UNITÉ 6 : LA PROPORTIONNALITÉ NUMÉRIQUE

POUR DÉBUTER

Il faut rappeler

- Définition de grandeur :

Une grandeur est une caractéristique qui est mesurée, et la valeur est exprimée par un nombre.

Le concept de grandeur est utilisé en mathématique pour désigner des notions associées à divers phénomènes telles que la longueur, les aires, les volumes, les masses, les angles, les vitesses, les durées...

- Définition de rapport et proportion

- On appelle rapport de deux nombres « a » et « b » le quotient exact (résultat de la division) de ces deux nombres : $\frac{a}{b}$
- On appelle proportion, l'égalité de deux rapports fractionnaires : c'est une forme $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Propriété : a·d=b·c. celle-ci on doit l'utiliser pour calculer le quatrième proportionnel.

- Calcul de pourcentage

a% de N = $\frac{a}{100}$·N

1. Proportionnalité directe

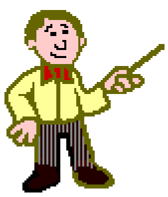
Deux grandeurs sont dites directement proportionnelles lorsqu'elles sont liées par une relation de la forme

$\frac{a}{b}$=k

k désignant une <u>constante</u> numérique non nulle appelé <u>coefficient de proportionnalité directe</u>

On remarque que la relation $\frac{a}{b}$=k (a = k·b) s'interprète graphiquement comme l'équation d'une droite du plan passant par l'origine (fonction linéaire), k est alors le coefficient directeur de cette droite. On peut aussi construire le tableau de valeurs.

N'oublie pas :



Grandeur G	a	b	c
Grandeur G'	a'	b'	c'

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k$$

2. Proportionnalité inverse

Deux grandeurs sont dites inversement proportionnelles lorsqu'elles sont liées par une relation de la forme

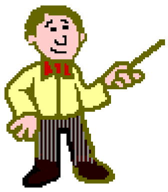
a·b=k

k désignant une <u>constante</u> numérique non nulle appelé <u>coefficient de proportionnalité inverse</u>

On remarque que la relation a·b=k ($a=\frac{k}{b}$) s'interprète graphiquement comme l'équation d'une hyperbole équilatère. On peut aussi construire le tableau de valeurs.

Exemples :
Plus on emploiera de salariés pour faire un travail, moins de temps on mettra ; la vitesse d'un train est inversement proportionnelle à la durée du trajet. Le nombre de journées nécessaires pour accomplir un ouvrage est inversement proportionnel au nombre d'heures de travail par jour, etc.

N'oublie pas :



Grandeur G	a	b	c
Grandeur G'	a'	b'	c'

a·a'=b·b'=c·c'=k

Exercice : Peut-on calculer a, b, c et d afin que les suites de valeurs en *x* et *y* ci-dessous soient proportionnelles ?

x	18	a	b	10	1	3	19,2
y	45	7	1	25	c	d	48

Remarque :

- Si un véhicule roule à vitesse constante v exprimée en km/h, sa distance parcourue en un temps *t* exprimé en heures sera *d* = v x *t*. Lorsque v = 60km/h, on aura pour toute valeur de t que d = 60t. (d/t=60 proportionnalité directe). Mais si la distance est de 100km,on aura que 100=v·t (proportionnalité inverse)
- Si le prix du litre de gas-oil est de 0,98 €, *n* désignant la quantité de litres soutirée, le prix payé à la pompe sera *p* = 0,98*n*. Lorsque le prix affiché est 33,81€, la quantité soutirée est alors *n* = 33,81 / 0,98 = 34,5 litres.(proportionnalité directe)
- Le tableau suivant n'est pas un tableau de proportionnalité entre les variables x et y. Cherchez l'erreur !

x	24	18	8	11	10	76	21
y	36	27	12	16,5	15	112	31,5

Réponse : 76/112 est en désaccord avec 24/36 = 2/3. La suppression de la colonne correspondante fournirait un tableau de proportionnalité.

3. La règle de trois directe et inverse

Dans la règle de trois directe, les termes étant rangés suivant leur ordre naturel, le premier terme est au second, comme le troisième est au quatrième, c'est-à-dire, que si le second est plus grand ou plus petit que le premier, le quatrième est aussi plus grand ou plus petit que le troisième dans la même proportion.

GRANDEUR 1 GRANDEUR 2
a ---------------------------- b
c ---------------------------- d

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

Mais dans la règle inverse, le quatrième terme est autant au-dessus du troisième, que le second est au-dessous du premier.

