UNITÉ 1 : DES NOMBRES RATIONNELS

INTRODUCTION

- **Classement des nombres réels**

Schéma

$$\text{complexes } C \begin{cases} \text{réels } R \begin{cases} \text{rationnels } Q \begin{cases} \text{entiers relatifs } Z \begin{cases} \text{naturels } N = \{0,1,2,3,4,5,6,7...\} \\ \text{naturels négatifs} = \{-1,-2,-3...\} \end{cases} \\ \text{décimaux} = \left\{3.25,-0.06,-\frac{3}{2},4.25,-2.7,-10.35...\right\} \\ \text{décimaux périodiques} \begin{cases} \text{simples} = \left\{2.\widehat{3},\frac{1}{9},-0.\widehat{7}...\right\} \\ \text{mixtes} = \{23.4\widehat{5},-0.00\widehat{8}\} \end{cases} \end{cases} \\ \text{irrationnels } I = \left\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\pi,e,2.010010001...,\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},...\right\} \end{cases} \\ \text{imaginaires} = \text{sous la forme } a+bi \text{ avec } b \neq 0, \\ \text{exemples } 3+2i,-4-5i,6i...\text{et } i = \sqrt{-1} \end{cases}$$

- **Ordre des opérations (priorité)**

En mathématiques, la **priorité des opérations** ou **ordre des opérations** précise l'ordre dans lequel les calculs doivent être effectués dans une expression complexe. Les règles de priorité sont :

1. Les calculs contenus entre parenthèses (ou crochets) sont prioritaires sur les calculs situés en dehors de ces parenthèses. La barre d'une fraction ou d'une racine carrée joue le rôle d'une parenthèse;
2. Les exposants sont prioritaires sur les multiplications, divisions, additions et soustractions;
3. Les multiplications et divisions sont prioritaires sur les additions et soustractions.

1r	[(…)]				Parenthèses ou crochets
2ème		a^n et $\sqrt[n]{a}$			Puissances et racines
3ème			× et ÷		Multiplications et divisions
4ème				+ et –	Additions et soustractions

Remarque: il faut faire les opérations qui ont la même priorité de gauche à droite.

Exemples

60 – 24 ÷ (9 – 5) x 9 + 1
60 – 24 ÷ 4 x 9 + 1
60 – 6 x 9 + 1
60 – 54 + 1
6 + 1
7

3 x 8 – 5 x (4 + 8) ÷ 10 - 7
3 x 8 – 5 x 12 ÷ 10 - 7
24 – 5 x 12 ÷ 10 - 7
24 – 60 ÷ 10 – 7
24 – 6 - 7
18 - 7
11

Exemple

50 + 2^3 x 4 – 9
50 + 8 x 4 – 9
50 + 32 – 9
82 – 9
73

- **DES PUISSANCES**

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$
n facteurs égaux à a
on lit « a exposant n » ou « a puissance n »

Rappel

Le calcul d'un exposant représente une multiplication répétée. L'exposant indique combien de fois le nombre est multiplié par lui même.

Exemple

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

- **Propriétés des puissances**

P.1 $a^0 = 1$
P.2 $a^1 = a$
P.3 $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
P.4 $a^n : a^m = a^{n-m}$
P.5 $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

P.6 $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
P.7 $a^n : b^n = (a : b)^n$
P.8

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n & si\ n\ est\ pair \\ -a^n & si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

