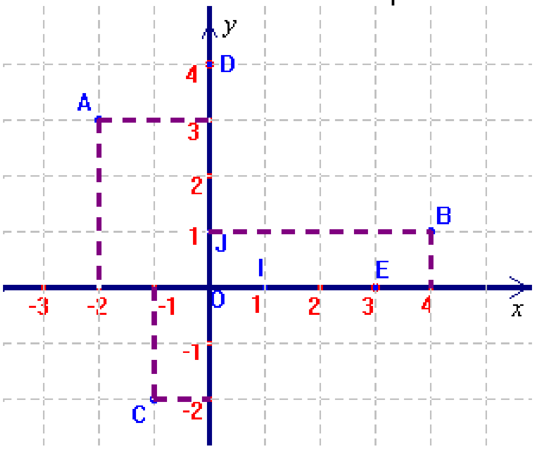
UNITÉ 11 : DES FONCTIONS

INTRODUCTION

Définition:

Un **repère du plan** est composé de deux axes gradués sécants. Les deux axes sont perpendiculaires et de plus la longueur unité est la même sur les deux axes.
L’axe horizontal (l'axe des abscisses ou axe des *x*) orienté de la gauche vers la droite et l’axe vertical (l'axe des ordonnées ou axe des *y*) orienté du bas vers le haut.
De plus, O, le point d'intersection des deux axes, s'appelle l'origine du repère ;
L’abscisse et l’ordonnée d’un point forment ses coordonnées.



Sur l'illustration ci-dessus, les coordonnées de A sont – 2 et 3 : On écrit ceci
A (– 2 ; 3)

L’abscisse est toujours écrite en premier.

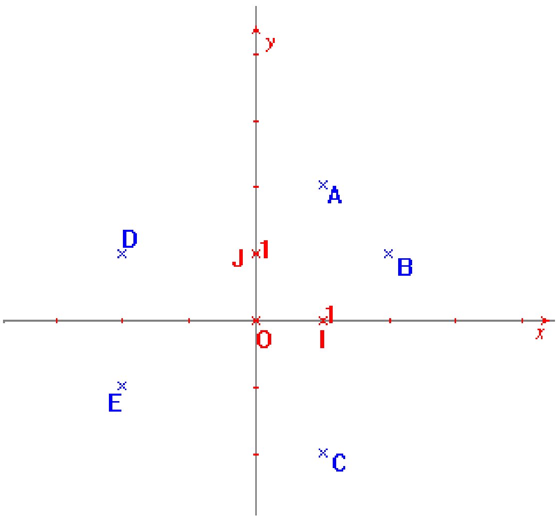
Dans le repère (O, x, y) :
A(-2 ; 3); B (4 ; 1); C (-1 ; -2)
Et quatre cas un peu particuliers (points situés sur un axe) :
D(0 ; 4); E(3 ; 0)

Remarques :

- Attention:
  - à l'ordre : toujours l'abscisse (la coordonnée horizontale) en premier
  - au signe des coordonnées...
- Un point qui est sur l'axe des abscisses a son ordonnée nulle.
- Un point qui est sur l'axe des ordonnées a son abscisse nulle.
- Coordonnées des points qui définissent le repère :

O (0 ; 0); I (1 ; 0); J (0 ; 1)

Exercice



Dans le repère cartésien ci-contre :

Quelles sont les coordonnées du point A ?

Quelles sont les coordonnées du point B ?

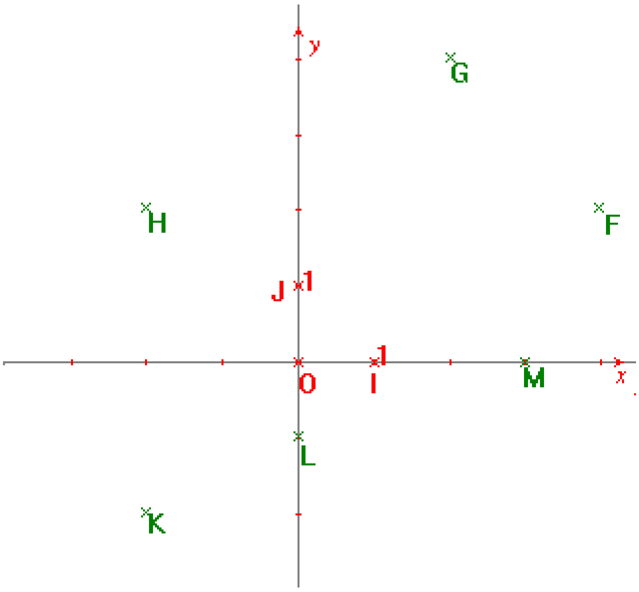
Quelles sont les coordonnées du point C ?

