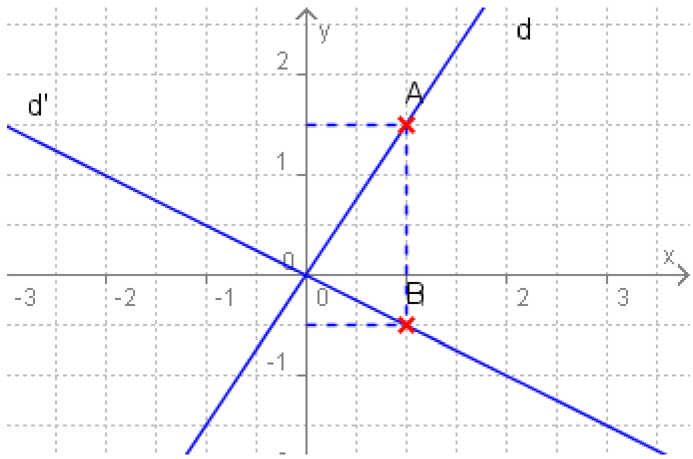
UNITÉ 12 : DES FONCTIONS LINÉAIRES ET AFFINES

1. FONCTION LINÉAIRE

Une fonction linéaire (o de proportionnalité directe)est une fonction avec une équation de la forme y = mx, où m est un nombre.
Son graphique est une droite qui passe par l'origine de coordonnés.
m est la pente ou coefficient de proportionnalité directe.
la fonction est croissante si m>0 et décroissante si m<0.

Si m=0, la droite est confondue avec l'axe des abscisses.



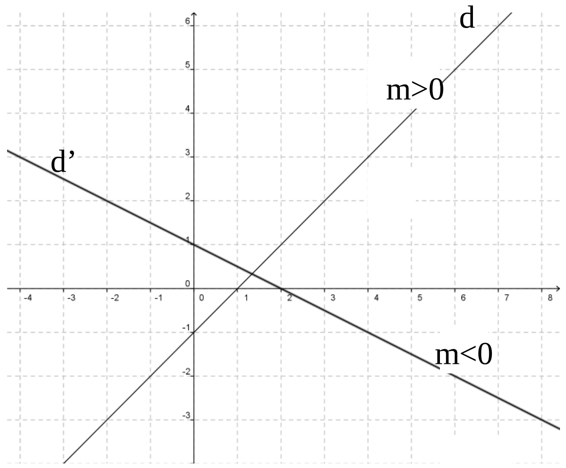
la droite **d** est croissante. (« monte »)

Pourtant, la droite **d'** est décroissante. (« descend »)

Remarque :
La fonction linéaire f traduit une situation de proportionnalité, et le nombre m est appelé le coefficient de proportionnalité ou directeur.

2. FONCTION AFFINE

Une fonction affine est une fonction avec une équation de la forme y = mx+n, où m et n sont des nombres.
Son graphique est une droite qui ne passe jamais par l'origine de coordonnés.
m est la pente.
n est l'ordonnée à l'origine. La droite coupe l'axe Y au point (0, n).
la fonction est croissante si m>0 et décroissante si m<0.

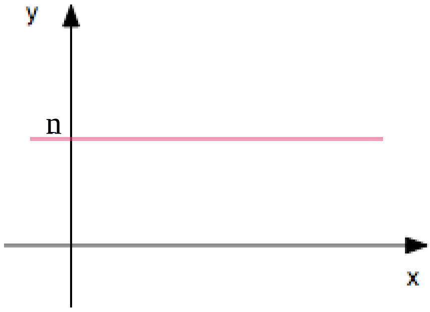


La droite d est croissante (m>0 et n<0)

La droite d' est décroissante (m<0 et n>0)

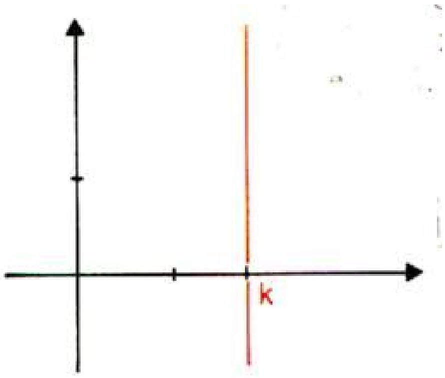
3. FONCTION CONSTANTE

Une fonction constante est une fonction avec une équation de la forme y = n, où n est un nombre.
La pente est 0, c'est-à-dire, m=0
Son graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses.
La droite coupe l'axe d'ordonnées au point (0, n).



Attention :

il y a des droites qui peuvent s'exprimer avec une équation, mais <u>celles-ci ne sont pas de fonctions</u>.
Ces droites sont les droites verticales, parallèles à l'axe Y. Leur équation est x=K.



4. ÉQUATION DE LA DROITE PASSANT PAR DEUX POINTS.

Il faut connaître deux points pour calculer l'équation d'une droite,
D'abord, on doit calculer la pente, et après l'ordonnée a l'origine.
Si les points sont A (a_1, a_2) et B (b_1, b_2), la valeur de la pente est :

$$m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$

Un fois on connaît la pente, on calcule l'ordonnée à l'origine.

