UNITÉ 4 : DES ÉQUATIONS DE 1r ET 2E DEGRÉ

POUR DÉBUTER

Il faut rappeler :

- le **degré d'un monôme** et le **degré d'un polynôme** pour déterminer le degré d'une équation.
- la **valeur numérique** d'une expression algébrique, pour vérifier la solution d'une équation.
- Savoir traduire les expressions du langage courant au **langage algébrique** afin de résoudre des problèmes avec des équations.

1. Des identités et des équations

Une **expression algébrique** est constituée de nombres, de lettres et de signes opératoires.

Une **égalité algébrique** est constituée par deux expressions algébriques séparées par le signe =.

Il y a deux types d'égalités algébriques : l'identité et l'équation.

On appelle **« identité** » une égalité évidente ou une égalité satisfaite quelles que soient les valeurs numériques des lettres qui y entrent.

Ainsi 8 = 8 est une identité, mais (a + b)2 = a 2 + 2ab + b2 est aussi une identité

Par contre l'égalité : 5 x = 40
N'est pas une identité, car si nous remplaçons « x » par 3, par exemple, le membre de gauche est égal à 5 fois 3 soit « 15 », le membre de droite est égal à 40 ; et 15 n'est pas égal à 40.
Si je remplace « x » par 8, le membre de gauche est égal à 40, et par conséquent l'égalité se transforme en identité : 40 = 40
L'égalité 5x = 40 ne se réduit donc à une identité que si l'on remplace « x » par une valeur convenablement choisie, c'est une équation.

On appelle « **équation** » une égalité qui n'a lieu que pour certaines valeurs attribuées à une ou à plusieurs lettres appelées « **inconnues** »

Exemples : $5x = 40$; $y = 2x +4$; $2y = x^2 + x$; $-5x +7 = x +5$; ……

2. Éléments d'une équation

Toute équation est de la forme **A x + B = C x + D**
« AX+B » est le premier membre de l'équation et « CX+D » le second membre, c'est-à-dire, les **membres d'une équation**, ce sont les deux quantités qui sont séparées par le signe = ou; En plus, les **termes d'une équation**, ce sont les différentes quantités ou parties, dont chaque membre de l'équation est composé, et qui sont jointes entre elles par les signes + et -. Ainsi Ax, B, Cx et D sont les termes. Finalement, on appelle **inconnue** la valeur de x qui vérifie l'égalité. On la désigne généralement par la lettre « x »
Exemple : $5x + 7 = 6x +13$ est une équation à une inconnue.

Solution d'une équation. Équations équivalentes

Une équation est une phrase interrogative : l'équation 5x = 21 , dont l'inconnue est notée « x » , est la question : « Pour quelles valeurs numériques de « x » , l'égalité 5x = 21 est - elle vraie ? » « x » = 4,2 est la réponse à la question, on dit que « 4,2 » est la solution de l'équation.

L'activité qui consiste à Rechercher la valeur de « x » qui vérifie l'égalité « vraie » s ' appelle : résoudre.

La valeur particulière qu'il faut donner a l'inconnue pour avoir une identité sont appelées « les solutions » ou « racines » de l'équation.

On appelle « solution » d'une équation tout ensemble de nombres qui , mis à la place des inconnues , donne aux deux membres la même valeur.

Dans le cas d'une équation à une inconnue, une solution est également appelée « racine » de l'équation.

Ainsi l'équation 5x + 7 = 6x +13 admet la racine « x = - 6 » parce que pour « x » = -6 les deux membres sont égaux à « -23 ». On dit encore que pour « x » = -6 l'équation est « satisfaite ».
« Résoudre une équation », c'est trouver ses solutions.
Mais pour résoudre une équation, on la transforme en équations « équivalentes » jusqu'à ce que l'on obtienne une équation dont la résolution est immédiate.
Exemple c'est en transformant l'équation 5x + 7 = 6x +13 que l'on soit arrivé à l'équation « immédiate » x = - 6

Des **équations équivalentes** sont des équations qui ont les mêmes solutions

Exemples : 2x=4 et 3x-1=2x+1 sont équivalentes.

