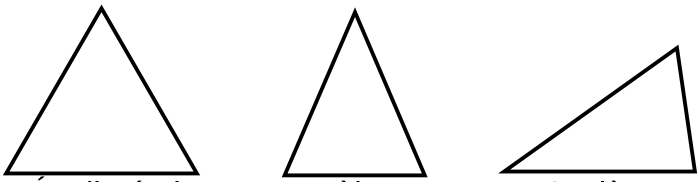
- Classement de triangles :

1. Classement des triangles.

Les triangles sont des polygones de trois côtés. En plus ceux-ci n’ont pas de diagonales. La somme des angles internes vaut 180º.

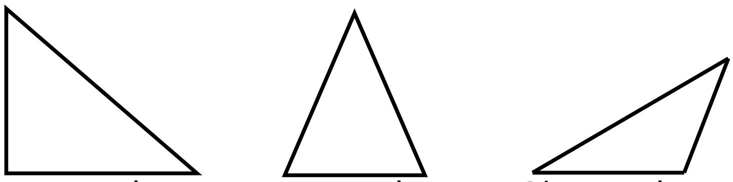
- Selon la longueur des côtés peuvent être:

- **Équilatéral**: les trois côtés ont la même mesure
- **Isocèle** : a deux côtés égaux
- **Scalène**: aucun côté n’est égal



Équilatéral Isocèle Scalène

- Selon les angles peuvent être:
- **Acutangle**: a les trois angles aigus.
- **Rectangle** : a un angle droit.
- **Obtusangle**: a un angle obtus.

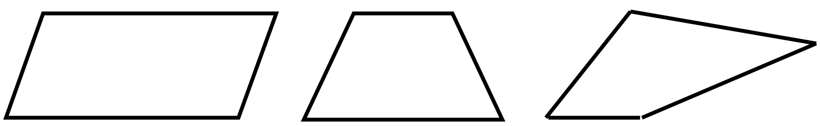


Rectangle Acutangle Obtusangle

- Classement de quadrilatères :

Les quadrilatères on peut les classer en:

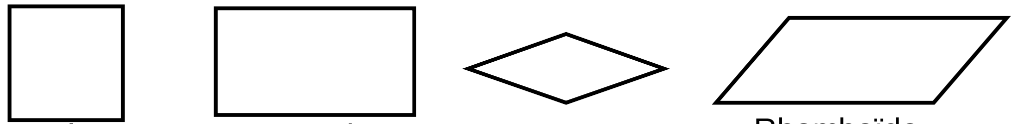
Parallélogrammes: ont les côtés parallèles deux à deux.
Trapèze: ont seulement deux côtes parallèles.
Trapézoïde: n’ont aucun côté parallèle



Parallélogramme Trapèze Trapézoïde

Les parallélogrammes peuvent être:

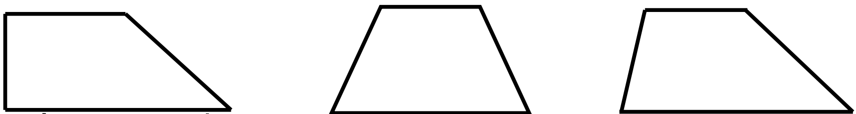
Carrés: tous les côtés ont la même mesure et tous les angles ont aussi la même amplitude.
Rectangles: les côtés ont la même mesure deux à deux et tous les angles ont la même amplitude.
Losanges: tous les côtés ont la même mesure et les angles sont égaux deux à deux.
Rhomboïdes: les côtés et les angles sont égaux deux à deux.



Carré Rectangle Losange Rhomboïde

Les trapèzes peuvent être:

Rectangles: ont deux angles droits.
Isocèles: ont les angles égaux deux à deux.
Scalènes: n’ont aucun angle égal.



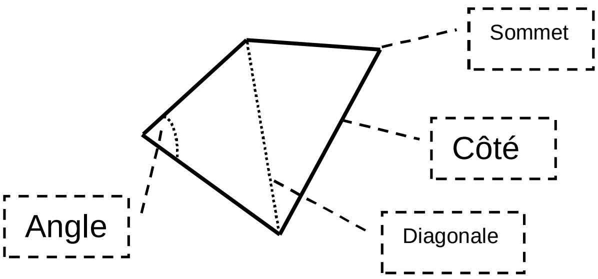
Trapèze rectangle Trapèze isocèle Trapèze scalène

- **Polygones. Classement de polygones :**

1. POLYGONES

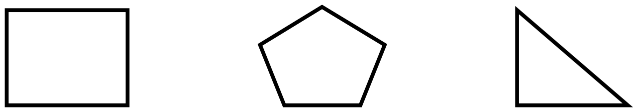
Un **polygone** est une ligne brisée fermée.