- **Exercices**

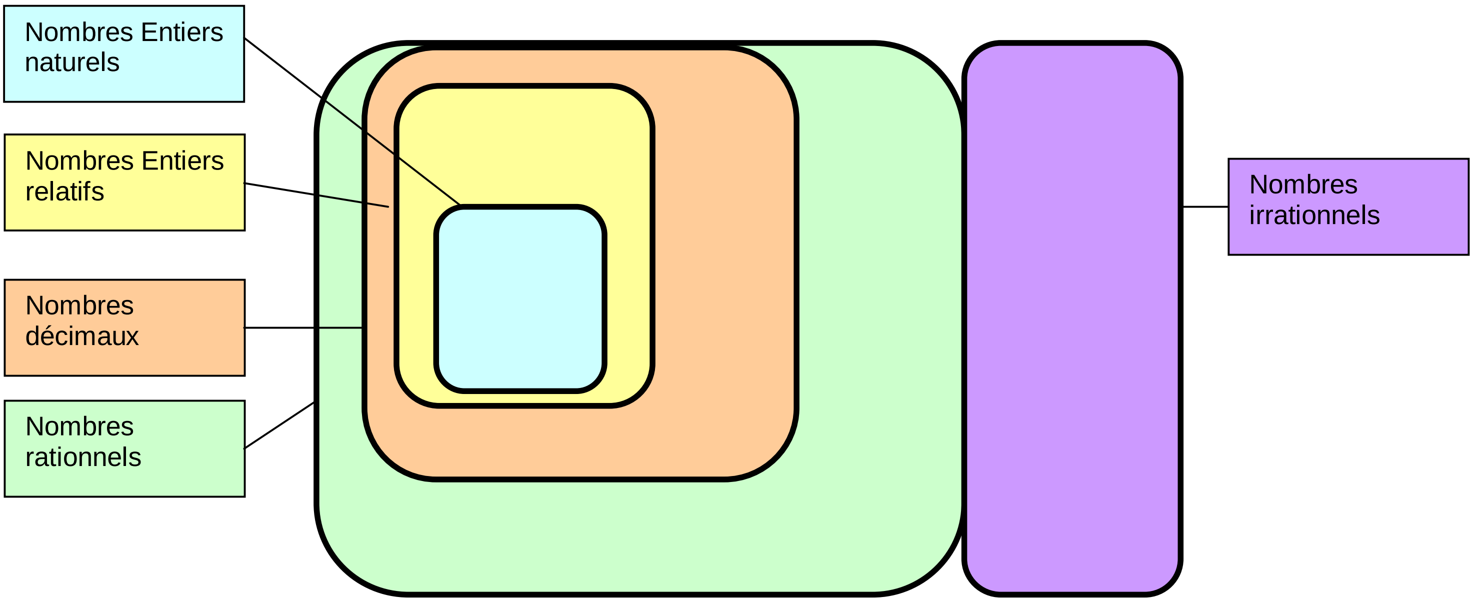
1. Classez les nombres suivants du tableau ci-dessous en cochant avec une X:

	R réels					
	Q rationnels					**I** irrationnels
	Z entiers relatifs		décimaux	Décimaux périodiques		
	N naturels	négatifs		simple	mixte	
3						
-2.1						
3.5555…						
π						
-4						
$\sqrt{3}$						
6.03444…						
56,2121…						

2. Écrire chacun des nombres suivants dans le bon cadre.

$15.03 \quad 1 \quad \frac{36}{18} \quad \frac{4}{7} \quad 3.14 \quad \sqrt{\frac{4}{9}} \quad -\frac{1}{8} \quad -\sqrt{3} \quad -8.2$

$\sqrt{7} \quad \frac{10}{4} \quad -5 \quad -\sqrt{36} \quad 0 \quad \pi \quad \sqrt{0.25} \quad -\frac{3}{11}$



3. Calculez la valeur des chaînes d'opérations en utilisant la démarche en entonnoir

1)	**24 - 3 x 5 =**
2)	**8 x 6 - 4 =**
3)	**18 ÷ 6 - 3 =**
4)	**24 - 24 ÷ 4 =**
5)	**6 + 3^2 x 4 =**
6)	**42 - 2 x 4^2 =**
7)	**3^2+ 12 ÷ 3 =**
8)	**2^3 + 4 - 12 ÷ 6 =**

9)	$3 + 4 \times 5 \div (2^3 - 4) =$
10)	$(2 + 3)^2 + 8 - 2 \times 5 + 2 \times (4^2 - 3 \times 4) =$
11)	$4^2 - 3 \times (9 - 2 \times (4 - 3^0)) =$
12)	$3^2 + 2 \times (15 - (8 - 5)^2 \div 3) =$
13)	$14 - 3 \times 4 =$
14)	$12 + 5 \times 4 =$
15)	$28 + 21 \div 3 =$
16)	$14 - 9 \div 3 =$
17)	$3 + 4^2 \times 4 =$
18)	$52 - 2 \times 5^2 =$
19)	$5^2 + 18 \div 6 =$
20)	$3^3 + 42 \div 6 =$
21)	$(8 + 2) \div 5 + 4 \times 3 \div (2^3 - 4) =$
22)	$(8 - 5)^2 \div 3^2 + 20 \div 5 - 2 \times (4^2 - 4 \times 4) =$
23)	$(18 + 2 \times (2^3+ 5) - 33)^2 =$
24)	$(5^2 - 2 \times (9 - 5^0)) \times (4 + 2 \times 5) =$
25)	$(8 - 4)^2 \div 2^2 \times 5 \div (14 - 3 \times 4) \times 2 =$
26)	$(2^3 - 3)^2 - (8 \div 2 \div 2) - 2 \times (8 - 8 \div 8) =$
27)	$(4 \times 6 \div 3) - 2 + 3 \times (4 + 5) \times (8 - 2^3) =$
28)	$8 + 3 \times (24 \div 2^3) - 2 \times (2^2 \times 3 - 4 \times 2) =$

