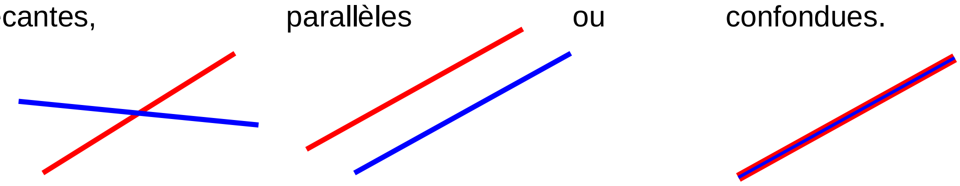
UNITÉ 5 : DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

POUR DÉBUTER

Il faut rappeler

- La représentation d'une fonction linéal
- Deux droites peuvent être :

sécantes, parallèles ou confondues.



1. Systèmes d'équations linéaires

D'abord, il faut savoir que toute **équation linéaire** à deux inconnues est de la forme ax+by=c. En plus, l'ensemble des points P(x,y) vérifiant cette équation est sa solution. Cet ensemble st une droite.

Un **système d'équations linéaires** est un ensemble d'équations linéaires qui portent sur les mêmes inconnues.

$$\begin{cases} a.x+b.y=c \\ a'.x+b'.y=c' \end{cases}$$

celui-ci peut n'avoir aucune solution, une seule ou bien alors une infinité.
Résoudre un système d'équations, c'est trouver toutes les solutions communes aux deux équations.
Classement des systèmes selon le nombre de solutions.
Si S est le nom du système alors:

- Si S admet au moins une solution, on dit que le système est compatible. Sinon, on dit que le système est incompatible

- Si S a une seule solution, on dit que le système est déterminé
- Si S a une infinité de solutions, on dit que le système est indéterminé.

Deux **systèmes** (S) et (S') sont dits **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.
Exemple: Les systèmes

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ x+3y=5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+2y=3 \\ y=2 \end{cases}$$

sont équivalents. Ils admettent pour unique solution le couple(1;2), c'est-à-dire, x =1 et y =2.
La résolution d'un système se peut faire de différentes manières: graphiquement, par substitution, par comparaison ou par combinaisons linéaires (ou addition).

- La méthode graphique.
- La méthode de substitution.
- La méthode de comparaison.
- La méthode de combinaison.

2. DES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE UN SYSTÈME

La méthode graphique.

Pour résoudre un système graphiquement, il faut faire :
- D'abord, transformer chaque équation pour l'écrire sous la forme y = ax + b.
- Après, représenter graphiquement les droites D1 et D2 ainsi définies.
- Et finalement, lire les coordonnées de leur point d'intersection.

Remarque :
- Si les droites sont sécantes, il ya une seule solution. La solution est leur point d'intersection.
- Si les droites sont confondues, il y a une infinité de solutions.
- Si les droites sont parallèles, il n'ya pas de solution.

Exemple:

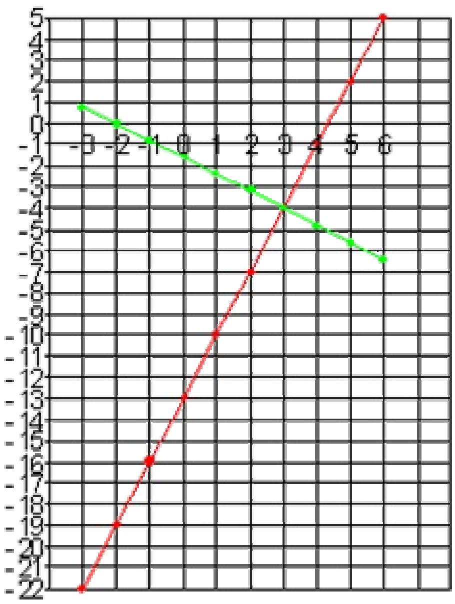
Résoudre le système: $\begin{cases} 3x - y = 13 \\ 4x + 5y = -8 \end{cases}$

Solution:

Les équations $\begin{cases} 3x - y = 13 \\ 4x + 5y = -8 \end{cases}$ s'écrivent aussi $\begin{cases} -y = -3x + 13 \\ 5y = -4x - 8 \end{cases}$ ou

$$\begin{cases} y = 3x - 13 \\ y = -\frac{4}{5}x - \frac{8}{5} \end{cases}$$

Les points de coordonnées (x, y) tels que y = 3x - 13 sont les points d'une droite D1.
Pour tracer cette droite, cherchons deux points:
Déterminons par exemple les points d'abscisses 2 et 4.
Si x = 2, y = - 7 A(2,-7)
Si x = 4, y = - 1 B(4;-1)
Plaçons ces deux points et traçons la droite (AB) ou D1.
Les points de coordonnées (x, y) tels que $y = -\frac{4}{5}x - \frac{8}{5}$ sont les points d'une droite D2.



Pour tracer cette droite, cherchons deux points.
Déterminons par exemple les points d'abscisses -2 et 8.
Si x = - 2, y = 0, A (- 2, 0)
Si x = 8, y = -8, B (8, - 8)
Plaçons ces deux points et traçons la droite (EF) ou D2.
Le point d'intersection de D1 et D2 est le point C de coordonnées (3, - 4).

Ces coordonnées vérifient les équations des deux droites et sont donc solution du système d'équations.

Remarque:

On aurait pu déterminer d’autres points des droites D1 et D2 en choisissant d’autres valeurs de x. On choisit en général des valeurs de x qui permettent un calcul facile de y**.**

D’autres exemples :

EXEMPLE 1

Les équations $\begin{cases} 3x - Y = -8 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

s'écrivent aussi $\begin{cases} y = 3x + 8 \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases}$

Les points de coordonnées (x, y) tels que y = 3x + 8 sont les points d’une droite D1.
Pour tracer cette droite, cherchons deux points:
Si x = 0, y = 8
Si x = - 3, y = - 1
Les points A (0, 8) et B (- 3, - 1) sont deux points de D1.

Les points de coordonnées $(x; y)$ tels que $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ sont les points d'une droite D2.

Prout tracer cette droite, cherchons deux points:
si x = 1 , y = 0
si x = 4, y = - 2
Les points E (1 ,0) et F (4, -2) sont des points de D2.

Le point d’intersection de D1 et D2 a pour coordonnées (- 2, 2) donc la solution est x = -2 et y = 2.

EXEMPLE 2

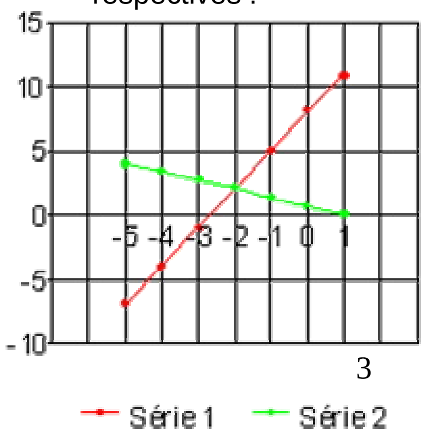
Les équations $\begin{cases} 4x + 5y = -7 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$

s'écrivent aussi $\begin{cases} y = -\frac{4}{5}x - \frac{7}{5} \\ y = \frac{3}{2}x - 6 \end{cases}$

Pour représenter les droites D1 et D2 d’équations respectives :

$$y = -\frac{4}{5}x - \frac{7}{5} \quad \text{et} \quad y = \frac{3}{2}x - 6.$$

Cherchons deux points pour chaque droite.
Les points A (2, -3) et B (- 3, 1) sont des points de D1.
Les points E (0, - 6) et F (4, 0) sont des points de D2.



le point d'intersection de D1 et D2 a pour coordonnées (2, - 3),
la solution est donc: x = 2 et y = - 3.

La méthode de substitution

D'abord, on exprime x en fonction de y en l'extrayant de la première ou de la seconde équation, c'est à dire celle qui paraît la plus simple.
Et après, on reporte la valeur de x dans la seconde équation qui devient donc une équation du premier degré en y.