Chaque segment de droite qui le constitue est un **côté** du polygone
Les extrémités des côtés sont les **sommets** du polygone.
Chaque sommet définit ainsi un angle du polygone : il y a autant d'angles que de côtés.
Une **diagonale** d'un polygone (comme en rose ci-dessus) est un segment joignant deux sommets non consécutifs.

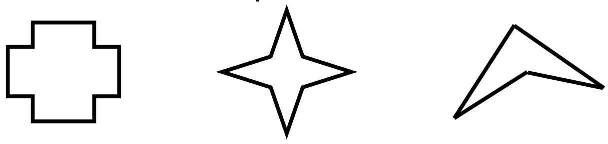


2. SORTES DE POLYGONES

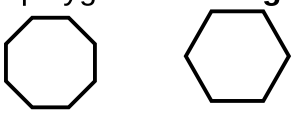
Un polygone est convexe si les angles du polygone sont tous inférieurs à 180 degrés et en plus, tout segment joignant deux sommets du polygone est inclus dans la composante fermée bornée délimitée par le polygone
Exemples:



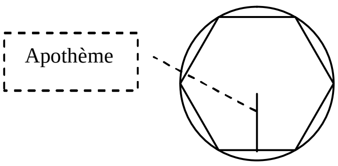
Un polygone est **concave** si celui-ci n'est pas convexe.
Exemples:



Un polygone est **régulier** si ses côtés ont la même mesure et ses angles ont la même amplitude. Sinon, le polygone est **irrégulier**.
Exemples:



En plus, les sommets d'un polygone régulier sont situés sur un même cercle (polygone inscriptible). Le centre et le rayon du polygone sont le centre et le rayon de la circonférence.
L'apothème: la mesure du segment qui a par extrémités le centre du polygone et le point où se coupent le côté et sa médiatrice.



3. CLASSEMENT DES POLYGONES

N. de côtés	Nom du polygone
3	Triangle
4	Quadrilatère
5	Pentagone
6	Hexagone
7	Heptagone
8	Octogone

N. de côtés	Nom du polygone
9	Ennéagone
10	Décagone
11	Hendécagone
12	Dodécagone
15	Pentadécagone
20	Icosagone

En général, polygone de n côtés

4. NOMBRE DE DIAGONALES D'UN POLYGONE DE N CÒTÉS

La formule est $D_N = \frac{N \times (N-3)}{2}$

5. SOMME DES ANGLES D'UN POLYGONE DE N CÔTÉS

La formule est : $S_N = 180^o \times (N-2)$

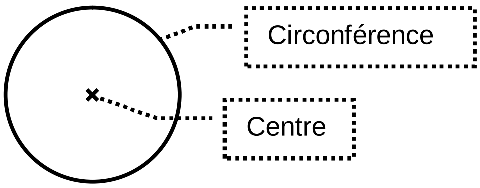
- Périmètre d'un polygone

Périmètre: la somme de tous ses côtés

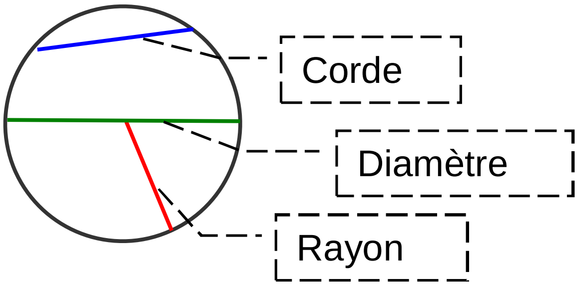
- Les figures circulaires

1. LA CIRCONFÉRENCE

La circonférence est une courbe plane fermée constituée des points situés à égale distance d'un point nommé **centre**. La valeur de cette distance est appelée rayon.



Le **rayon** est un segment de droite joignant le centre à un point de la circonférence.
La **corde** est un segment de droite dont les extrémités se trouvent sur la circonférence.
El **diamètre** est une corde passant par le centre ; c'est un segment de droite qui délimite le disque en deux parts égales.
El **arc** est une portion de circonférence délimitée par deux points.



