UNITÉ 3 : DES POLYNÔMES

INTRODUCTION

Définition :
On appelle **expression algébrique**, un ensemble de lettres et de nombres reliés entre eux par des signes indiquant les opérations à effectuer.

Exemple : $4xy$; a^2b+cb^3 ; $\dfrac{3a^2b+4ab^2}{a^2+b^2}$

1. Des monômes

Un **monôme** est une expression algébrique composée de deux parties :
- Un facteur numérique que l'on appelle coefficient,
- Et un produit de facteurs littéraux que l'on appelle partie littérale. On appelle des variables aux lettres qui composent la partie littérale.

Remarque: L'expression ne contient pas de signes d'addition ou de soustraction.

Exemple 1:
$3a^2b$ 3 est le coefficient et a^2b est la partie littérale ;
a^2b 1 est le coefficient et a^2b est la partie littérale ;
$-a^2b$ - 1 est le coefficient et a^2b est la partie littérale.
(Pour les deux dernières expressions, le coefficient 1 est sous-entendu).

Étant donné qu'un monôme est un produit de facteurs, et que l'on peut intervertir l'ordre de ses facteurs, sans changer le résultat, il faut toujours s'arranger pour réduire les monômes sous une forme condensée plus facilement utilisable :

Exemple 2:
$3 . a . 5 . 2 . b . y.y = 3 . 5 . 2 . a . b . y^2 = 30aby2$

Exercice:
a) $2x^2$ est un monôme de coefficient ……… et de partie littérale ………
b) $\dfrac{y^3}{4}$ est un monôme de coefficient ……… et de partie littérale ………
c) $-x^4y^2$ est un monôme de coefficient ……… et de partie littérale ………
d) xy^5 est un monôme de coefficient ……… et de partie littérale ………
e) $-7m^3n^2$ est un monôme de coefficient ……… et de partie littérale ………
e) 9 est un monôme de coefficient ……… et de partie littérale ………

Degré d'un monôme:
On appelle degré d'un monôme, la somme des exposants de toutes ses lettres
Le monôme:
a) $2a^2bx^3y^4$ est de degré 10 (2 + 1 + 3 + 4) pour l'ensemble de ses lettres.
b) $3a^2b$ est de degré 3 (2+1).
c) x^3y^4 est de degré 7 (3 + 4).

Monômes semblables

Définition :
Des monômes semblables sont des monômes qui ont même partie littérale, c'est-à-dire mêmes lettres avec mêmes exposants.

Exemple :

Le monôme $3a^2b$ est semblable au monôme $4a^2b$, mais il n'est pas semblable au monôme $-8a^2b^2$

Monômes opposés

On appelle monômes opposés deux monômes semblables qui ont les coefficients opposés.

Exemple :

Les monômes $3a^2b$ et $-3a^2b$ sont opposés

2. Opérations avec des monômes

2.1 Addition et soustraction

On peut sommer (soustraire)des monômes seulement s'ils sont semblables.

La somme de monômes semblables est un monôme semblable dont le coefficient est la somme des coefficients des monômes.

Exemple 1:

$3a^2b + 4a^2b - 8a^2b = (3 + 4 - 8) . a^2b = - a^2b$

C'est ce que l'on appelle réduire les monômes semblables.

Exemple 2 :

$$\mathbf{3a^2b - 9mn^3 + 4a^2b + mn^3 = 7a^2b - 8\,mn^3}$$

Les deux monômes en bleu sont semblables entre eux (et donc on peut les sommer, en sommant leurs coefficients et en gardant la même partie littérale) et les deux monômes en noir sont semblables entre eux (et donc on peut les sommer)

2.2 Multiplication et division

Le produit de plusieurs monômes est un monôme dont :
- le coefficient est le produit des coefficients des monômes donnés ;
- la partie littérale comprend les lettres contenues dans les monômes, chacune d'elles étant affectée d'un exposant égal à la somme de ses exposants dans les facteurs (propriété de la multiplication de puissances à même base).

Exemple :

- $(3a^2b) \cdot (4b^2c) \cdot (-5bd) = -60a^2b^4cd$
  Coefficient : $3 \cdot 4 \cdot (-5) = -60$
  Degré pour l'ensemble : $2 + 4 + 1 + 1 = 8$

Le quotient d'un monôme est un monôme dont:
- le coefficient est le quotient des coefficients des monômes donnés ;
- la partie littérale comprend les lettres contenues dans les monômes, chacune d'elles étant affectée d'un exposant égal à la différence de ses exposants dans les facteurs (propriété de la division de puissances à même base).

