UNITÉ 7: DES SUITES

D'abord il faut rappeler:

- La définition d'**expression algébrique** : est un ensemble de lettres et de nombres reliés entre eux par des symboles d'opération mathématique.

- Les **propriétés des puissances:**
  - $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
  - $a^n : a^m = a^{n-m}$
  - $(-a)^n = a^n$ si n pair; $(-a)^n = -a^n$ si n impair

- **Extraire facteur commun** :
  - $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$

1. Des suites:

Une **suite** est un ensemble ordonné de nombres réels appelés termes, a_1,a_2, a_3, a_4, a_5…a_i…où l'indice i indique le lieu qui occupe dans la suite.
Une suite on peut la déterminer de deux façons très différentes :

- à partir d'une **règle de formation**.
  Exemples :
  a) chaque terme on peut le calculer en ajoutant 2 au précédent : 1, 3, 5, 7, 9…
  b) Chaque terme est 2 fois le précédent : 1, 2, 4, 8, 16…
  c) Chaque terme est la somme des deux précédents : 1, 1, 2, 3, 5, 8…
  d) Chaque terme est le carré du lieu qui occupe : 1, 4, 9, 16, 25…
  e) La suite des nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19…

- à partir d'une formule explicite, son **terme général**.

On appelle terme général de la suite le terme qui permet de calculer un terme de celle-ci n'importe quoi. On note a_n et on lit le $n^{ème}$ terme de la suite.

Exemple:

a) *$a_n=2n$,*
   le vingtième terme est $a_{20} = 2 \cdot 20 = 40$

b) *$b_n=n^2$,*
   le septième terme est $b_7 = 7^2 = 49$

Des suites récurrentes:

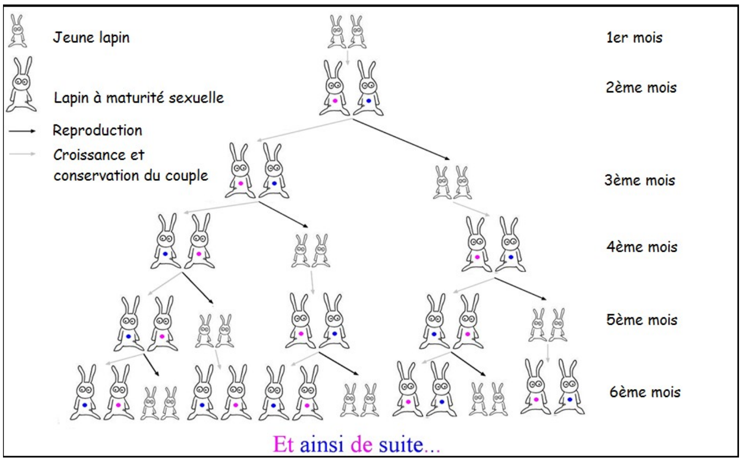
Une suite définie par récurrence est une suite définie par son premier terme et par une relation de récurrence, qui définit chaque terme à partir du précédent ou des précédents lorsqu'ils existent.
La meilleure façon d'appréhender la récurrence est de le voir sur un exemple.

Exemple:
Une des suites de ce type est la très célèbre suite de Fibonacci.
La suite de Fibonacci est définie par la donnée de $a_1 = 1$ et $a_2=1$ et par la relation de récurrence $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$.

$a_1= 1$; $a_2= 1$; $a_3= a_1+ a_2 =1 + 1= 2$; $a_4= = a_2+ a_3 =1 +2= 3$; $a_5= = a_3+ a_4 =2 + 3= 5$

Le problème des lapins de Fibonacci qui fut proposé en 1202:
Partant d'un couple, combien de couples de lapins obtiendrons-nous après un nombre donné de mois sachant que chaque couple produit chaque mois un nouveau couple, lequel ne devient productif qu'après deux mois?

- *Au début:*
1 couple.
- *Au bout de 1 mois:*
1 couple
- *Au bout de 2 mois:*
2 couples (1 adulte+1 bébé)
- *Au bout de 3 mois:*
3 couples (2 adultes + 1 bébés)
- *Au bout de 4 mois:*
5 couples (3 adultes + 2 bébés)
….



Classement des suites:

Une suite peut être:

- Croissante si $a_n \leq a_{n+1}$ (strictement croissante si $a_n < a_{n+1}$)
Exemple: *1, 3, 5, 7…*

- Décroissante $a_n \geq a_{n+1}$ (strictement décroissante si $a_n > a_{n+1}$)
Exemple: *32, 16, 8, 4, 2, 1, 0.5…*

- Constante $a_n = a_{n+1}$
Exemple: *3, 3, 3, 3, 3…*

- Oscillante ou alternée : Ni croissante ni décroissante.
Exemple: $a_n = (-1)^n$; *-1, 1, -1, 1, -1…*

2. Des suites arithmétiques:

Une **suite arithmétique** est une suite dans laquelle chaque terme permet de déduire le suivant en lui ajoutant une constante appelée *différence*.