Longueur d'une circonférence (ou périmètre):

$L = 2\pi r$

Longueur d'un arc de circonférence:

$l_{arc} = \frac{\pi \cdot r \cdot n^o}{180}$ où n est la amplitude de l'angle formé par deux rayons.

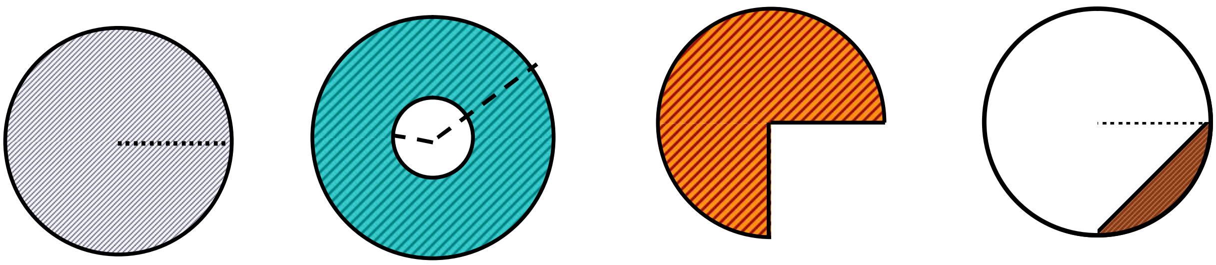
2. DES FIGURES CIRCULAIRES

Cercle: région du plan délimitée par une circonférence
L'aire du cercle est A= $\pi \cdot r^2$
Couronne circulaire: est une région comprise entre deux cercles concentriques.

Secteur circulaire: est une partie du disque comprise entre deux rayons.

Segment circulaire: est une partie du disque comprise entre un arc et sa corde correspondante.

CERCLE | COURONNE CIRCULAIRE | SECTEUR CIRCULAIRE | SEGMENT CIRCULAIRE



1. Des lieux géométriques

MÉDIATRICE D'UN SEGMENT

La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment qui le coupe en son milieu.
Propriété: Tout point de la médiatrice d'un segment est situé à la même distance des extrémités de ce segment.

BISSECTRICE D'UN ANGLE

La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles égaux.

2. Des droites et des points remarquables

Les droites remarquables dans un triangle sont: Les médianes, les médiatrices, les bissectrices et les hauteurs.

- **Bissectrice** : demi-droite issue du sommet, qui partage l'angle en deux angles de même mesure.
- **Médiatrice** : droite perpendiculaire au côté en son milieu.
- **Médiane :** droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé.
- **Hauteur :** droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé.

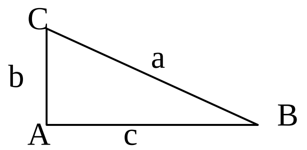
Les points remarquables dans un triangle sont: le barycentre, le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle inscrit et l'orthocentre.

- **Barycentre** (G) : Point où les trois médianes se coupent.
- **Centre du cercle circonscrit** (C) : Point où les trois médiatrices se coupent.
- **Centre du cercle inscrit** (I) : Point où les trois bissectrices se coupent.
- **Orthocentre** (O) : Point où les trois hauteurs se coupent.

Droite d'Euler : barycentre, orthocentre et le centre du cercle circonscrit sont alignés.

3. Le théorème de Pythagore

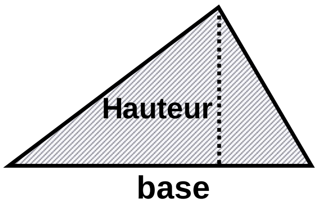
Le **Théorème de Pythagore** donne une formule reliant les longueurs des côtés. Ce théorème permet notamment de calculer l'une de ces longueurs à partir des deux autres. Dans un triangle rectangle : le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés (cathètes).



$$a^2=b^2+c^2$$

4. AIRES DE FIGURES PLANES

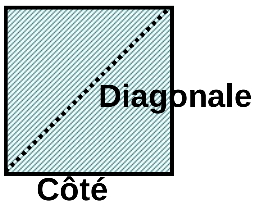
1.-AIRE DU TRIANGLE



$$\text{Aire} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

2.-AIRE DES PARALLELOGRAMMES

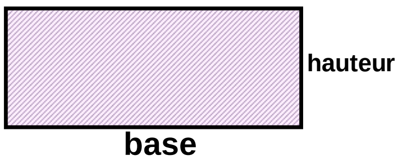
AIRE DU CARRÉ



Aire = côté x côté

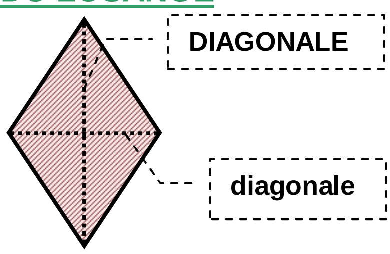
$$\text{Aire} = \frac{\text{diagonale x diagonale}}{2}$$