29)	$2 \times (8 + 3 \times (7 - 5)^2) + 4 \times 5 =$
30)	$5 \times (4^2 - (3 \times 6) \div 2) + 5^2 =$
31)	$(8 - 2 \times 3)^2 - 3^2 \div 3 + (2 \times 3 - 2) \times 2 =$
32)	$(9 - 2 \times 3)^2 + (48 \div (2 \times 4)) \div 2 \times (8 - 2 \times 3) =$
33)	$(42 \div 6 + 3) - 2 \times 3 + 3 \times (4 + 2^0) \times (9 - 2^3) =$
34)	$30 -((3 \times 8) - 2^3) + 2 \times (3 \times 2^2 - 3)^2 =$
35)	$(12 - 2 \times 4)^2 + (16 \div (4^2 \div 8)^2 \times (8 - 2 \times 3)) \div 2 =$

4. Utilise les propriétés des puissances pour simplifier les expressions données.(Écris sous une forme plus simple en utilisant les propriétés des puissances)

$3^3.3^2 =$
$(3^2)^3 =$
$(3^4)^2 =$
$\left(\frac{1}{3}\right)^4 : \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} =$
$\frac{3^4}{3^6} =$
$3^4.3^4 =$
$3.3^7 =$
$(3^5)^3 =$
$\frac{3^{13}}{3^9} =$
$(-3)^4.(-3) =$
$((-3)^3)^4 =$

$3^3.3^3 =$
$(-3)^2.(-3)^6 =$
$\frac{3^{11}}{3^{10}} =$
$(-3)^3.(-3)^5 =$
$\frac{4^9}{4^{21}} =$
$(-3)^4.(-3)^3 =$
$\frac{4^{10}}{4^{20}} =$
$\left(\frac{3}{4}\right)^0 =$
$(3^3)^3 =$

$\frac{3^{56}}{3^{59}} =$
$3.3.3.3.3 =$
$((-3)^2)^2 =$
$3^2.3^3.3^4.3^5 =$
$4^3.4^5 =$
$(-4)^2.(-4)^3 =$
$(-3^2)^4 =$
$(-3^4)^3 =$
$(-8)^{10} : 4^{10} =$
$(-4)^4.4^5 =$
$\frac{3^{1010}}{3^{1010}} =$

$-(-(-3)^4)^2 =$
$((4)^2)^4 =$
$\frac{(-3)^{10}}{(-3)^7} =$
$\frac{(-3)^7}{(-3)^{12}} =$
$\frac{12^4}{3^4} =$
$((-4)^3)^2 =$
$(-4^2)^5 =$
$-\frac{(-4)^{13}}{(-4)^9} =$
$((-3)^2)^4 =$

1. Des fractions

Une **fraction** est une division non effectuée entre deux nombres entiers relatifs a et $b \neq 0$. Elle est représentée comme suit $\frac{a}{b}$

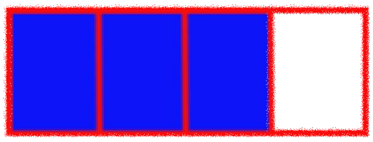
- Le nombre du haut s'appelle le **numérateur**............a
- Le nombre du bas s'appelle le **dénominateur**......... b
- Le trait ou **barre de fraction** signifie que l'on divise le numérateur par le dénominateur.

Exemple :
3/7 signifie que l'on divise 3 par 7 ; on prononce cette fraction « **trois septièmes** ».
3 est appelé numérateur parce qu'il indique un **nombre** de trois unités (les septièmes)
7 est appelé dénominateur parce qu'il **dénomme** l'unité (le septième) avec laquelle on opère.
Si on mange les 3/7 d'une tarte, le numérateur 3 indique le nombre de parts que l'on mange alors que 7 indique le nombre total de parts

Représenter une fraction

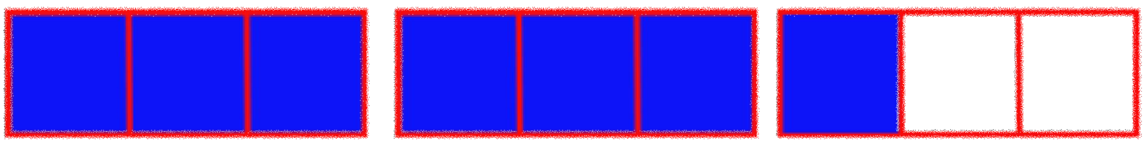
La fraction peut être représentée par un dessin. Bien souvent une forme géométrique que l'on divise en plusieurs parties.