GRANDEUR 1 GRANDEUR 2
a ---------------------------- b
c ---------------------------- d

$$\frac{a}{c}=\frac{d}{c}$$

Exemple :

on dit dans la règle de trois directe :

si trois toises de bâtiment coûtent vingt livres, combien en coûteront six?

C'est-à-dire,

Nombre de toises prix
3 ---------------------------- 20
6 ---------------------------- x

$\frac{3}{6}=\frac{20}{x}$; 3x=120 ; x=40

Six toises de bâtiment coûteront quarante livres;

Mais dans l'inverse, on dit :

Si vingt ouvriers font dix toises de bâtiment en quatre jours, en combien de temps quarante les feront-ils?

C'est-à-dire,

Nombre d'ouvriers temps
20 ---------------------------- 4
40 ---------------------------- x

$\frac{20}{40}=\frac{x}{4}$; 80=40x ; x=2

Quarante ouvriers les feront en deux jours.

4. Des partages directement et inversement proportionnels

Pour partager une quantité, N, en parts directement proportionnels a « a », « b » et « c », chaque part est obtenue en multipliant la constante de proportionnalité k= $\frac{N}{a+b+c}$ par chaque nombre « a », « b » et « c ». C'est –à-dire :

$$\frac{part1}{a}=\frac{N}{a+b+c}\ ; \qquad \frac{part2}{b}=\frac{N}{a+b+c}\ ; \qquad \frac{part3}{c}=\frac{N}{a+b+c}$$

Exemple :

Une somme de 500 € est à partager entre 4 personnes A, B, C et D proportionnellement à leur âge 32 ans, 28 ans, 25 ans, 15 ans.

$\frac{part1}{32}=\frac{500}{32+28+25+15}$; part 1= $\frac{500}{100}\cdot 32 = 160$ €

$\frac{part2}{28}=\frac{500}{32+28+25+15}$; part 2= $\frac{500}{100}\cdot 28 = 140$ €

$\frac{part3}{25}=\frac{500}{32+28+25+15}$; part 3= $\frac{500}{100}\cdot 25 = 125$ €

$\frac{part4}{15}=\frac{500}{32+28+25+15}$; part 4= $\frac{500}{100}\cdot 15 = 75$ €

Pour partager une quantité, N, en parts inversement proportionnels a « a », « b » et « c », chaque part est obtenue en divisant la constante de proportionnalité k= $\frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ entre chaque nombre « a », « b » et « c ». C'est –à-dire :

Part 1= $\frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$:a; part 2= $\frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$:b; part 3= $\frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$:c

Exemple :

On partage une somme de 295 € entre trois personnes A, B et C en parts inversement proportionnels aux nombres 2, 5 et 7. Calculer la part de chacune.

D'abord, on calcule k= $\frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{295}{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}=\frac{295}{\frac{59}{70}}=350$

Après, on calcule les quantités:

Quantité 1= 350 :2 = 175 €
Quantité 2= 350 :5 = 70 €
Quantité 3= 350 :7 = 50 €

5. La proportionnalité double

Des problèmes de proportionnalité double:
Ce sont des problèmes dans lesquels une grandeur varie proportionnellement, du moins, à deux variables indépendantes.

On traite le problème en fixant une donnée et en travaillant sur les deux autres, puis on continue en faisant varier la troisième donnée. (le quatrième, etc.)

Exemple : 4 boulangers font 4 pains en 4 minutes. Combien de pains font 12 boulangers en 12 minutes?

grandeur 1	**grandeur 2**	**grandeur 3(inconnue)**
nombre de boulanger	temps	nombre de pains
4	4	4
12	12	x

Si on fixe la grandeur 2, les grandeurs 1 et 3 sont directement proportionnelles
Si on fixe la grandeur 1, les grandeurs 2 et 3 sont directement proportionnelles
Alors :

directe directe

$$\frac{4}{12} \cdot \frac{4}{12} = \frac{4}{x}$$

Exemple : Un jardinier consomme 630l d'eau par semaine pour arroser tous les jours ses 45 arbres. Combien de litres d'eau supplémentaires devra-t-il prévoir pour arroser les 15 arbres de son voisin pendant les vacances (4 semaines) de celui-ci ?

grandeur 1	**grandeur 2**	**grandeur 3(inconnue)**
nombre d'arbres	nombre de semaines	nombre de litres d'eau
45	1	630
15	4	x

Si on fixe la grandeur 2, les grandeurs 1 et 3 sont directement proportionnelles
Si on fixe la grandeur 1, les grandeurs 2 et 3 sont directement proportionnelles
Alors :

directe directe

$$\frac{45}{15} \cdot \frac{1}{4} = \frac{630}{x}$$

Exemple : cinq photocopieuses mettent 6 minutes pour faire 600 photocopies. Combien de temps 7 photocopieuses mettront-elles pour faire 1400 photocopies ?