Quelles sont les coordonnées du point D ?

Quelles sont les coordonnées du point E ?

On considère maintenant le repère cartésien ci-dessous.

Trouver le point (parmi F, G, H, K, L et M) à partir des indices suivants :



- Mon abscisse est le double de mon ordonnée, je suis le point ______
- Mon ordonnée est égale à mon abscisse, je suis le point ______
- Mon abscisse est nulle, je suis le point ______
- Mon ordonnée est l'opposé de mon abscisse, je suis le point ______
- Mon ordonnée est le double de mon abscisse, je suis le point ______
- Mon ordonnée est nulle, je suis le point _______

Remarque:
Un système de coordonnées cartésiennes permet de déterminer la position d'un point muni d'un repère cartésien. Le mot *cartésien* vient du mathématicien et philosophe français René Descartes.
Le couple de réels (x, y) détermine le point, on l'appelle les coordonnées du point. Le réel x est appelé l'abscisse du point et le réel y est appelé l'ordonnée du point.

Définition:
Les variables **quantitatives** peuvent être **continues** et **discrètes**.

- Une variable **discrète** est une variable **numérique** qui prendre seulement un nombre déterminé d**es valeurs** comprises dans un intervalle donné.

- Une variable **continue** est une variable **numérique** qui peut prendre **toutes les valeurs** comprises dans un intervalle donné.

1. DÉFINITION DE FONCTION

Une **fonction** est une relation entre deux variables, x et y, est un ensemble de paires ordonnées. Les valeurs de x est le domaine et les valeurs de y est l'image. Une fonction est une relation qui associe à toute valeur x du domaine **une et une seule (unique)** valeur y. On note la fonction par y=f(x). x est l'antécédent et y est l'image

Exemple:
« À un nombre on associe le carré de ce nombre. »
Le carré de3 est 9
Le carré de 4 est 16
Le carré de –3 est 9
Le carré de x est x^2
Alors, $y=x^2$ *ou* $f(x)=x^2$

2. QUATRE FAÇONS DE DÉFINIR UNE FONCTION

2.1 AVEC UN ÉNONCÉ

La relation entre les variables d'une fonction on peut l'exprimer avec un énoncé.

Exemple:

« À un nombre on associe le carré de ce nombre».
« À un nombre on associe la moitié de ce nombre».

2.2 AVEC UNE FORMULE

Parfois, les fonctions sont exprimées avec une expression algébrique. Celle-ci on note y=f(x), et on appelle l'équation de la fonction.
X est la variable indépendant et y la variable dépendant.

Exemple:

$y = x^2$
$y = x / 2$

2.3 AVEC UN TABLEAU

Exemple:

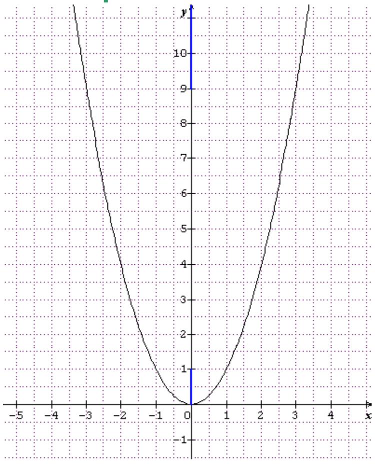
x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