1r cas : Fractions dont a < b
1° Le dénominateur b indique le nombre de parties égales à dessiner dans la forme géométrique.
2° Le numérateur *a* indique le nombre de parties égales utilisées.
Exemple :
Choisissons un rectangle comme forme géométrique et la fraction 3/4.
Le dénominateur est 4 donc le rectangle sera divisé en 4 parties égales.
Le numérateur est 3 donc seules 3 parties égales seront utilisées.



3/4

2ème cas : Fractions dont a> b
Il est impossible de représenter ce genre de fraction par un schéma unique, nous utiliserons dès lors plusieurs formes géométriques similaires
Exemple : pour la fraction 7/3, la division entière donne 2, il reste 1.
Le quotient est 2 donc 2 unités, le reste 1 donc 2 1/3.
:



7/3

On peut représenter aussi sur la droite réelle.

Prendre une fraction d'une quantité

Pour prendre les 2/3 de 750, on divise 750 par 3, puis on multiplie le résultat par 2, c’est-à-dire, 750÷3 = 250 ; 250 × 2 = 500. Donc 2/3 de 750 = 500

Prendre a/b de c revient à diviser c par b et à multiplier le tout par a.
Plus généralement, on constate que le « de » est remplacé par une multiplication.
Il en est de même quand on calcule 75 % de c, on doit juste calculer 75 % multiplié par c. En effet, 75 % est une fraction : 75 % = 75/100 = 0,75.

1.1 Des fractions équivalentes

Dire que deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont équivalentes ou égales ($\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$) équivaut à dire que a·d=b·c.

1.2 Obtenir des fractions équivalentes

Il y a deux méthodes pour obtenir des fractions équivalentes.
Si on multiplie (amplifier), ou divise (simplifier), le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre, on obtient une fraction **équivalente**.

1.3 La fraction irréductible.

Certaines fractions peuvent être simplifiées, c'est-à-dire que a et *b* peuvent être divisés par un même nombre mais le plus grand possible. Ce nombre s'appelle le PGCD (plus grand commun diviseur) de a et b. Après réduction, la fraction est dite **irréductible**. **La fraction irréductible** est une fraction dans laquelle le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux.

1.4 Réduire au même dénominateur.

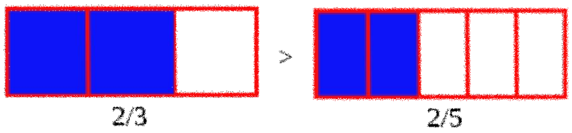
Pour effectuer certaines opérations entre fractions, tous les dénominateurs des fractions doivent être égaux. Pour ce faire, il faut remplacer chaque fraction par une fraction équivalente, en s'arrangeant pour que tous les dénominateurs soient identiques. Ce dénominateur sera le plus petit nombre possible qui soit divisible par chaque dénominateur. Ce nombre s'appelle le PPCM (plus petit commun multiple) des dénominateurs. L'opération s'appelle **réduire au même dénominateur**.

Exemple :
PPCM(4,6,9,15)=180

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times3\times3\times5}{4\times3\times3\times5}=\frac{135}{180}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{1\times2\times3\times5}{6\times2\times3\times5}=\frac{30}{180}$$
$$\frac{5}{9}=\frac{5\times2\times2\times5}{9\times2\times2\times5}=\frac{100}{180}$$
$$\frac{14}{15}=\frac{14\times2\times2\times3}{15\times2\times2\times3}=\frac{168}{180}$$

1.5 Comparaison de fractions

- Pour un même numérateur, plus le dénominateur est petit plus la fraction est grande.