grandeur 1	**grandeur 2**	**grandeur 3(inconnue)**
nombre de photocopieuses	nombre de photocopies	minutes
5	600	6
7	1400	x

Si on fixe la grandeur 2, les grandeurs 1 et 3 sont inversement proportionnelles
Si on fixe la grandeur 1, les grandeurs 2 et 3 sont directement proportionnelles
Alors :

inverse directe

$$\frac{7}{5} \cdot \frac{600}{1400} = \frac{6}{x}$$

6. Des problèmes avec des pourcentages

Un **pourcentage** est une façon d'exprimer un nombre comme une fraction de cent, généralement en utilisant le signe *%*

$a\% = \frac{a}{100}$

On utilise le pourcentage seulement lorsqu'un nombre représente une proportion ou une fraction d'un ensemble.
La formule suivante permet de **calculer un pourcentage** à partir de deux valeurs données. Cela permet de situer la première valeur par rapport à la deuxième.

$$\boxed{Pourcentage = \frac{effectif}{effectif\ total} \times 100}$$

Rappelle : a% de N $= \frac{a}{100} \cdot N$

Le pourcentage comme une règle de trois directe:

a% de b est c alors $\longrightarrow$	a---------100 c----------b

Exemple1:

10% de 30 est x	10% de x est 3	x% de 30 est 3
10--------100 x----------30	10 ---------100 3 ------------ x	x --------- 100 3 ------------30

Exemple2:
Il y a 200 élèves au lycée, 25% des élèves portent des lunettes. Combien d'élèves portent des lunettes?

25%de 200 $= \frac{25}{100} \cdot 200 = 50$ élèves

Exemple 3:
Dans une classe de 25 élèves il y a 13 filles. Quel est le pourcentage de filles?

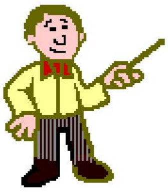
On applique la formule: . $\frac{13}{25} \cdot 100$, Donc il y a 52% de filles dans cette classe.

On peut vérifier le résultat en calculant 52% de 25.

Pourcentage et évolution

Remarque:

Il n'y a qu'une formule universelle à retenir et un seul schéma dès qu'on a affaire à des hausses



es baisses en tout genre, c'est celle là :

$$y_1 \times CM = y_2$$

Valeur **avant** évolution	Coefficient multiplicatif	Valeur **après** évolution

Augmentation ou diminution (évolution) en pourcentage

Avec cette formule, on peut faire tous les exercices dans lesquels on a des hausses et des baisses. Il faut juste parfois repérer ce qui serait la valeur d'avant et celle d'après.

Ce qui est la clé qui change, c'est le CM !! Le fameux coefficient multiplicatif !!

Ce qu'il faut retenir :

• **Si c'est une <u>hausse</u> de t % alors CM = 1 +** $\mathbf{\frac{t}{100}}$ c'est-à-dire cela équivaut à calculer (100+t)%

• **Si c'est une <u>baisse</u> de t % alors CM = 1 –** $\mathbf{\frac{t}{100}}$ c'est-à-dire cela équivaut à calculer (100 – t)%

Exemple :

Ça augmente de 25%, alors CM = $1 + \frac{25}{100} = 1 + 0,25 = 1,25$

Ça baisse de 36% alors CM = $1 - \frac{36}{100} = 1 - 0,36 = 0,64$

Après il faut savoir revenir sur ses pas !!

Si au cours d'un calcul on obtient une valeur d'un CM et qu'on veut savoir si ça fait une hausse ou une baisse, il suffit d'effectuer le calcul CM – 1 et de multiplier ce résultat par 100.

• **Si le résultat obtenu est positif, c'est une hausse !! Et on obtient même le taux de la hausse en résultat !!**

Exemple :

CM = 1,38

1,38 – 1 = 0,38 et 0,38 × 100 = 38

C'est donc une hausse de 38 %.

• **Si le résultat obtenu est négatif, c'est une baisse !! Et on obtient même le taux de la baisse en résultat !!**

Exemple :

CM = 0,48

0,48 – 1 = - 0,52 et - 0,52 × 100 = - 52

C'est donc une baisse de 52 %.

Remarque : Si par hasard CM = 1, ça veut dire que ça n'a pas varié

Pourcentages enchaînés : Évolutions successives

Si on enchaîne les évolutions (des hausses et des baisses), on prend les coefficients multiplicatifs de chacun et on les multiplie tous entre eux, cela donne un coefficient multiplicatif CM global, alors : **valeur après évolution = CM · valeur avant évolution**

Exemple :

On augmente de 30% et on baisse de 40% !!