AIRE DU RECTANGLE



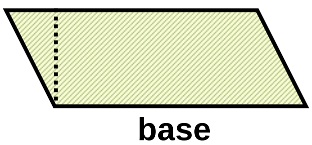
Aire = base x hauteur

AIRE DU LOSANGE



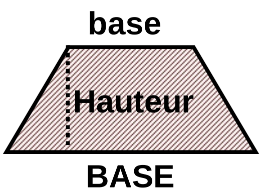
$$\text{Aire} = \frac{\text{DIAGONALE x diagonale}}{2}$$

AIRE DU RHOMBOÏDE



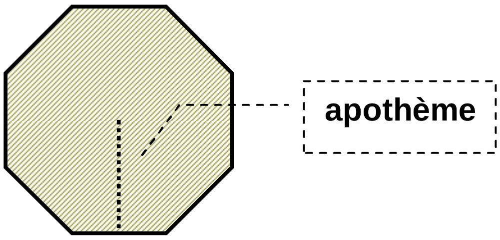
Aire = base x hauteur

3.-AIRE DU TRAPÈZE



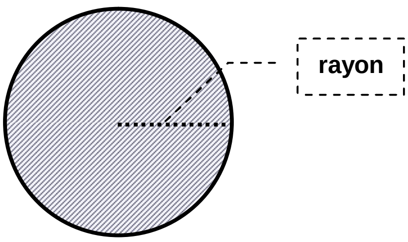
$$\text{Aire} = \frac{(\text{BASE} + \text{base}) \text{ x hauteur}}{2}$$

4.-AIRE DES POLYGONES RÉGULIERS



$$\text{Aire} = \frac{\text{périmètre x apothème}}{2}$$

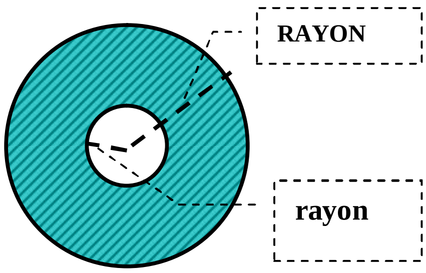
5.-AIRE DU CERCLE



$$\text{Aire} = \pi \cdot \text{rayon}^2$$

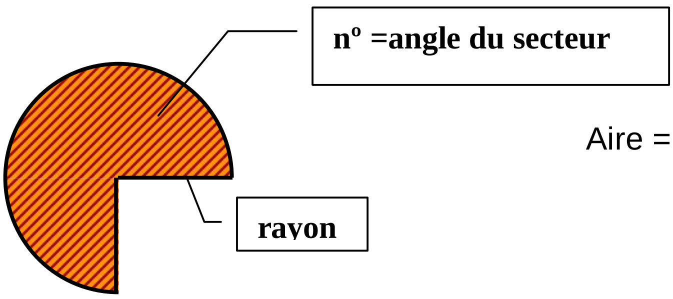
6.-AIRE DES FIGURES CIRCULAIRES

AIRE DE LA COURONNE CIRCULAIRE



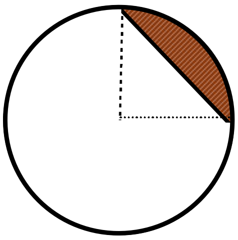
$$\text{Aire} = \pi\cdot(\text{RAYON}^2 - \text{rayon}^2)$$

AIRE DU SECTEUR CIRCULAIRE



$$\text{Aire} = \frac{n^o \cdot \pi \cdot r^2}{360^o}$$

AIRE DU SEGMENT CIRCULAIRE



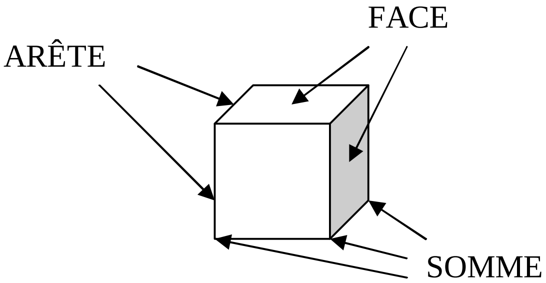
Aire = aire du secteur- aire du triangle