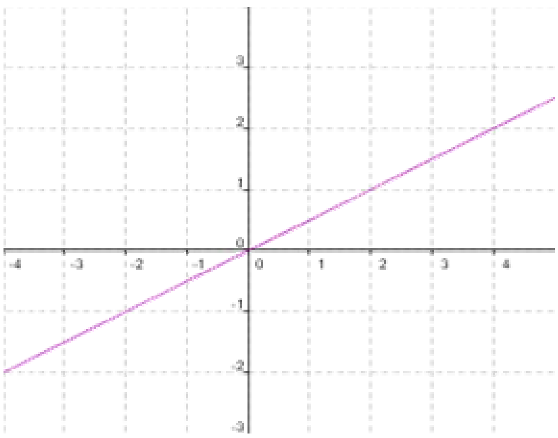
x	y = x / 2
-2	-1
-1	-1/2
0	0
1	1/2
2	1

2.4 AVEC UN GRAPHIQUE

Les couples (x, y) déterminent les points d'une fonction sur le repère cartésien. La représentation de tous les points dessine le graphique.
La variable indépendant, x, se représente sur l'axe d'abscisse, tandis que la variable dépendant, y, se représente sur l'axe d'ordonnées.

Exemple:





Remarque:

Dans certains cas, les valeurs lues sur le graphique sont exactes, mais le plus souvent il ne s'agit que de valeurs approchées.

Il faut savoir :

- passer d'un énoncé à une formule (identifier les variables indépendant et dépendant),
- utiliser une fonction définie par une formule (faire le tableau),
- passer d'un tableau à une graphique,
- et lire un graphique.

3. DES CARACTÉRISTIQUES D'UNE FONCTION

Détermination des caractéristiques d'une fonction

1. **Domaine**

Le domaine d'une fonction est l'ensemble de toutes les valeurs que la variable indépendant prend. On note Df ou Domf

2. **Image**

on appelle image d'une fonction *f* l'ensemble de toutes les valeurs que la variable dépendant prend. On note Imf

3. **Continuité. Points de discontinuité.**

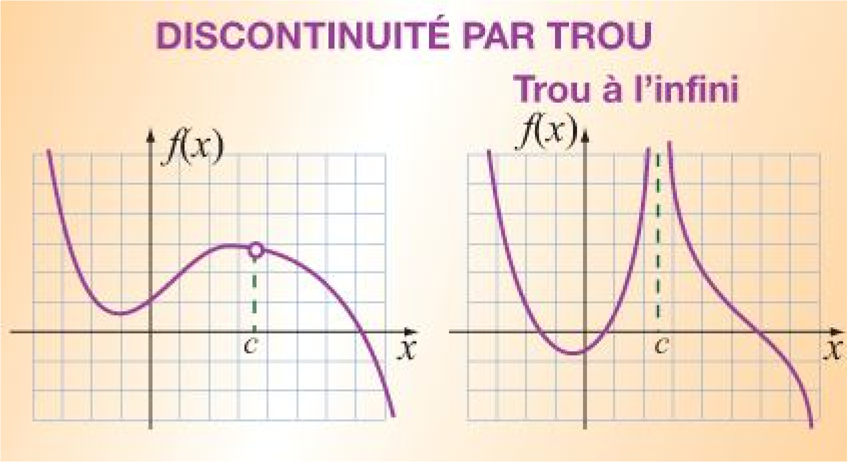
Une fonction est continue si son graphique on peut la tracer d'une façon continue, ininterrompue.

Attention : si le variables ne sont pas continues, on ne peut pas joindre les points.

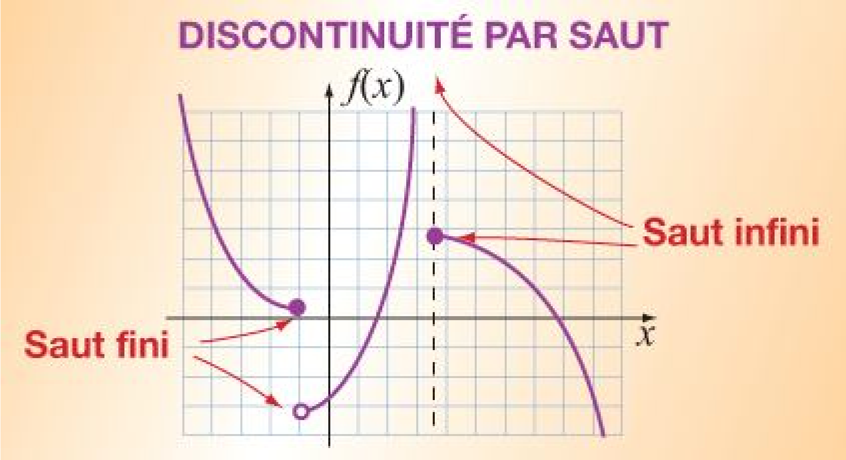
Une fonction est discontinue si celle-ci n'est pas continue.