3. Équations du 1r degré (à une inconnue)

Une équation du 1er degré à une inconnue est une égalité entre 2 membres dans laquelle on trouve une lettre qui désigne l'inconnue. Cette lettre est à la puissance 1.

On peut l'exprimer sous la forme ax+b=0 ($a \neq 0$). Celle-ci n'a qu'une solution : $x = \frac{-b}{a}$

3.1 Transposition de termes

Pour transposer un terme dans une équation, on le change de membre en changeant son signe. Ceci se fait en ajoutant aux deux membres l'opposé du terme.

Exemple:

3x + 2=2x

3x + 2 – 2 =2x– 2

3x = 2x – 2, cette équation a la même solution

En plus, si on multiplie ou divise les deux membres d'une équation par une même valeur non nulle alors on ne modifie pas les solutions de l'équation.

Exemples:

a) $2x + 4 = 12$

$(2x + 4):2 = 10:2$

$x + 2 = 5$

b) $\frac{x}{3} = 2$

$\frac{x}{3} \cdot 3 = 2 \cdot 3$

$x = 6$

REMARQUE:

TRANSFORMATIONS d'une ÉQUATION.

Les théorèmes permettant de transformer une équation en équation équivalente en vue de la « résoudre ».

THÉORÈME 1 : On obtient une équation équivalente à une équation donnée en ajoutant à ses deux membres une même expression algébrique.

THÉORÈME 2: On obtient une équation équivalente à une équation donnée en multipliant ou en divisant les deux membres par un même nombre DIFFERENT DE ZÉRO.

3.2 Méthode pour résoudre des équations du 1r degré

1.- Supprimez les dénominateurs

2.- Supprimez les parenthèses. Développez les deux membres

3. - Transposez les termes afin de regrouper les termes identiques de part et d'autre de l'égalité (les termes littéraux à gauche et les termes indépendants à droite ou à l'envers)

4.- Réduisez chaque membre (opérez les termes semblables)

5.- Isolez l'inconnue, c'est-à-dire, divisez par le coefficient de l'inconnue (ou multiplication par son inverse). Simplifiez et calculez le résultat

6.- Vérifiez la solution

4. Équations du 2e degré (à une inconnue)

Une équation du 2ème degré à une inconnue est une égalité algébrique laquelle on peut exprimer sous la forme $ax^2+b\,x+c=0$ où a, b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$.

Si b et c sont non nulles, alors l'équation est complète. Pourtant, si b ou c est égal à zéro, alors l'équation est incomplète.

4.1 Équations du second degré complètes.

Pour obtenir la solution d'une équation du 2ème degré, on utilise la formule :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4.2 Équations incomplètes du second degré.

L'équation est dite « incomplète » si l'un des coefficients est nul.

Comme « a » est essentiellement différent de zéro, l'équation est incomplète si « **b = 0** » ou « **c = 0** »

L'équation du second degré devient incomplète dans trois cas :

Cas	Exemples	Forme générale
1er cas : b = 0	$x^2 - 5 = 0$	$a x^2 + c = 0$
2ème cas : c = 0	$x^2 + 2x = 0$	$a x^2 + b x = 0$
3ème cas : b = c = 0	$3 x^2 = 0$	$a x^2 = 0$

Nota : le coefficient « a » ne peut être nul sinon, l'équation de la forme b x + c = 0 ne serait plus du second degré.

RESOLUTION DES EQUATIONS INCOMPLETES DU SECOND DEGRE

1er cas : a x² + c = 0 ; « b = 0 »

Exemple 1

$x^2 - 4 = 0$

On écrit $x^2 = +4$; $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

On en déduit que $x = \pm 2$

L'équation a pour solution $x = +2$ ou $x = -2$ on peut écrire $x = \pm 2$

Commentaire :

Rappelez que $(+2)^2 = 4$ et que $(-2)^2 = 4$

Exemple 2 :

$x^2 + 3 = 0$

$X^2 = -3$ or, nous avons vu qu'il n'existe aucun nombre dont le carré soit négatif. Nous dirons donc qu'il y a impossibilité. L'équation n'a pas de solution.