UNITÉ 9 : DES CORPS GÉOMÉTRIQUES

1. Des polyèdres. Des aires

POLYÈDRES

Un **polyèdre** est une forme géométrique à trois dimensions ayant des faces planes polygonales qui se rencontrent selon des segments de droite qu'on appelle arêtes.
Les faces sont les polygones qui constituent le polyèdre.
Les arêtes sont les côtés des faces.
Les sommets sont les sommets des faces.
Les angles polyèdres sont les parties de l'espace délimitées par les faces qui concurrent en un sommet. Si ceux-ci ont trois faces s'appellent trièdres.



THÉORÈME D'EULER

La somme du nombre de faces plus le nombre de sommets est égal au nombre d'arêtes plus deux.

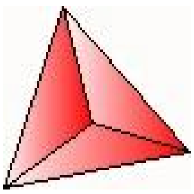
$$F+S=A+2$$

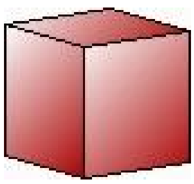
POLYÈDRES RÉGULIERS

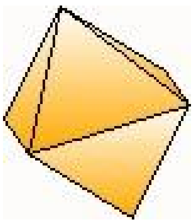
Un polygone est régulier si :

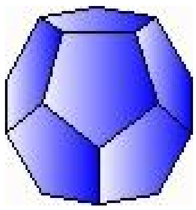
- Ses faces sont polygones réguliers identiques.
- Et le même nombre de faces concurrentes en chaque sommet.

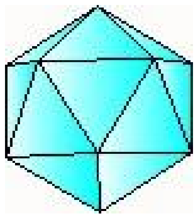
Il n'y a que cinq polyèdres réguliers convexes, les cinq solides de Platon.


TRÉTAÈDRE
4 faces, triangles équilatéraux


CUBE OU HÉXAÈDRE
6 faces, carrés


OCTAÈDRE
8 faces, triangles équilatéraux

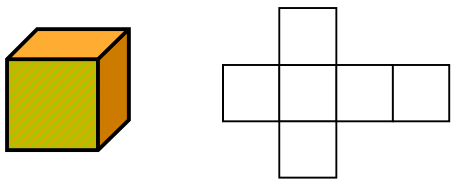

DODÉCAÈDRE
12 faces, pentagones réguliers


ICOSAÈDRE
20 faces, triangles équilatéraux

AIRE D'UN POLYÈDRE

Il faut additionner l'aire de toutes les faces pour calculer l'aire d'un polyèdre.

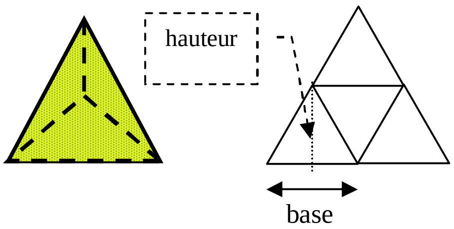
LE CUBE



Le développement du cube est formé par six carrés, donc son aire on doit calculer avec la formule suivante.

AIRE DU CUBE= $6 \times \textbf{arête}^2$

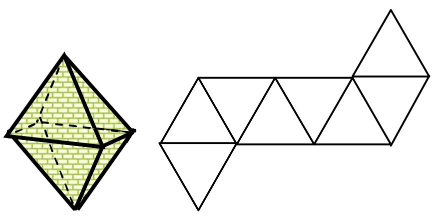
LE TÉTRAÈDRE



Le développement du tétraèdre est formé par quatre triangles équilatéraux, donc son aire on doit calculer avec la formule suivante.

AIRE DU TÉTRAÈDRE= $4 \times \dfrac{base \times hauteur}{2}$

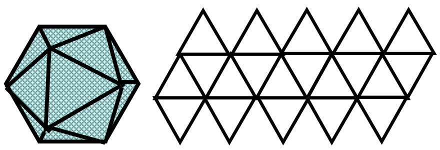
L'OCTAÈDRE



Le développement de l'octaèdre est formé par huit triangles équilatéraux, donc son aire on doit calculer avec la formule suivante.

AIRE DE L'OCTAÈDRE= $8 \times \dfrac{base \times hauteur}{2}$

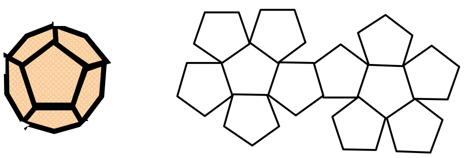
L'ICOSAÈDRE



Le développement de l'icosaèdre est formé par vingt triangles équilatéraux, donc son aire on doit calculer avec la formule suivante.