Il y a deux types de points de discontinuité :

- Discontinuité par trou : Les points où le fonction n'est pas définie



- Discontinuité par saut : Les points où la fonction a un saut



4. **Coordonnés à l'origine**

Les points où le graphique de la fonction coupent les axes coordonnés.

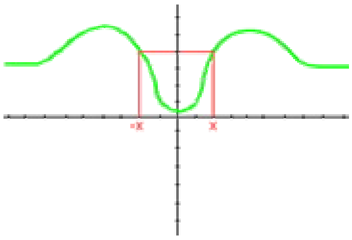
- ordonnée à l'origine : si $x = 0$ alors y =f(0)
- abscisse à l'origine : si $y = 0$ alors on a f(x)=0, il faut résoudre l'équation.

5. Symétrie

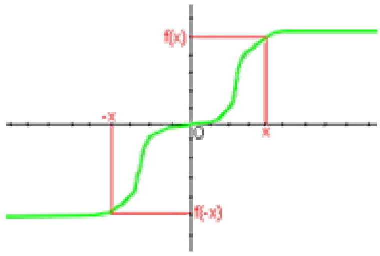
Une fonction y=f(x) est symétrique **paire** ou symétrique par rapport à l'axe des ordonnées si **pour tout x € Domf**, **f(-x) = f(x)**

Une fonction est symétrique **impaire** ou symétrique par rapport à l'origine du repère si **pour tout x € Domf, f(-x) = -f(x)**

Graphiquement:



symétrique **paire**



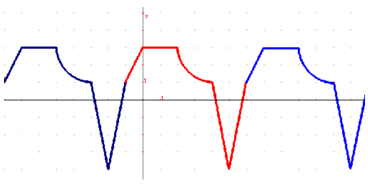
symétrique **impaire**

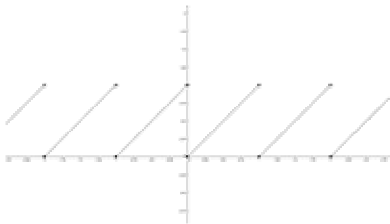
6. Périodicité

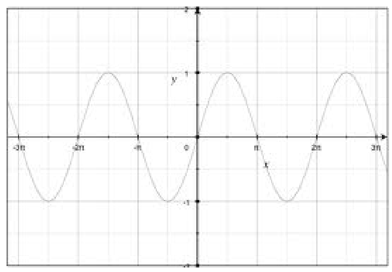
une **fonction périodique** est une fonction qui lorsqu'elle est appliquée à une variable, reprend la même valeur si on ajoute à cette variable une certaine quantité fixe appelée **période**.

Une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$de nombres réels est dite **périodique** de période $t \in \mathbb{R}^*$ si et seulement si:

$$\forall x \in \mathcal{D},\ x+t \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad f(x+t) = f(x)$$





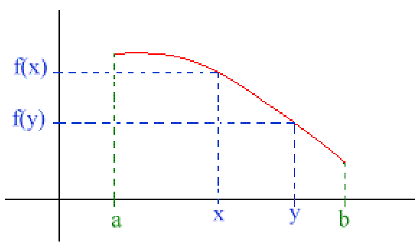


7. croissance et de décroissance d'une fonction

- Une <u>fonction croissante</u>: lorsque 'x' augmente dans un intervalle (a, b), 'y' augmente aussi.

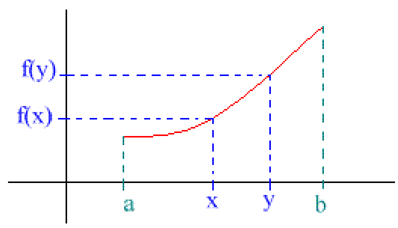
- Une <u>fonction décroissante</u>: Lorsque 'x' augmente dans un intervalle (a, b), 'y' diminue.

Remarque: Une <u>fonction</u> qui est ni croissante et ni décroissante dans un intervalle est dite <u>constante</u>



f est décroissante sur l'intervalle [a ; b].