« On augmente de 30% » : $CM_1 = 1 + 0,3 = 1,3$

« On baisse de 40% » : $CM_2 = 1 – 0,4 = 0,6$

On obtient alors le CM global :

$CM = CM_1 \times CM_2 = 1,3 \times 0,6 = 0,78$

On peut même s'intéresser à ce que ça donne !!

CM = 0,78 donc 0,78 – 1 = - 0,22 et 0,22 × 100 = - 22 donc c'est une baisse de 22 % !!

Et en plus ça marche encore si on fait plein d'évolutions (ça augmente de 15%, ça baisse de 10%, ça augmente de 30%, ça augmente de 20% : 1,15 × 0,9 × 1,3 × 1,2)

« Pourcentage de pourcentage »

C'est quand on prend une part d'une part de quelque chose. On multiplie les taux et on divise par 100 pour avoir le taux de cette « sous-part » dans le total

Exemple: Dans une entreprise, il y a 40% d'hommes et parmi ces hommes il y a 30% de cadres.

On demande alors la part en pourcentage d'hommes cadres dans l'entreprise $\frac{40 \times 30}{100} = \frac{1200}{100} = 12$

Il y a donc 12% d'hommes cadres dans l'entreprise.

7. L'intérêt simple

L'intérêt simple, **I**, est le revenu d'une somme d'argent prêtée (ou placée). Le montant de l'intérêt est fonction du capital, **C**, du taux de placement, **r%**, et de la durée du placement, **t**.

Remarque :
Durée de placement :
Le montant de l'intérêt varie selon la durée du prêt. Celle-ci peut-être calculée en jours, en quinzaines, en mois ou années.
Le calcul de la durée se fait selon les règles suivantes :

- Une année compte 360 jours, 24 quinzaines, 12 mois.
- Si la durée est calculée en jours, les mois sont comptés à leur juste valeur. Sans autre indication, le mois de Février compte 28 jours.

Exemple : Quelle est la durée d'un placement effectué du 5 Septembre au 15 Décembre ?

Septembre:	30-5 = 25
Octobre	31
Novembre	30
Décembre	15
	101 jours

- Si la durée est calculée en quinzaines: on compte les quinzaines à partir du 1er ou du 16 de chaque mois qui suit le dépôt, à partir du 1er ou du 16 qui précède le retrait.
- Si la durée est calculée en mois, on ne tient pas compte de la durée réelle des mois .

FORMULES:

$I = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{100}$ (durée en années) $I = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{2 \cdot 100}$ (durée en semestre)

$I = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{12 \cdot 100}$ (durée s en mois) $I = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{3 \cdot 100}$ (durée en quadrimestre)

$I = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{360 \cdot 100}$ (durée en jours) $I = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{4 \cdot 100}$ (durée en trimestre)

Le capital final (valeur acquise)

En ajoutant à un capital les intérêts qu'il a produit à la suite d'un placement, on obtient la somme dont dispose désormais le propriétaire des fonds. Cette somme est la valeur acquise
$C_F = C + I$

Activités :

1. Quel intérêt un capital de 3 200 €, placé à 7.5% pendant 5 ans produit-il ?
$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{3200 \cdot 7.5 \cdot 5}{100}$$

2. Quel intérêt un capital de 6 420 € placé à 10% l'an pendant 8 mois produit-il ?
$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{12 \cdot 100} = \frac{6420 \cdot 10 \cdot 8}{12 \cdot 100}$$

3. Quel intérêt un capital de 2 000 €, placé à 9% pendant 15 quinzaines, produit-il ?
$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{24 \cdot 100} = \frac{2000 \cdot 9 \cdot 15}{24 \cdot 100}$$

4. Quel intérêt un capital de 12 000 €, placé à 4.5% du 23 Août au 11 Juin, produit-il ?
$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{360 \cdot 100} = \frac{12000 \cdot 4.5 \cdot 264}{360 \cdot 100}$$

août 31-23 ; septembre 30 ; octobre 31; novembre 30 ; décembre 31 ; janvier 31 ; février 28 ; mars 31 ; avril 30 ; mai 31 ; juin 11
TOTAL : 9+30+31+30+31+31+28+31+30+31+11=293 jours

5. Calculer la valeur acquise par un capital de 20 000 € placé à 12% l'an, pendant 270 jours ?

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{360 \cdot 100} = \frac{20000 \cdot 12.5 \cdot 270}{360 \cdot 100}$$

$$C_F = C + I = 20000 + \frac{20000 \cdot 12.5 \cdot 270}{360 \cdot 100}$$