AIRE DE L'ICOSAÈDRE= $20 \times \dfrac{base \times hauteur}{2}$

LE DODÉCAÈDRE



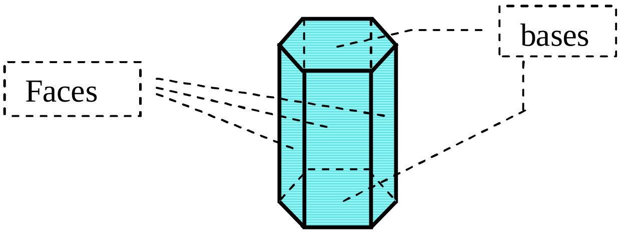
Le développement du dodécaèdre est formé par douze pentagones réguliers, donc son aire on doit calculer avec la formule suivante.

AIRE DU DODÉCAÈDRE= $12 \times \dfrac{périmètre \times apothème}{2}$

2. Des prismes et des pyramides. Des aires

PRISMES

Un **prisme** est un polyèdre constitué par deux bases polygonales superposables situées dans deux plans parallèles et par des parallélogrammes joignant les bases.

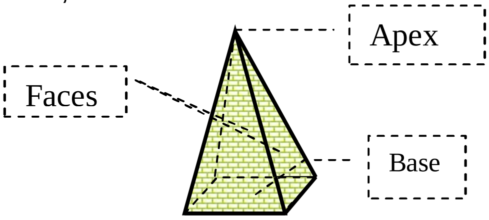


La hauteur du prisme est la distance entre les bases.
Les prismes peuvent être droits et obliques.

Les prismes s'appellent prisme à base triangulaire, à base quadrangulaire, à base pentagonale, etc. selon le polygone des bases.

PYRAMIDES

Une pyramide est un polyèdre à base polygonale et à faces latérales triangulaires, et dont les sommets se réunissent en un point appelé apex.



La hauteur de la pyramide est la distance entre la base et l'apex.
Une **pyramide** est **régulière** si sa base est un polygone régulier et l'apex se projette sur le centre de ce polygone. Toutes ses faces latérales sont triangles isocèles identiques. Les hauteurs de ces triangles s'appellent apothèmes de la pyramide.
Les pyramides s'appellent à base triangulaire, à base quadrangulaire, à base pentagonale..., selon le polygone des bases.

REMARQUE: On peut vérifier le théorème d'Euler pour les pyramides et les prismes.

$$F+S=A+2$$

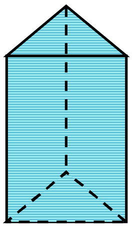
3. ÁREA DE UN PRISMA Y DE UNA PIRÁMIDE

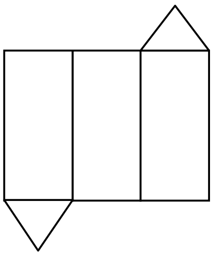
Il faut additionner l'aire de toutes leurs faces pour calculer l'aire de ces polyèdres.

Aire totale = Somme aires faces latérales + Somme aires des bases

Pour mieux comprendre les formules, on doit observer leurs développements sur le plan.

PRISME À BASE TRIANGULAR



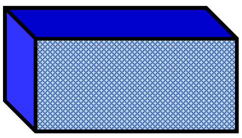


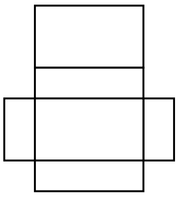
Le développement de ce prisme est formé par trois rectangles, et deux triangles, donc son aire on doit la calculer avec la formule suivante.

AIRE PRISME= $3\times$aire rectangle + $2\times$aire triangle

LE PAVÉ DROIT (*Cast.* ORTOEDRO)

Le pavé droit est un parallélépipède (un prisme: toutes les faces sont des parallélogrammes) rectangle droit (toutes les faces sont des rectangles).

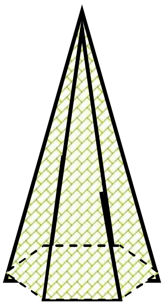


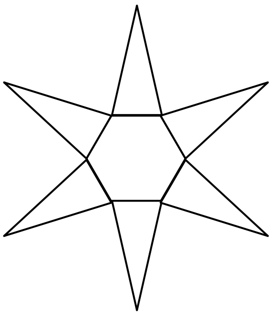


Le développement du pavé est formé par six rectangles égaux deux à deux. Si les dimensions du pavé sont a=largeur, b= longueur et c= hauteur, donc son aire on doit la calculer avec la formule suivante.