Exemple:

On considère les points A(5; 1) et B(2; 4). Déterminez l'équation de la droite qui passe par A et B.

a_1=5 ; a_2=1 et b_1=2 ; b_2= 4

L'équation de la droite est de la forme y=mx+n

$$m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{4-1}{2-5} = \frac{3}{-3} = -1$$

m = 1
Alors
y = (– 1)·x+n

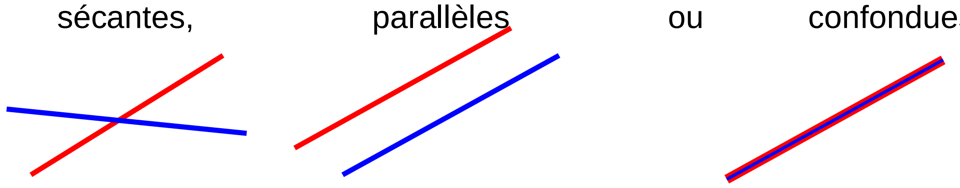
On calcule n :
1 = (– 1)·5+n
1 = – 5+n
n**= 1 + 5= **6

L'équation de la droite est ***y = (– 1)·x+6***

5. POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES.

- Deux droites peuvent être :

sécantes, parallèles ou confondues.



On considère les droites d≡ y=mx+n et d'≡ y=m'x+n'.
Si m≠m', les droites sont sécantes.
Si m=m', les droites peuvent être parallèles ou confondues.
Si m=m' et n≠n', les droites sont parallèles.
Si m=m' et n=n', les droites sont confondues.

Les droites peuvent aussi s'exprimer:
d≡ Ax+By+C=0 et d'≡ A'x+B'y+C'=0.
Dans ce cas :

Si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$, les droites sont sécantes.

Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$, les droites sont parallèle.

Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$, les droites sont confondues.

Remarque:

Les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes sont les solutions du système formé par les deux équations des droites.

6. APPLICATIONS.

problème 1
Luc achète un lot de cartes à 12,30 € avec timbres à 0,54 €. Soit la fonction affine qui, au nombre , associe la dépense totale de Luc.
1)Donner l'expression algébrique de f(X).
2)Combien de timbres Luc a-t-il pour17,16€?

problème 2 :
Une automobile possède un réservoir de 65 litres.
Au départ d'un voyage , il fait le plein et le compteur journalier est mis à zéro.
L'automobile consomme 9 litres de carburant aux 100 km .
« x » désignant le nombre de km parcourus et f(x) le nombre de litres de carburant restant , donner l'expression permettant de calculer f(x) connaissant « x » .
Construire sa représentation graphique ; 1 cm en abscisse représentant 50 km et 1 cm en ordonnée représentant 5 litres de carburant.
Quelle distance maximale peut-il parcourir avec un plein du réservoir ?
Le réservoir est rempli au quart ; quelle distance peut-il espérer parcourir ?

problème 3 :
Un carré a pour côté 1,5 cm . On augmente son côté d'une longueur « x ».
Calculer le périmètre de ce nouveau carré. Désigner par f(x) ce périmètre.
Montrer que l'application est affine. Préciser les coefficients « m » et « n ».
Construire sa représentation graphique pour « x » compris entre 0 et 4 , en cm

problème 4 :
Une pièce cylindrique a pour diamètre D = 20 mm.
On enlève au tour une quantité de métal et le diamètre de « x » mm.
Quel est son nouveau diamètre en fonction de « x » ?
Donner l'expression permettant de calculer f(x) , longueur du cercle de la section , connaissant « x ».
Montrer que l'application « f » est affine. Préciser les coefficients « m » et « n ».
Construire sa représentation graphique pour « x » compris entre 0 et 5 , en mm.

problème 5 :
Pour déposer des plis urgents on fait appelle à un taxi .
Le prix d'une course d'un taxi se compose :
- de la prise en charge : 2,1€
- d'une somme calculée suivant le nombre de kilomètres parcourus : 0,8 € par km.

Combien doit-on payer pour aller en A à 2 km de son point de départ (P_A)?
Quelle somme doit-on payer en plus de P_A pour aller en C situé à 5 km de A ?
Exprimer de même P_C en fonction de P_B (B et C sont distant de 3 km).
Exprimer le montant p(x) d'une course de « x » kilomètres.
Quelle est la nature de l'application qui , au nombre de kilomètres associe le prix de la course ?
Faire la représentation graphique ; en « x » le nombre de kilomètres (1 km :2 cm) en « y » le prix de la course (1€ = 2 cm)

problème 6 :
Un pépiniériste propose une promotion sur ses arbustes à fleurs. Moyennant un forfait de 10 € pour le transport , quelle que soit la distance , il livre ses arbustes au prix de 9,2 € la touffe.
Etablir la relation mathématique de la forme « affine » et calculer la dépense pour les achats suivants :
a) 3 lilas et 5 forsythias.
b) 7 cytises.
c) 4 boules de neige et 9 berbéris.
d) 3 aubépines roses.
e) 6 noisetiers pourpres.

problème 7 :
Un artisan doit faire livrer ses produits dans un rayon de 350 km autour de chez lui .Il a reçu les offres de deux transporteurs aux conditions suivantes :
Transporteur A : 2,3 € du kilomètre.
Transporteur B : 120 € de forfait et 1,1 € par km .
a) construire dans un même repère les représentations graphiques des coûts pour « x » km correspondants aux deux propositions.
b) Quel est le transporteur le moins cher pour 20 km ? pour 350 km ?
c) Indiquer , suivant la valeur de « x » , l'expression du coût minimum en fonction de « x ».

problème 8 :
Une personne achète une voiture dont le prix de vente est 10450 €. Pour le règlement , le vendeur lui propose deux solutions/
1ère solution : en payant comptant , le vendeur accorde une remise de 3% sur le prix de vente de la voiture.
2ème solution : si le payement à lieu à crédit , le règlement s'effectue ainsi :
- à la commande 1045 € ,
- le reste majoré de 20 % en 48 mensualités.

1°)Quel est le prix payé en choisissant la première solution ?
2°)Quel est le montant d'une mensualité pour la 2ème solution ?
3°)Quel est le prix final de la voiture si on paie à crédit ?