Remarque:
Dans tous les cas, on peut choisir x ou y comme inconnue à substituer, mais c'est celle qui donne le calcul le plus simple qu'il vaut mieux prendre.

Exemple:
Résoudre le système:

$$\begin{cases} 5\mathbf{x} + 2\mathbf{y} = 4 & (1) \\ 4\mathbf{x} - 3\mathbf{y} = 17 & (2) \end{cases}$$

Solution:
Transformer une des égalités (1) pour exprimer l'une des inconnues x ou y en fonction de l'autre:

(1) 5x + 2y =4 d'où 2y = 4 - 5x

$$\mathbf{y} = \frac{4 - 5\mathbf{x}}{2}\ (\mathbf{a})$$

Remplacer, dans l'autre égalité (2) cette inconnue par l'expression (a) trouvée précédemment:

$$4\mathbf{x} - 3\mathbf{y} = 17 \qquad (2)$$

Alors $4x - 3\left(\frac{4-5x}{2}\right) = 17$ (2')

Résoudre l'équation (2') à une inconnue ainsi obtenue:

$$4\mathbf{x} - 3(\frac{4 - 5\mathbf{x}}{2}) = 17$$

$$\frac{8\mathbf{x} - 12 + 15\mathbf{x}}{2} = \frac{34}{2}$$

$$23\mathbf{x} - 12 = 34$$

$$23\mathbf{x} = 46$$

$$\mathbf{x} = 2$$

Reporter la valeur ainsi trouvée dans l'égalité (a):

$$y = \frac{4-5(2)}{2} \quad \text{d'où} \quad y = \frac{4-10}{2} = -3.$$

Le couple (2, - 3) est solution du système, c'est-à-dire x=2 et y=-3.

La méthode de comparaison

On privilégie généralement la méthode de résolution d'un système d'équations par comparaison lorsque les deux variables dépendantes (y_1 et y_2) sont déjà isolées. Autrement dit, lorsque le système a la forme suivante :

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1x + b_1 \\ y_2 &= a_2x + b_2 \end{aligned}$$

Comme la résolution d'un système consiste à trouver la valeur de x pour laquelle y_1 et y_2 ont la même valeur ($y_1 = y_2$), on posera directement :

$$y_1 = y_2$$

On obtient ainsi une équation où il n'y a qu'une variable.

$$a_1x + b_1 = a_2x + b_2$$

Il arrive parfois que l'on procède à quelques manipulations algébriques pour arriver à isoler la variable dépendante (y).

Prenons le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{aligned} y_1 + 4 &= 3x - 1 \\ y_2 &= 2x + 2 \end{aligned}$$

Pour utiliser la méthode de comparaison, il faut tout d'abord **isoler** y_1 dans la première équation.

$$\begin{aligned} y_1 + 4 &= 3x - 1 \\ y_1 + 4 - 4 &= 3x - 1 - 4 \\ y_1 &= 3x - 5 \end{aligned}$$

Nous pouvons **effectuer la comparaison**.

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 \\ 3x - 5 &= 2x + 2 \end{aligned}$$

Il faut maintenant **isoler x** pour en connaître la valeur.

$$\begin{aligned} 3x - 5 + 5 &= 2x + 2 + 5 \\ 3x &= 2x + 7 \\ 3x - 2x &= 2x + 7 - 2x \\ x &= 7 \end{aligned}$$

On substitue dans une des équations de départ la valeur trouvée de x. Ce qui nous permettra de trouver la valeur des variables dépendantes (y_1 et y_2).

On peut substituer la valeur de x dans n'importe laquelle des équations de départ, par contre, pour effectuer une vérification supplémentaire il peut être intéressant de substituer x dans les deux équations de départ. On devrait obtenir la même valeur pour y_1 et y_2. Si ce n'est pas le cas, nous avons alors commis une erreur dans notre parcours.

$$y_1 = 3x - 5$$
$$y_1 = 3 \cdot (7) - 5$$
$$y_1 = 21 - 5$$
$$y_1 = 16$$

La solution à notre système d'équation est le couple (7, 16), c'est-à-dire, x=7 et y=16.

La méthode de combinaison (ou réduction)

La méthode pour résoudre un système par addition ou combinaison linéaire cherche à éliminer l'une des deux inconnues.