AIRE PAVÉ= $2\times(a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a)$

PYRAMIDE À BASE HEXAGONALE





Le développement de cette pyramide est formé par un hexagone et six triangles égaux, donc son aire on doit la calculer avec la formule suivante.

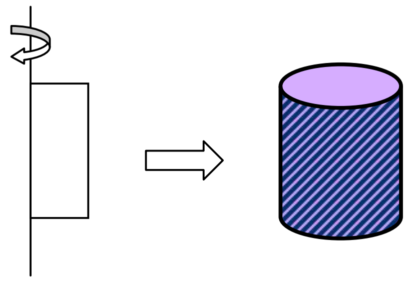
AIRE PYRAMIDE= aire hexagone + $6\times$aire triangles

3. Des corps de révolution. Des aires

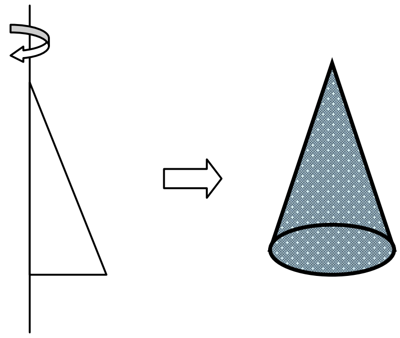
Un **corps de révolution** est un volume que nous obtenons en faisant tourner une courbe 2D autour d'un axe.

Les corps de révolution que nous étudierons cette année sont le cylindre, le cône et la sphère.

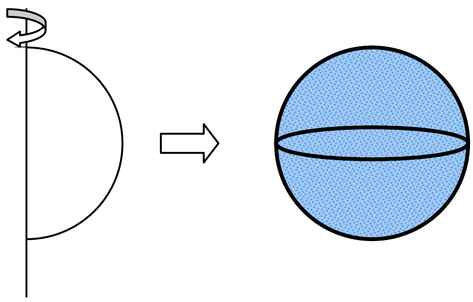
LE CYLINDRE
Le cylindre est un corps de révolution que nous obtenons en faisant tourner un rectangle sur un de ses côtés.



LE CÔNE
Le cône est un corps de révolution que nous obtenons en faisant tourner un triangle rectangle sur un de ses cathètes.



LA SPHÈRE
La sphère est un corps de révolution que nous obtenons en faisant tourner une demi-circonférence sur son diamètre.



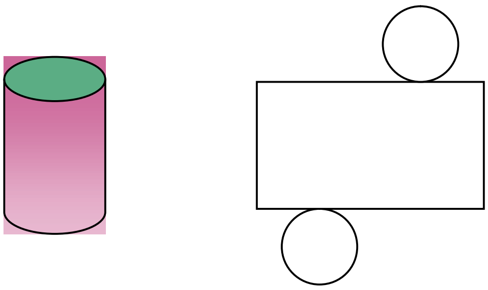
AIRES DU CYLINDRE ET DU CÔNE

On doit additionner l'aire de toutes les faces pour calculer l'aire de ces corps de révolution.

Aire totale = Somme aires faces latérales + Somme aires de las bases

Pour mieux comprendre les formules, on doit observer leur développement sur le plan.

CYLINDRE

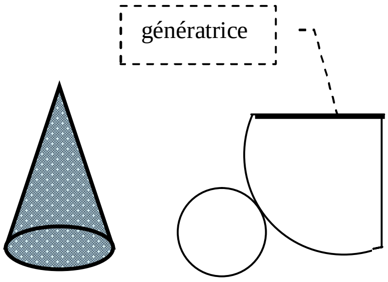


Le développement du cylindre est formé par un rectangle qui a de longueur la longitude de la circonférence de la base et deux cercles, donc son aire on doit la calculer avec la formule suivante.

AIRE CYLINDRE= aire rectangle + 2 × aire cercle =

$= \quad 2\cdot\pi\cdot r\cdot h \quad +2 \cdot \pi\cdot r^2$

CONO



Le développement du cône est formé par un cercle et un secteur circulaire, donc son aire on doit la calculer avec la formule suivante.