Exemples :

- $(3a^2b) : (4b^2c) = 3a^2b / 4b^2c = 3a^2 / 4bc$
- $(4ab^2c^3) : (2a^2b^2c^2) = 4ab^2c^3 / 2a^2b^2c^2 = 2c / a$

Remarque : Un monôme A est divisible par un nombre B, lorsque A contient toutes les lettres de B avec des exposants aux moins égaux.

Exemples :

- $15a^2b^3c^4 / -5ab^3c^2 = 3ac^2$
- $5x^3y^2z^4 / 6x^3z^3 = 5y^2z/6$

2.3 Puissances

La puissance d'un monôme est un monôme dont:
- le coefficient est la puissance du coefficient du monôme donné ;
- la partie littérale comprend les lettres contenues dans les monômes, chacune d'elles étant affectée d'un exposant égal au produit de son exposant fois l'exposant de la puissance(propriété de la puissance d'une puissance).

Exemple :

$(3x^2y^3z)^4 = 3^4(x^2)^4\ (y^3)^4z^4 = 81x^8y^{12}z^4$

3. Des polynômes

Définition :
Un **polynôme** est une somme de plusieurs monômes que l'on appelle termes.

Exemple :
- $3xy + 2x^2y+2y$
- $4x^3 – 3x^2 + 6x +1$

Cette année on travaillera seulement des polynômes par rapport à une variable (ou des polynômes à une indéterminée). On les note souvent A(x), B(x), …, P(x).

Un terme du polynôme ne dépend pas de la valeur de la variable ; il s'agit du terme indépendant. Celui-ci n'a pas de partie littérale, c'est-à-dire, le terme indépendant est le terme de degré zéro.

Exemple :
- $A(y)= 3y^5 + 2y^4+2y^3 – 9y^2 + 3y – 5$ le terme indépendant est – 5
- $P(x)= 4x^3 – 3x^2 + 6x +1$ le terme indépendant est 1

On appelle **binôme**, un polynôme qui ne contient que deux monômes.
Exemple : $4x + 5y$; $5x – 7$; $3x^2+4x$
On appelle **trinôme**, un polynôme qui ne contient que trois monômes.
Exemple : $4x + 5y+2z$; $3x^2 +5x – 7$; $3y^2+4x – 3$

- Un polynôme **réduit** est un polynôme qui ne contient plus de monômes semblables.
- Un polynôme **ordonné** par rapport à une variable est un polynôme réduit dont on classe les monômes suivant l'ordre décroissant (ou croissant) des degrés de cette variable.
- Un polynôme réduit est **complet** par rapport à une variable s'il contient toutes les puissances de cette variable à partir de la plus élevée.

Exemple :

Polynôme	réduit	ordonné	complet
$2x +3x^2$	X		
$3x^2+2x$		X	
$3x^2+2x+5$			X

Le **degré** d'un polynôme réduit par rapport à une variable est l'exposant le plus élevé de cette variable.

Exemple : le degré du polynôme $3x^2+2x+5$ est 2

La valeur numérique

La valeur numérique d'un polynôme est la valeur que l'on obtient en remplaçant la variable par un nombre réel.
Exemple :
La valeur numérique du polynôme $P(x)=3x^2+2x+5$ pour $x= – 3$ est :
$P(– 3)= 3(– 3)^2+2(– 3)+5= – 27 – 6 +5 =– 28$

Racine d'un polynôme

une racine α d'un polynôme à une indéterminée P(X) est une valeur α qui, si elle est substituée à l'indéterminée, donne une expression nulle. En ce sens, une racine du polynôme est une solution de l'équation polynomiale P(X) = 0.
Exemple : si P(x) est le polynôme $x^2 - 4$, alors 2 et -2 sont les racines de P(x).

4. Opérations avec des polynômes

4.1 Somme et différence

Pour effectuer une somme ou une différence de plusieurs polynômes, on les écrit à la suite des uns des autres, on applique la règle de suppression des parenthèses et on réduit les termes semblables.

Exemple :
$(3x^2+2x+5) + (X^2 - 4) – (3x+2) = 3x^2+2x+5 + x^2 – 4 – 3x – 2 = 4x^2 – x – 6$

Le **degré** d'une somme (différence) de plusieurs polynômes est égal ou inférieur au degré de celui qui a le degré le plus élevé.