Exemple:

résoudre le système:

$$7\mathbf{x} - 4\mathbf{y} = 5 \qquad (1)$$
$$5\mathbf{x} + 6\mathbf{y} = -2 \qquad (2)$$

Solution:

L'équation (1) : 7x - 4y = 5 sera remplacée par : $5 \cdot (7x - 4y) = 5 \cdot 5$

et l'équation (2) : 5x + 6y = - 2 sera remplacée par : $(-7) \cdot (5x + 6y) = (-7) \cdot (-2)$

On obtient le système :

$$\begin{cases} 35\mathbf{x} - 20\mathbf{y} = 25 \\ -35\mathbf{x} - 42\mathbf{y} = 14 \end{cases}$$

On fait la somme des deux égalités membre à membre:
La sommes des deux égalités donne donc:

$$-62\mathbf{y} = 39, \quad \textbf{d'où} \quad \mathbf{y} = -\frac{39}{62}.$$

En remplacant y par $-\frac{39}{62}$ **dans l'une des équations données, par exemple dans (1), on obtient x**

$$7\mathbf{x} - 4\mathbf{y} = 5$$
$$7\mathbf{x} - 4(-\frac{39}{62}) = 5$$
$$7\mathbf{x} = -\frac{156}{62}$$
$$7\mathbf{x} = \frac{310 - 156}{62}$$
$$7\mathbf{x} = \frac{154}{62}$$

alors $x = \frac{154}{62} : 7 = \frac{11}{31}$

Il est aussi possible de multiplier la première égalité par 3 et la seconde par 2 pour éliminer y en sommant, puis résoudre l'équation ainsi trouvée.

Le couple $(\frac{11}{31}, -\frac{39}{62})$ **est solution du système**

C'est-à-dire x=$\frac{11}{31}$ et y=$-\frac{39}{62}$

D'autres exemples :

EXEMPLE 1 $A\begin{cases}3\mathbf{x} - 10\mathbf{y} = 3\\2\mathbf{x} + 15\mathbf{y} = -2\end{cases}$

On multiplie la première équation par 2 et la seconde équation par (- 3) puis on additionne les deux équations obtenues membre à membre
On trouve alors y dont on reporte la valeur dans une équation pour trouver x.

$$\begin{cases}3\mathbf{x} - 10\mathbf{y} = -4\\2\mathbf{x} + 15\mathbf{y} = 62\end{cases} \qquad \begin{cases}6\mathbf{x} - 20\mathbf{y} = 6\\- 6\mathbf{x} - 45\mathbf{y} = 6\end{cases}$$

$$\begin{cases}- 65\mathbf{y} = 12\\3\mathbf{x} - 10\mathbf{y} = 3\end{cases} \qquad \begin{cases}\mathbf{y} = -\frac{12}{65}\\3\mathbf{x} - 10(-\frac{12}{65}) = 3\end{cases} \begin{cases}\mathbf{y} = -\frac{12}{65}\\3\mathbf{x} = 3 - \frac{10\times12}{65}\end{cases} \qquad \begin{cases}\mathbf{y} = -\frac{12}{65}\\3\mathbf{x} = \frac{39}{13} - \frac{2\times12}{13}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathbf{y} = -\frac{12}{65}\\\mathbf{x} = \frac{1}{3}\times\frac{15}{13}\end{cases} \qquad \begin{cases}\mathbf{y} = -\frac{12}{65}\\\mathbf{x} = \frac{5}{13}\end{cases}$$

La solution est $\mathbf{x} = \frac{5}{13}$ **et** $\mathbf{y} = -\frac{12}{65}$ **ou** $(\frac{5}{13}; -\frac{12}{65})$.

$$B\begin{cases}6\mathbf{x} + 1\mathbf{y} = 2\\9\mathbf{x} + 14\mathbf{y} = -1\end{cases}$$