AIRE CÔNE= aire cercle +aire secteur =

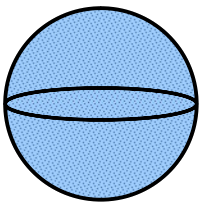
$= \quad \pi\cdot r^2 \quad + \quad \pi\cdot r\cdot g$

La génératrice est g.

AIRE DE LA SPHÈRE

La sphère n'a pas de développement sur le plan. Sa formule est:

SPHÈRE

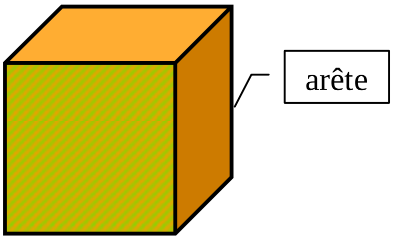


AIRE SPHÈRE= 4 × aire cercle =

$= 4 \cdot \pi\cdot r^2$

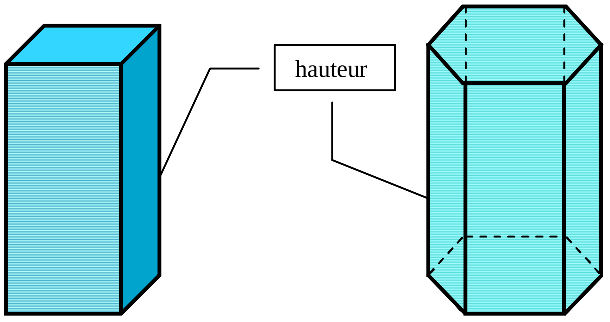
4. Le volume des corps géométriques

1.-VOLUME DU CUBE



Volume = arête^3

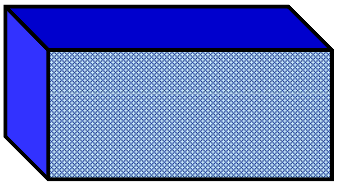
2.-VOLUME D'UN PRISME



Volume = Aire de la base $\times$ hauteur

3.-VOLUME D'UN PAVÉ DROIT (parallélépipède rectangle. *cast*. ortoedro)

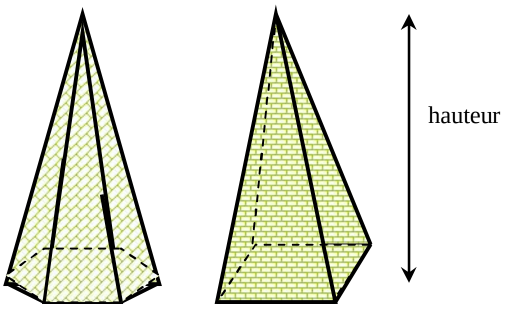
C'est un prisme de base rectangulaire



Volume = Aire de la base $\times$ hauteur

Volume = longueur $\times$ largeur $\times$ hauteur

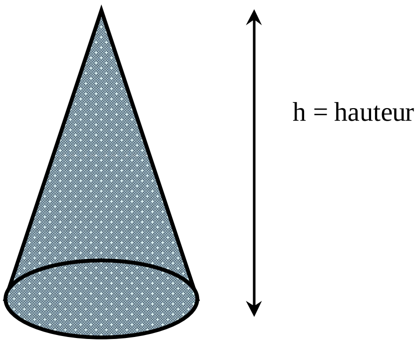
4.-VOLUME D'UNE PYRAMIDE



$$\text{Volume} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

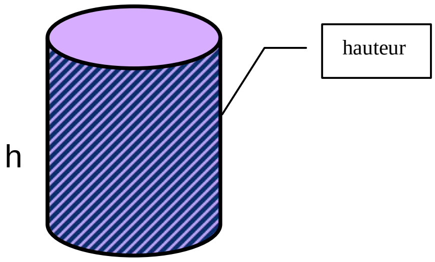
5.-VOLUME CORPS DE RÉVOLUTION

VOLUME D'UN CÔNE



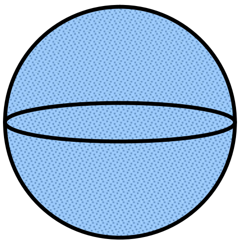
$$\text{Volume} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{\pi \cdot \text{rayon}^2 \cdot \text{h}}{3}$$

VOLUME DE UN CYLINDRE



Volume = Aire de la base $\times$ hauteur= $\pi \cdot \text{rayon}^2 \cdot$

VOLUME D'UNE SPHÈRE



$$\text{Volume} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \text{rayon}^3$$