$a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_2 + d$; $a_4 = a_3 + d$; $a_5 = a_4 + d$

$a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_1 + 2d$; $a_4 = a_1 + 3d$; $a_5 = a_1 + 4d$

Cette définition peut s'écrire sous la forme d'une relation de récurrence, pour chaque indice *n* :

$a_{n+1} = a_n + d$

Cette relation est caractéristique de la **progression arithmétique**. Elle décrit bien les phénomènes dont la variation est constante au cours du temps, comme l'évolution d'un compte bancaire à intérêts simples.

Les suites arithmétiques satisfont une formule générale pour le calcul des termes ainsi que pour la série associée, le terme général.
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Exemple: *Trouvez le terme général de la suite arithmétique suivant :*
3, 7, 11, 15, 19…

Réponse:

$a_1 = 3$ et $d = 4$, alors $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 3 + (n-1) \cdot 4 = 3 + 4n - 4 = 4n - 1$
C'est-à-dire : $\boldsymbol{a_n = 4n - 1}$

Plus généralement, si la suite n'est définie qu'à partir de l'indice *1* et si $n \geq p \geq 1$ alors : $a_n = a_p + (n-p) \cdot d$

Exemple: *Trouvez le terme général d'une suite arithmétique sachant que $d=4$ et $a_5=19$:*

Réponse:

$a_5 = 19$ et $d = 4$, alors $a_n = a_p + (n-p) \cdot d = 19 + (n-5) \cdot 4 = 19 + 4n - 20 = 4n - 1$
C'est-à-dire : $\boldsymbol{a_n = 4n - 1}$

Rappelez: Une suite arithmétique est donc entièrement déterminée par la donnée de son premier terme a_1 et de sa différence *d*.

Somme de n termes d'une suite arithmétique

a_n est une suite arithmétique alors, toute somme de n termes consécutifs est égale au nombre de ces termes multiplié par la moyenne des deux termes extrêmes.

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

Exemple: *Calculez le somme des 10 premiers termes de la suite arithmétique suivant :*
3, 7, 11, 15, 19…

Réponse :

D'abord il faut calculer le terme a_{10} ;
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$;

$a_{10} = 3 + (10-1) \cdot 4 = 39$

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$S_{10} = \dfrac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \dfrac{(3+39) \cdot 10}{2} = 210$

Le cas particulier $a_1 = 1$ et d = 1 est la formule donnant la somme des entiers de 1 à *n*

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{(1+n) \cdot n}{2}$$

Exemple: *Calculez le somme des 10 premiers nombres naturels*

Réponse :

$S_n = \dfrac{(1+n) \cdot n}{2}$

$S_{10} = \dfrac{(1+10) \cdot 10}{2} = \dfrac{11 \cdot 10}{2} = 55$

Remarque: Une suite arithmétique remarquable est l'ensemble **des entiers naturels:** L'ensemble ℕ des nombres entiers naturels est une suite arithmétique infinie, de différence 1.

3. Des suites géométriques:

Une **suite géométrique** est une suite de nombres dans laquelle chaque terme permet de déduire le suivant par multiplication par un coefficient constant appelé *raison*. Ainsi, une suite géométrique a la forme suivante :

$a_2 = a_1 \cdot r$; $a_3 = a_2 \cdot r$; $a_4 = a_3 \cdot r$; $a_5 = a_4 \cdot r$

a_1, $a_2 = a_1 \cdot r$, $a_3 = a_1 \cdot r^2$, $a_4 = a_1 \cdot r^3$, $a_5 = a_1 \cdot r^4$…

La définition peut s'écrire sous la forme d'une relation de récurrence, c'est-à-dire que pour chaque entier naturel n :
a_1 ; $a_{n+1} = a_n \cdot r$

Cette relation est caractéristique de la **progression géométrique** qui se retrouve par exemple dans l'évolution d'un compte bancaire à intérêts composés ou la composition des intervalles musicaux.

Les suites géométriques satisfont une formule générale pour le calcul des termes ainsi que pour la série associée, le terme général.
$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$

Exemple: *Trouvez le terme général de la suite géométrique suivant :*
1, 2, 4, 8, 16…

Réponse:

$a_1 = 1$ et $r = 24$, alors $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)} = 1 \cdot 2^{(n-1)} = 2^{(n-1)}$
C'est-à-dire : $\boldsymbol{a_n = 2^{(n-1)}}$

Plus généralement, si la suite n'est définie qu'à partir de l'indice *1* et si $n \geq p \geq 1$ alors : $a_n = a_p \cdot r^{(n-p)}$

Exemple: *Trouvez le terme général d'une suite géométrique sachant que $r=2$ et $a_5=16$:*