Si x < y alors f(x) ≥ f(y).



f est croissante sur l'intervalle [a ; b].

Si x < y alors f(x) ≤ f(y)

8. Maximums et minimums locaux et absolus

Le **maximum** absolu *M* de *f* est la plus grande des valeurs *f*(x) pour x appartenant à Domf.
Le **maximum** de *f* (s'il existe) est un nombre de la forme *f*(a) avec a □*Domf* tel que :
$f(x) \leq f(a)$ pour tout x de Domf.

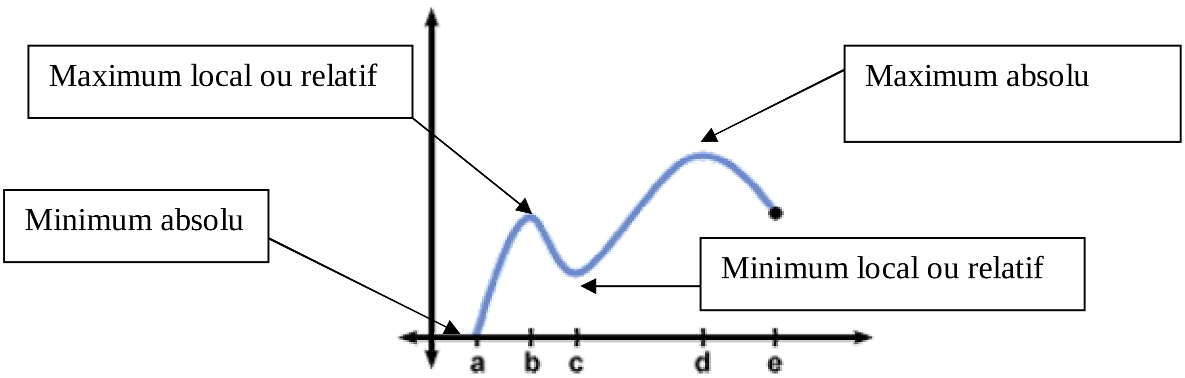
Autrement dit :
« le maximum absolu d'une fonction est la plus grande valeur atteinte par cette fonction ».

Le **minimum** *m* de *f* est la plus petite des valeurs *f*(x) pour x appartenant à Domf.
Le **maximum** de *f* (s'il existe) est un nombre de la forme *f*(a) avec a □ *Domf* tel que :
$f(a) \leq f(x)$ pour tout x de Domf.

Autrement dit :
« le minimum absolu d'une fonction est la plus petite valeur atteinte par cette fonction ».

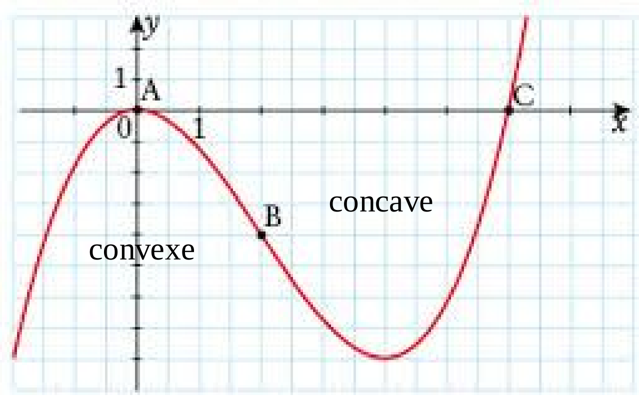
Maximum relatif :
La plus grande valeur 'y' dans un petit intervalle (sommet)
Minimum relatif :
La plus petite valeur 'y' dans un petit intervalle (sommet)

Remarque:
Le maximum absolu est situé à un maximum relatif ou à une extrémité de l'intervalle donné
Le minimum absolu est situé à un minimum relatif ou à une extrémité de l'intervalle donné