Exemple :
le degré de $4x^2 – x – 6$ est 2

4.2 Multiplication

Pour effectuer le produit de deux polynômes, on applique la règle de la distributivité et on veille à utiliser les produits remarquables dès que possible.

Exemple 1:
$2a^2\cdot(3ab^2 - 3/4a^3b^2 + 5) = 2a^2 \cdot 3ab^2 – 2a^2 \cdot 3/4a^3b^2 + 2a^2\cdot 5 = 6a^3b^2 - 3/2a^5b^2 + 10a^2$

Exemple 2:

$$\left(\frac{3}{4}x - x^2\right)\cdot\left(2x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}x\cdot 2x + \frac{3}{4}x\cdot\left(\frac{-1}{2}\right) - x^2\cdot 2x - x^2\cdot\left(\frac{-1}{2}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{8}x - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 = 2x^2 - \frac{3}{8}x - 2x^3$$

Le **degré** d'un produit de plusieurs polynômes est égal à la somme des degrés de ceux-ci. A(x)= $\frac{3}{4}x - x^2$ B(x)= $2x - \frac{1}{2}$ le degré de $A(x)\cdot B(x)$ est 2+1=3

4.3 Division.

Si on divise un polynôme D(x) par un polynôme d(x) [degré D(x)>degré d(x)], alors il existe deux polynômes Q(x) et R(x) tels que
$D(x)= d(x)\cdot Q(x)+R(x)$ avec degré R(x)<degré d(x)
Si R(x)=0, alors la division est exacte.
Le degré de D(x)= degré d(x)+degré Q(x)
d'où
degré Q(x)= degré D(x) – degré d(x)

Division d'un polynôme par un polynôme

Méthode pratique
La méthode pratique de division d'un polynôme par un polynôme est basée sur celle de la division écrite d'un nombre par un nombre.

Les polynômes dividende et diviseur seront ordonnés par puissances décroissantes de la variable
a) Divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur ; tu obtiens le premier terme du quotient.
b) Multiplie le diviseur par le premier terme du quotient.
c) Soustrais ce résultat du dividende ; tu obtiens le premier reste partiel.
On recommence le même travail avec le reste partiel comme dividende jusqu'à ce que le degré du reste soit inférieur à celui du diviseur.

Exemples :

$(x^3 + 5x^2 + 4x - 4) : (x + 2) = x^2 + 3x - 2$ Reste = 0 En fait : $x^3 + 5x^2 + 4x - 4$ | $x + 2$ $-x^3 - 2x^2$ | $x^2 + 3x - 2$ $+ 3x^2 + 4x$ $- 3x^2 - 6x$ $- 2x - 4$ $+ 2x + 4$ 0 **D(x)=** $x^3 + 5x^2 + 4x - 4$ *degré D(x)= 3* **d(x)=** $x + 2$ *degré d(x)=1* **Q(x)=** $x^2 + 3x - 2$ *degré Q(x) =3–1=2*	$6x^2 : (2x + 1) = 3x - 3/2$ Reste = $3/2$ En fait: $6x^2$ | $2x + 1$ $-6x^2 - 3x$ | $3x - 3/2$ $-3x$ $3x + 3/2$ $3/2$

4.4 Ruffini

Division d'un polynôme par un binôme de la forme (x – a). Le tableau de Ruffini.

Remarque : Avant de noter les coefficients de A(x) dans le tableau, il faut l'ordonner et le compléter si nécessaire par des termes de coefficients nuls.

$(x^4 - 3x^3 + 2x + 5) : (x - 2) = x^4 - 3x^3 + 0x^2 + 2x + 5) : (x - 2)$

Coefficients de A(x)	1	-3	0	2	5
		+	+	+	+
a = 2		2	-2	-4	-4
Coefficients de Q(x)	1	-1	-2	-2	1 = Reste

On peut écrire la solution sous la forme :

$$x^4 - 3x^3 + 2x + 5 = (x - 2) . (x^3 - x^2 - 2x - 2) - 1$$

4.5 Divisibilité d'un polynôme et la loi du reste

Divisibilité des polynômes :
Un polynôme P(x) est divisible par un binôme de la forme (x – a) $\Leftrightarrow$ R(x)=0 $\Leftrightarrow$ P(a) = 0

$(x^2 – 5x + 6) : (x – 2)$

Coefficients de P(x)	1	-5	6
		+	+
a = 2		2	-6
	.2	.2	
Coefficients de Q(x)	1	-3	0 Reste