2ème cas : **$a x^2 + b x = 0$**

Exemple :

$x^2 + 5x = 0$

« x » est le facteur commun aux deux termes, mettons « x » en facteur commun (factorisons)

Nous obtenons un produit de facteurs, qui doit être égal à « 0 ». $x \cdot (x + 5) = 0$

REMARQUE: Rappelez que dans une multiplication si un des facteurs est nul le produit est nul.

Les deux facteurs du premier membre sont donc « x » et « (x -5) »

L'équation a pour solutions les valeurs de « x » qui annulent chacun des deux facteurs du 1er membre soit :

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x + 5 = 0$$

ce qui donne comme les deux solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = -5$

<u>On résume</u> : les solutions pour que $x^2 + 5x = 0$ sont $x = 0$ et $x = -5$

3ème cas : **$a x^2 = 0$**

Exemple :

$5x^2 = 0$

Le premier membre est immédiatement décomposable en un produit de facteurs du premier degré.

$$5x \cdot x = 0$$

En égalant successivement à zéro chacun des deux facteurs « 5x » et « x » on trouve chaque fois « x = 0 ». Cette réponse ayant été trouvée deux fois, il est naturel de dire que l'équation a deux solutions égales à zéro.

Aussi :

$5x^2=0$;

$x^2 = \frac{0}{5} = 0$;

$x = \pm\sqrt{0} = 0$

$x = 0$

4.3 Le nombre de solutions d'une équation du second degré.

On considère l'équation suivante, où *a*, *b* et *c* désignent des nombres réels et *a* est différent de 0 :

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

On dispose de la définition suivante:

Définition du discriminant :

Le discriminant de l'équation est la valeur Δ définie par :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Nombre de solutions d'une équation :

- Si le **discriminant** est **strictement positif**, l'équation admet deux solutions x_1 et x_2 données par les formules suivantes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si le **discriminant** est **nul**, l'équation admet une racine double

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

- Si le **discriminant** est **strictement négatif**, l'équation n'admet pas de solution réelle

5. Résolution de problèmes avec des équations

Mise en équation

Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation

D'abord, il faudra définir l'inconnue.

Après, il faudra formuler le problème sous la forme d'une équation.

Il faudra aussi la résoudre.

Finalement, il faudra critiquer la solution trouvée en fonction du problème pratique posé.

Exemple :

Un lot de 45 pièces de 2 F et de 5 F font une somme totale de 171 F. Combien y-a-t'il de pièces de chaque sorte?

Définir la ou les inconnues

Soit x le nombre de pièces de 2 F.
Il y a 45 pièces au total et x pièces de 2 F, donc il y a (45 – x) pièces de 5 F

Formuler le problème sous la forme d'une équation

X pièces de 2 F font une somme de x·2 F
(45 -x) pièces de 5 F font une somme de (45 –x) ·5 F
La somme totale est donc de x·2 + (45 –x) ·5 ce qui donne l'équation
x·2 + (45 –x) ·5 = 171

Résoudre l'équation ou le système obtenu

Développement
2 x+ 5 ·45 –5 ·x= 171
2 x+ 225 –5 x= 171

Transposition
2 x–5x= 171 –225

Réduction
-3 x= -54

Division
x= -54 : (-3)

Calcul
x= 18 (x vaut 18)

Critiquer la ou les solutions trouvées en fonction du problème pratique posé

Il y a donc 18 pièces de 2 F et donc (45–18 = 27) il y a 27 pièces de 5 F.

Après vérification, ces résultats conviennent

2 ·18+ 5 · (45 –18)= 171

Exercice:

Un téléphone portable et son étui coûtent ensemble 110 €. Le téléphone coûte 100 € de plus que l'étui.

Quels sont les prix du téléphone et de l'étui?