On multiplie la première équation par 3 et la seconde équation par (-2):

$$\begin{cases}6\mathbf{x} + 21\mathbf{y} = 2\\9\mathbf{x} + 14\mathbf{y} = -1\end{cases} \qquad \begin{cases}18\mathbf{x} + 63\mathbf{y} = 6\\- 18\mathbf{x} - 28\mathbf{y} = 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}35\mathbf{y} = 8\\6\mathbf{x} + 21\mathbf{y} = 2\end{cases} \qquad \begin{cases}\mathbf{y} = \frac{8}{35}\\6\mathbf{x} + 21\mathbf{y} = 2\end{cases}$$

On vient d'obtenir la valeur de y.
On multiplie ensuite la première équation par 2 et la seconde équation par (-3):
puis on additionne les deux équations membre à membre , on obtient ainsi - 15x = 7

$$\begin{cases}6x+21y=2\\9x+14y=-1\end{cases}\qquad\begin{cases}12x+42y=4\\-27x-42y=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}-15x=7\\y=\dfrac{8}{35}\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-\dfrac{7}{15}\\y=\dfrac{8}{35}\end{cases}$$

La solution est : $x=-\dfrac{7}{15}$ **et** $y=\dfrac{8}{35}$ **ou** $\left(-\dfrac{7}{15};\dfrac{8}{35}\right)$

Remarque : Aucune de ces méthodes n'est meilleure que l'autre. Selon les circonstances et les individus, elles sont plus ou moins commodes à utiliser…

3. LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES AVEC DES SYSTÈMES

La résolution d'un problème se déroule en 5 étapes :
1. Choisir les inconnues.
2. Mettre en système équations le problème.
3. Résoudre le système d'équations.
4. Vérifier la validité des solutions.
5. Répondre au problème.

EXEMPLES

1. **La somme de deux nombres est de 25 et la différence est de 8.**

Pour résoudre ça avec un système, il te faut deux variables.
Identifions-les:
x: le premier nombre (y>x)
y: le deuxième nombre (et on sait que y<x)
Notre système d'équation ressemblerait à:
x+y = 25 alors x = 25-y
x-y = 8 alors si on isole: x = 8 + y
On peut résoudre cela par un système.

Il existe 3 méthodes algébriques: la comparaison, la substitution et la réduction.

Par Comparaison:
On pose x = x, puisque c'est le même nombre.
Donc: 25-y = 8 + y
Tu te retrouve alors avec une seule variable. Tu l'isoles. Puis tu remplaces la valeur de y que t'as trouvé et tu cherches la valeur de x.
Si tu résous, tu vas trouver que y=16,5
Tu remplaces dans une des équations: x = 8 + 16,5 et tu trouves que x = 8,5

Par Substitution:
Par exemple, on a y = -x+3 et 2x+5y = 1
Tu peux remplacer le y de la 2e équation par la première équation (puisque y=y), ce qui te donnerai une seule équation à une seule variable:
2x+5(-x+3) = 1
Ensuite, tu résous et tu trouves que x=14/3.
Alors tu prends y = -x+3 et tu substitues x :
y = -(14/3) + 3 pour trouver la valeur de y, ce qui devrait te donner y = -5/3

Par réduction:
Voici 2 équations:
a) 3x + 4y = 9 et b) 6x + 5y = 12
On va multiplier l'équation a) pour obtenir la même quantité de x.
On a alors: 2a: 6x + 8y = 18
Puis on résous en soustrayant les équations 2a et b.
2a - b: 6x + 8y - (6x + 5y) = 18-12; 3y =6 et y=2
Puis on cherche x :
3x+8 = 9 ; x= (1/3)
Remarque : (la méthode graphique)
Puisque ce sont des droites linéaires, tu peux avoir soit: Aucune solution (si les droites ne se croisent pas, c'est-à-dire elles sont parallèles), 1 seule solution (si les droites sont sécantes) ou une infinité de solutions(si tes droites sont confondues), car n'oublies pas que les équations de ces systèmes représente une droite, soit une fonction. Alors fais attention. Tu peux toujours tracer les graphiques pour t'aider.