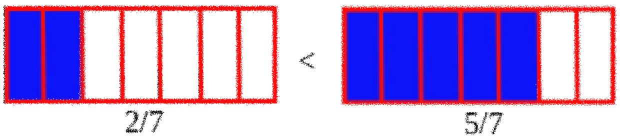


Exemple :

$\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$

Le numérateur 2 est le même pour chaque fraction.
La comparaison des dénominateurs donne 3 < 5

- Pour un même dénominateur, plus le numérateur est grand, plus la fraction est grande :



Exemple :

$\frac{2}{7} < \frac{5}{7}$

Le dénominateur 7 est le même pour chaque fraction.
La comparaison des numérateurs donne 2 < 5

- Si les numérateurs et les dénominateurs sont différents, on peut toujours réduire les fractions au même dénominateur et comparer alors les numérateurs.

Exemple : Comparaison de 1/4 et 2/5
1/4 =5/20 et 2/5 = 8/20. Or 5 < 8 donc 5/20 < 8/20 donc 1/4 < 2/5

Remarque : on peut aussi utiliser l'écriture décimale comme par exemple 1/4 = 0,25 et 2/5 = 0,4, 0,25 < 0,4 donc 1/4 < 2/5.

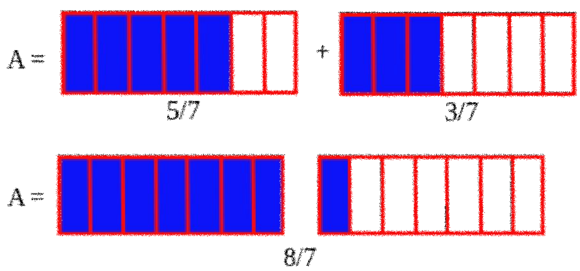
2. Opérations sur les fractions

2.1 Addition et soustraction

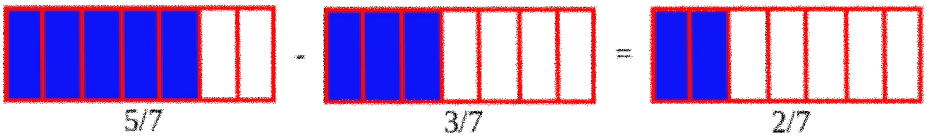
Pour un dénominateur commun

Il suffit d'additionner ou de soustraire le numérateur de chaque fraction et de conserver le dénominateur commun.

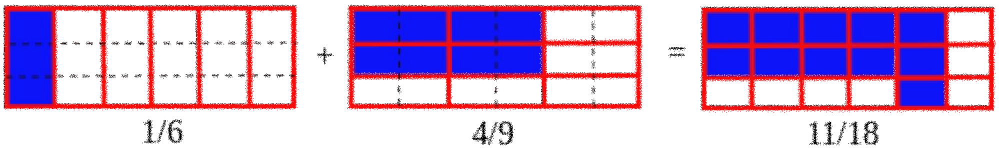
Exemple d'une somme :



Exemple d'une différence :



Pour un dénominateur différent
Avant d'effectuer l'opération, chaque fraction doit être transformée en une fraction équivalente dont le dénominateur leur soit commun (**réduire au même dénominateur**).
Exemple:



$$A = \frac{1}{6} + \frac{4}{9} \qquad A = \frac{3}{18} + \frac{8}{18} \qquad A = \frac{11}{18}$$

2.2 Multiplication

La multiplication de deux fractions est simple à effectuer,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Exemple

$$\frac{2}{15} \times \frac{7}{11} = \frac{2 \times 7}{15 \times 11} = \frac{14}{165}$$

2.3 Division

La division de deux fractions est simple à effectuer,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Exemple

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{7} = \frac{3 \times 7}{5 \times 2} = \frac{21}{10}$$

2.4 Chaînes d'opérations

Pour résoudre une chaîne d'opération, il est préférable d'effectuer un calcul à la fois en descendant nos calculs.
Priorités des opérations
1. Opérations entre les parenthèses;
2. Faire les exposants et les racines;
3. Les multiplications et les divisions, de gauche à droite;
4. Les additions et les soustractions, de gauche à droite.

3. Des nombres rationnels

Un nombre décimal a une partie entière et une partie décimale, celles-ci sont séparées par une virgule.

Le chiffre des unités de million	Le chiffre des centaines de milliers	Le chiffre des dizaines de milliers	Le chiffre des unités de milliers	Le chiffre des centaines	Le chiffre des dizaines	Le chiffre des unités	Virgule décimale	Le chiffre des dixièmes	Le chiffre des centièmes	Le chiffre des millièmes
2	3	0	9	4	3	1	,	3	2	5
PARTIE ENTIÈRE								PARTIE DÉCIMALE		

Les décimaux peuvent être:

- décimal fini
- décimal illimité périodique
  - décimal périodique simple : Un nombre périodique simple est un nombre décimal dans lequel la période commence immédiatement après la virgule.
  - décimal périodique mixte : Un nombre décimal périodique mixte est un nombre décimal dans lequel la période ne commence pas immédiatement après la virgule.
- décimal illimité non-périodique : nombre irrationnel

4. Des fractions et des nombres décimaux.

4.1 Écriture décimale

Toute fraction possède un développement décimal fini ou illimité périodique qui s'obtient en posant la division de a par b.