Réponse :

$a_5 = 16$ et $r = 2$,

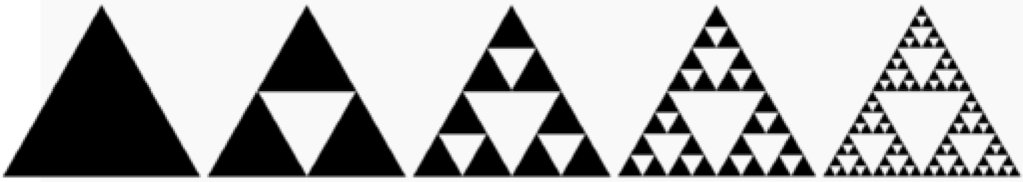
alors

$a_n = a_p \cdot r^{(n-p)} = a_5 \cdot r^{(n-5)} = 16 \cdot 2^{(n-5)} = 2^4 \cdot 2^{(n-5)} = 2^{4+(n-5)} = 2^{(n-1)}$

C'est-à-dire : $\boldsymbol{a_n = 2^{(n-1)}}$

Rappelez : Une suite géométrique est donc entièrement déterminée par la donnée de son premier terme a_1 et de sa raison *r*.

Exemple: ***Le triangle de Sierpinski***



Premières étapes de la construction du triangle de Sierpiński. Le nombre de triangles noirs, leur côté, leur aire individuelle et l'aire du domaine couvert suivent des progressions géométriques de raisons respectives 3, 1/2, 1/4 et 3/4.

Somme de n termes d'une suite géométrique

La somme des *n* premiers termes d'une suite géométrique a_n de raison r ≠1 vérifie:

$S_n= a_1+a_2+\ldots+a_n= \dfrac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1}$

Quand r = 1, la suite est constante et $S_n= a_1+a_2+\ldots+a_n= n \cdot a_1$

Exemple: *Calculez le somme des 10 premiers termes de la suite géométrique suivant :*

1, 2, 4, 8, 16…

Réponse :

$S_n = \dfrac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1}$

$S_{10} = \dfrac{1 \cdot (2^{10} - 1)}{2-1} = 1023$

Somme de tous les termes d'une suite géométrique de raison $|r|<1$

La somme de tous les termes d'une suite géométrique a_n de raison $|r|<1$ vérifie:

$S= \dfrac{a_1}{1-r}$

Exemple: *Calculez le somme de tous les termes de la suite géométrique suivant :*

16, 8, 4, 2, 1, 0.5, 0,25…

Réponse :

a_1=16, r=0.5;

$S= \dfrac{16}{1-0.5} = 32$

Produit de n termes d'une suite géométrique

La produit des *n* premiers termes d'une suite géométrique a_n de raison r ≠1 vérifie:

$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

Quand r = 1, la suite est constante et $P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = (a_1)^n$

Exemple: *Calculez le produit des 5 premiers termes de la suite géométrique suivant :*
16, 8, 4, 2, 1, 0.5, 0,25…

Réponse:
$P_5 = \sqrt{(a_1 \cdot a_5)^5} = \sqrt{(16 \cdot 1)^5}$ *=1024*

4. **L'intérêt composé**

Un capital est placé à **intérêts composés** lorsque les intérêts de chaque période sont incorporés au capital pour l'augmenter progressivement et porter intérêts à leur tour.
Pour calculer des intérêts composés annuellement, il suffit d'utiliser une suite géométrique, dont la formule est :

$C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$; où C_f est la valeur finale, C la valeur initiale, r% le taux d'intérêt sur une période, et t le nombre de périodes (d'années, semestres, trimestres, etc.).

L'habitude est d'exprimer le taux d'intérêt en pourcentage, ainsi on écrira 2 % pour $\frac{2}{100}$.

Exemple: *En plaçant 10 euros à un taux de 2 % par an pendant 5 ans, on obtient :*

$C_f = 10 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^5$ =11.04 € *;*

Après 10 ans, le total sera de 12,19 € ;

après un siècle, de 72,45 €.

Cette somme C_f est aussi celle qui est due par un emprunteur au bout de t années, au taux d'intérêt r (s'il n'a rien remboursé entre-temps).

Remarque:
Les intérêts peuvent aussi être composés sur *n* **fractions d'une année**, par exemple 12 mois, même si le taux r reste exprimé par an. Un intérêt égal à $\frac{r}{12}$ est alors versé à la fin de chaque mois. La valeur finale au bout de t années est alors donnée par $C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{n \cdot 100}\right)^{n \cdot t}$

Exemple: *En plaçant 10 euros à un taux de 2 % par an pendant 5 mois, on obtient:*

$$C_f = 10 \cdot \left(1 + \frac{2}{12 \cdot 100}\right)^{12 \cdot 5}$$ = 11.05€