2. Une petite entreprise dispose de deux imprimantes: un modèle au laser qui imprime 5 pages à la minute et un modèle à jet d'encre qui imprime 4 pages à la minute. Aujourd'hui, le modèle au laser est en réparation et on ne pourra l'utiliser qu'à partir de 14:30. À 14:15, une employée veut imprimer un document sur disquette?

a)À quelle heure le document sera-t-il imprimé au complet, qu'on imprime tout de suite avec le modèle à jet d'encre ou que l'on attende 15 min pour imprimer avec le modèle au laser?
b)Combien de pages y avait-il à imprimer?

La question est à quelle heure le document sera terminé et combien de pages avait-il sachant que ça aurait pris le même temps avec la laser ou la jet d'encre.
Dans 15 min, l'imprimante au laser commencera à imprimer tandis que l'imprimante à jet d'encre aura déjà 60 pages (4 pages par min) d'imprimées.
y : n. de pages
x : temps en min
Les deux équations, <u>dans 15 min</u>, seront :
y = 4x + 60
y = 5x
4x + 60 = 5x
60 = x
Il faudrait donc qu'il s'écoule 60 min plus les 15 min du départ, soit 75 minutes.
Le document aura quant à lui 300 pages.
y = (4 · 60) + 60 = 300
y = 5 · 60 = 300
3. Benoît quitte la maison pour se rendre à son travail à bicyclette. Quinze minutes après son départ, Fannie constate que Benoît a oublié ses clefs. Elle décide de le rejoindre en voiture.
a) Si Benoît roule à une vitesse moyenne de 20km/h et Fannie à une vitesse moyenne de 40km/h, dans combien de temps Fannie aura-t-elle rejoint Benoît?
b) À quelle distance de la maison Fannie et Benoît se rencontreront-ils?

Remarque tout de suite que 15 min = 1/4 d'heure
<u>Dans 15 min</u>, Benoît aura parcouru cinq kilomètres
20 · 1/4 = 5
L'équation de Benoît, <u>dans 15 min</u>, sera donc :
y = 20x + 5

Où y est la distance en km et x le temps en heure.
Par ailleurs, dans 15 min, l'équation de Fannie sera simplement :
$y = 40x$
On pose :
$20x + 5 = 40x$
$5 = 20x$
$1/4 = x$
Fannie rejoint donc Benoît 15 min après être partie. Elle était partie 15 min après Benoît. Elle le rejoint donc 30 min après que Benoît soit parti.
Ils auront fait 10 km
$y = 40(1/4) = 10$
$y = 20(1/4) + 5 = 10$

4. Trouve le point d'intersection entre ces deux droites:
$y = -8x + 150$ et $y = -6x + 245$

Il suffit d'égaliser les deux équations et d'isoler la valeur de x, soit:
$-8x + 150 = -6x + 245$
$-8x + 150 + 8x = -6x + 245 + 8x$
$-8x + 150 + 8x -245 = -6x + 245 + 8x -245$
$-95 = 2x$
$\frac{-95}{2} = \frac{2x}{2}$
$-47,5 = x$
Quelles sont les valeurs de y associées à x = -47,5 ?
Pour le savoir, il suffit de reprendre nos équations de départ.
$y_1 = -8x + 150$; $y_1 = -8(-47,5) + 150$; $y_1 = 530$
$y_2 = -6x + 245$; $y_2 = -6(-47,5) + 245$; $y_2 = 530$

Le point d'intersection est donc (-47,5; 530)

EXERCICES

Exercice 1
Une mère a 30 ans, sa fille a 4 ans. Dans combien d'années l'âge de la mère sera-t-il le triple de celui de sa fille?

Exercice 2

Aline a cueilli 84 trèfles; certains ont 3 feuilles, les autres 4 feuilles. On compte en tout 258 feuilles.
a) x désigne le nombre de trèfles à 3 feuilles et y celui des trèfles à 4 feuilles. Mettre le problème en équation.
b) Résoudre le système précédent et en déduire le nombre de trèfles à 4 feuilles.

Exercice 3

Dans une papeterie, 4 classeurs et 1 paquet de feuilles coûtent 72 francs, 3 classeurs et 2 paquets de feuilles coûtent 59 francs.
a) Si x est le prix d'un paquet de feuilles et y le prix d'un classeur, écrire un système d'équations traduisant les données.
b) Calculer le prix d'un classeur et celui d'un paquet de feuilles.