- Si a es multiple de b, celui-ci est entier.
  Exemple : 8/2=4

- Si le dénominateur est multiple de 2 et/ou 5, alors le résultat est un nombre décimal fini.
  Exemple : 1/4 = 0,25

- Dans d'autre cas différent aux précédents, le résultat est un nombre décimal périodique.
  Exemples :
  2/3 = 0,**6**66...(période 6)
  17/7 = 2,**428571**428571...(période 428571)

4.2 Écriture fractionnaire

Inversement, tout nombre décimal ou possédant un développement décimal périodique peut s'écrire sous forme de fraction.

a) Cas du nombre décimal

Il suffit de prendre comme numérateur le nombre décimal privé de sa virgule et comme dénominateur 10^n où n est le nombre de chiffres après la virgule :

$$0{,}256 = \frac{256}{1000} = \frac{32}{125}$$

$$15{,}16 = \frac{1516}{100} = \frac{379}{25}$$

b) Cas du développement décimal illimité

On commence par se débarrasser de la partie entière : 3,**45**45... = 3 + 0,**45**45...

b.1) Cas du développement décimal périodique simple

Comme numérateur, il suffit d'utiliser la période tandis que le dénominateur sera composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres composant la période.

Exemple 1 :
0,4545
Période 45 donc numérateur = 45
Période composée de deux chiffres donc dénominateur = 99
Fraction = 45/99 ou 5/11 par conséquent : 3,**45**45... = 3 + 5/11 = 38/11

Autrement :
Posons x pour 0,4545454545...
100x=45,4545454545...
donc 100x - x=45,4545454545... - 0,4545454545...
donc 99x=45
donc x = 45/99
Exemple 2 :

$$1{,}232323\ldots = \frac{123-1}{99} = \frac{122}{99}$$

b.2) Cas du développement décimal périodique mixte

Pour trouver le numérateur de la fraction, il faut soustraire la valeur mixte de la valeur mixte suivie de la première période. Exemple : 0,36981981...
valeur mixte : 36
Valeur mixte suivie de la première période : 36981
Numérateur = 36981 - 36 = 36945
Quant au dénominateur, il sera composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres composant la période, suivis d'autant de zéros qu'il y a de chiffres après la virgule composant la valeur mixte.

Exemple 1 :
dans la valeur 0,36981981,
la période 981 est constituée de 3 chiffres donc le dénominateur sera constitué d'une série de trois 9 suivis de deux zéros puisque la valeur mixte 36 est composée de deux chiffres.
Finalement nous aurons :
0,36981981 = 36945/99900 ou 821/2220

Exemple 2 :

$$1,24545... = \frac{1245-12}{990} = 137/110$$

5. Des nombres rationnels

$$rationnels\ Q \begin{cases} entiers\ relatifs\ Z \begin{cases} naturels\ N = \{0,1,2,3,4,5,6,7...\} \\ naturels\ négatifs = \{-1,-2,-3...\} \end{cases} \\ décimaux\ \ finis = \left\{3.25,-0.06,-\frac{3}{2},4.25,-2.7,-10.35...\right\} \\ décimaux\ \ périodiques \begin{cases} simples = \left\{2.\widehat{3},\frac{1}{9},-0.\widehat{7}...\right\} \\ mixtes = \{23.4\widehat{5},-0.00\widehat{8}\} \end{cases} \end{cases}$$

Remarque: Si un nombre n’est pas rationnel, alors celui-ci est irrationnel

D’autres fractions

- **fraction unitaire** : fraction dont le numérateur est égal à 1 et le dénominateur est un entier positif.
- **fraction décimale** : fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.
- **fraction composée** : fraction dont le numérateur et le dénominateur sont eux-mêmes des fractions :
$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{19}{15}}{\frac{5}{6}} = \frac{19}{15} \times \frac{6}{5} = \frac{38}{25}$$
- **fraction continue** : fraction constituée à partir d'une suite d'entiers naturels $(a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_k, ...)$de la manière suivante :

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{...}}}}$$