La valeur numérique de ce polynôme pour x=2 est zéro, c'est-à-dire, P(2)=0

Loi du reste : Le reste de la division d'un polynôme P(x) par un binôme de la forme (x - a) est la valeur numérique de ce polynôme pour x = a. Reste=P(a)

$(x^4 – 3x^3 + 2x + 5) : (x – 2) = x^4 – 3x^3 + 0x^2 + 2x + 5) : (x – 2)$

Coefficients de A(x)	1	-3	0	2	5
		+	+	+	+
a = 2		2	-2	-4	-4
	.2	.2	.2	.2	
Coefficients de Q(x)	1	-1	-2	-2	1 = Reste

La valeur numérique de ce polynôme pour x=2 est un, c'est-à-dire, A(2)=1

5. Extraire facteur commun

Extraire facteur commun signifie exprimer une somme (soustraction) sous forme de produit.

Extraire facteur commun

ab+ac=a(b+c)   ab – ac=a(b – c)

Propriété distributivité

Remarque: Habituellement, on doit sortir la variable commune à chaque terme du polynôme et ayant le plus petit exposant. Il ne faut pas oublier que lorsqu'on multiplie deux puissances qui ont la même base, on additionne les exposants.

Exemple : Extrayez facteur commun :

- $2xa+3xb = x(2a+3b)$
- $4x^3+10x^2y = 2\cdot2\cdot x\cdot x\cdot x+2\cdot5\cdot x\cdot x\cdot y=2\cdot x\cdot x\cdot(2\cdot x+5\cdot y)=2x^2(2x+5y)$

6. Identités remarquables

Il y a quelques produits remarquables qu'il est souhaitable de connaître par cœur.

- Carré de la somme de deux nombres :

$$\mathbf{(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b) = a^2 + 2ab + b^2}$$

Exemple :

$(3x + 2)^2 = (3x + 2)\,(3x + 2) = (3x)^2 + 2\cdot3x\cdot2 + 2^2=9x^2+12x+4$

- Carré de la différence de deux nombres :

$$\mathbf{(a - b)^2 = (a - b)\,(a - b) = a^2 - 2ab + b^2}$$

Exemple :

$(3x - 2)^2 = (3x - 2)\,(3x - 2) = (3x)^2 - 2\cdot3x\cdot2 + 2^2=9x^2-12x+4$

- Produit de la somme de deux nombres par leur différence :

$$\mathbf{(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2}$$

Exemple :

$(3x + 2)\,(3x - 2) = (3x)^2 - 2^2= 9x^2-4$

- D'autres produits remarquables sont importants :

$$\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \text{ et } \mathbf{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Exemple :

$(3x + 2)^3 = (3x)^3 + 3\cdot(3x)^2\cdot2 +3\cdot\ \cdot3x\cdot2^2 +2^3=27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$

$(3x - 2)^3 = (3x)^3 - 3\cdot(3x)^2\cdot2 +3\cdot\ \cdot3x\cdot2^2 -2^3=27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

7. Des fractions algébriques. Simplifier.

Définition:
Une fraction algébrique est une fraction qui contient des variables

Exemple :

$$\frac{3x+2}{4x^2}$$

Remarque importante: Une fraction algébrique existe si et seulement si son dénominateur ne s'annule pas. Retenons donc :

Condition d'existence: a / b existe $\Leftrightarrow b \neq 0$

Simplifier une fraction algébrique par un réel non nul m signifie: diviser le numérateur et le dénominateur de cette fraction par m.

Attention! On peut seulement simplifier une fraction algébrique par un facteur commun du numérateur et du dénominateur. Avant de simplifier une fraction, il faut donc factoriser le numérateur et le dénominateur. En général, on simplifie la fraction par le plus grand commun diviseur (PGCD)du numérateur et du dénominateur.

Exemples :

- $\frac{4x}{6y} = \frac{2 \cdot 2x}{2 \cdot 3y} = \frac{2x}{3y} \quad (\textit{simplfication par } 2)$
- $\frac{3ab^2}{5b} = \frac{3ab \cdot b}{5 \cdot b} = \frac{3ab}{5} \quad (\textit{simplfication par } b)$
- $\frac{x^2 + x}{3x + 3} = \frac{x \cdot (x+1)}{3 \cdot (x+1)} = \frac{x}{3} \quad (\textit{simplfication par } x+1)$