Exercice 4

Le premier devoir surveillé a duré une heure; le deuxième a duré deux heures. Il est décidé de calculer la moyenne en attribuant le coefficient 1 au devoir d'une heure et le coefficient 2 au devoir de deux heures.
a) Alain a eu 15 au premier devoir et 9 au deuxième devoir. Calculer sa moyenne.
b) Boris a eu 8 au premier devoir. Sa moyenne est 12. Combien a-t-il eu au deuxième devoir?
c) Carine a 12 de moyenne, mais en permutant ses deux notes, elle aurait treize de moyenne. Quelles sont ses deux notes?

Exercice 5
Un téléphone portable et son étui coûtent ensemble 110 €. Le téléphone coûte 100 € de plus que l'étui. Quels sont les prix du téléphone et de l'étui ?

Exercice 6
Anatole, Barnabé et Constantin possèdent respectivement x euros, y euros et 40 euros. Ils jouent au poker avec la règle suivante: « La partie se déroule en 3 manches. Celui qui perd une manche doit doubler l'avoir des deux autres. »
Voici le déroulement de cette partie de poker :
Anatole perd la première manche, puis Barnabé perd la seconde et enfin Constantin perd la troisième. A la fin de la partie chacun de nos trois compères possèdent 80 euros.

1. Compléter le tableau suivant en justifiant vos réponses:

	Avoir de Anatole en €	Avoir de Barnabé en €	Avoir de Constantin en €
Au début de la partie	x	y	40
A la fin de la manche perdue par Anatole			
A la fin de la manche perdue par Barnabé			
A la fin de la partie			

2. Ecrire que chaque joueur possède 80 euros à la fin de la partie. Vous obtiendrez alors 3 équations à 2 inconnues.

3. Prendre deux quelconques des trois équations et les résoudre. Vérifier que les valeurs ainsi trouvées pour x et pour y satisfont la troisième équation.

4. Quels étaient les avoir d'Anatole et de Barnabé en début de partie. Lequel des trois joueurs a réalisé le plus gros gain.

Correction

Exercice 1
Soit x le nombre d'années où l'âge de la mère sera le triple de celui de sa fille.
30 + x = 3 × (4+x)
30 + x = 12 + 3x
2 x = 18
x = 9
Dans 9 ans, l'âge de la mère(30+9=39 ans) sera bien le triple de celui de sa fille (4+9=13 ans).

Exercice 2
a)
$$\begin{cases} x + y = 84 \\ 3x + 4y = 258 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x + 3y = 252 \\ 3x + 4y = 258 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 84 - y \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 78 \\ y = 6 \end{cases}$$
Il y a donc 6 trèfles à 4 feuilles.

Exercice 3
a)
$$\begin{cases} x + 4y = 72 \\ 2x + 3y = 59 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x = 72 - 4y \\ 144 - 8y + 3y = 59 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 72 - 4y \\ -5y = -85 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 72 - 4y \\ y = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 17 \end{cases}$$

Un classeur coûte donc 17 francs alors qu'un paquet de feuilles vaut 4 francs.

Exercice 4
a) La moyenne d'Alain est **11**.

b) La seconde note de Boris est **14**.

c) x + 2y = 36 et 2x + y = 39. Donc la première note (x) est **14**, et la seconde (y) est **11**.

Exercice 5
Attention à ne pas répondre trop vite à ce problème :
en posant p le prix de l'étui, on a :
(p + 100) + p = 110
2 p = 110 - 100
p = 10 / 2
p = 5
L'étui coûte donc 5 € et le téléphone vaut 105 €.

Exercice 6
1.

	Avoir de Anatole en euros	Avoir de Barnabé en euros	Avoir de Constantin en euros
Au début de la partie	x	y	40
A la fin de la manche perdue par Anatole	x - y - 40	2y	80
A la fin de la manche perdue par Barnabé	2x - 2y - 80	2y - (x - y - 40) - 80 = 3y - x - 40	160
A la fin de la partie	4x - 4y - 160	6y - 2x - 80	160 - (2x - 2y - 80) - (3y - x - 40) = -x - y + 280

2.
$$\begin{cases} 4x - 4y - 160 = 80 \\ 6y - 2x - 80 = 80 \\ -x - y + 280 = 80 \end{cases}$$ soit : $$\begin{cases} x - y = 60 \\ -2x + 6y = 160 \\ -x - y = -200 \end{cases}$$ soit : $$\begin{cases} x - y = 60 \\ -x + 3y = 80 \\ x + y = 200 \end{cases}$$

3.

Prenons la première et la troisième équation :

$$\begin{cases} x - y = 60 \\ x + y = 200 \end{cases} \begin{cases} x = 60 + y \\ x + y = 200 \end{cases} \begin{cases} x = 60 + y \\ 60 + y + y = 200 \end{cases} \begin{cases} x = 60 + y \\ 2y = 200 - 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 60 + y \\ 2y = 140 \end{cases} \begin{cases} x = 60 + y \\ y = 70 \end{cases} \begin{cases} x = 60 + 70 = 130 \\ y = 70 \end{cases}$$

Vérification : -x + 3y = - 130 + 3 × 70 = 80

4.
Anatole avait 130 euros, Barnabé 70 euros et Constantin 40 euros.
Pour Anatole : 80 - 130 = -50, il a donc perdu 50 euros.
Pour Barnabé : 80 - 70 = 10, il a gagné 10 euros.
Pour Constantin : 80 - 40 = 40, il a gagné 40 euros.
Le plus gros gain est donc réalisé par Constantin.

Exemples de systèmes

Résolution par substitution.

On cherche à exprimer dans une des deux équations une inconnue en fonction de l'autre. Dans la première équation, on choisit d'exprimer y en fonction de x. Il vient donc :

$$2y = -1 - 3x$$
$$\text{d'où} \quad y = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$$

Dans la seconde équation, on remplace y par son expression en x. La seconde équation devient alors une équation du premier degré en x…que nous savons résoudre.

$$5x - 3\underbrace{\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x\right)}_{y} = 2$$
$$\left(5 + \frac{9}{2}\right)x = 2 - \frac{3}{2}$$
$$\frac{19}{2}x = \frac{1}{2}$$
$$x = \frac{1}{19}$$

Pour avoir la valeur de y, il suffit de remplacer x par la sienne dans l'expression en fonction de x que nous avons obtenue. Ainsi :

$$y = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{19}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{38} = \frac{-19-3}{38} = \frac{-22}{38} = -\frac{11}{19}$$

Pour conclure, nous écrirons donc que :

$$S = \left\{\left(\frac{1}{19}; -\frac{11}{19}\right)\right\}.$$

Résolution par combinaisons linéaires.

Nous allons résoudre par combinaisons linéaires le système

$$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases}$$

Par combinaisons linéaires, cela signifie que nous allons faire des sommes de produits afin d'éliminer l'une des deux inconnues.

On décide de supprimer y. On multiplie la première par 3 et la seconde par 2. Puis on les ajoutera membre à membre.

$$\begin{array}{lll} 3x + 2y = -1 & \times 3 & \longrightarrow \quad 9x + 6y = -3 \\ 5x - 3y = 2 & \times 2 & \longrightarrow \quad 10x - 6y = 4 \end{array}$$

Puis on les ajoute membre à membre :

$$\begin{array}{r} 9x + 6y = -3 \\ \oplus \quad 10x - 6y = 4 \\ \hline 19x + 0y = 1 \end{array}$$

d'où

$$x = \frac{1}{19}$$

Pour déterminer y, on remplace x par sa valeur dans une des deux équations du système : la première par exemple.

$$\begin{aligned} 3\times\frac{1}{19}+2y &= -1 \\ 2y &= -\frac{22}{19} \\ y &= -\frac{22}{38} = -\frac{11}{19} \end{aligned}$$

L’unique solution de ce système est le couple (1/19 ; -11/19). Ce que l’on résume par :

$$S=\left\{\left(\frac{1}{19};-\frac{11}{19}\right)\right\}.$$