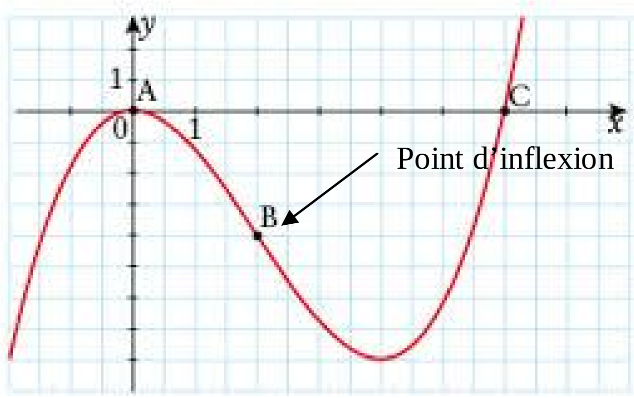
9. Concavité

une fonction est dite **convexe** si sa courbe est « tourné vers le bas».
Par contre, une fonction est dite **concave** si sa courbe est « tourné vers le haut».



10. Points d'inflexion

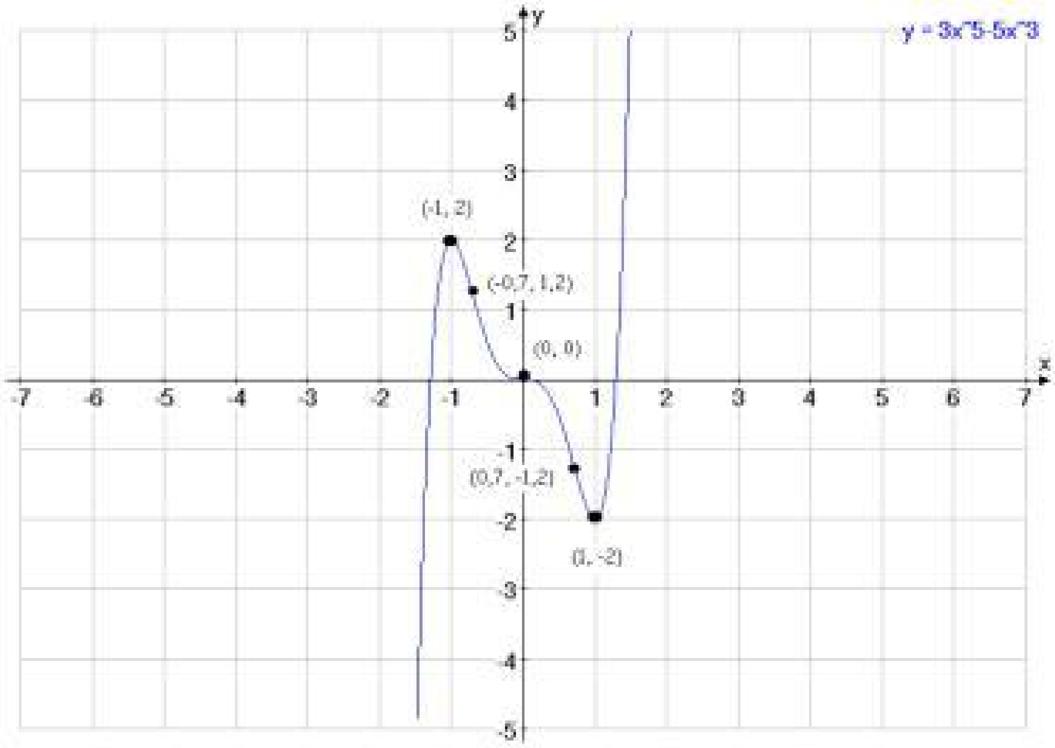
un **point d'inflexion** est un point où s'opère un changement de concavité d'une courbe plane.



11. Asymptotes

(cette caractéristique ne l'étudions pas pendant cette année)

Exemple: **Déterminez les caractéristiques de la fonction suivante :**
$f(x) = 3x^5 – 5x^3$



1. Domaine :

Le domaine de cette fonction est x $\in(-\infty,\infty)$, c'est-à-dire Domf =IR

2. Image :

L'image de cette fonction est x $\in(-\infty,\infty)$, c'est-à-dire Domf =IR

3. La fonction est continue.

4. Coordonnées à l'origine

Ordonnée à l'origine : si $x = 0$ alors $y = 0$.

Abscisse à l'origine : si $y = 0$ alors on a

$$0 = 3x^5 - 5x^3$$
$$0 = x^3(3x^2 - 5)$$

Alors

$$x^3 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x^2 - 5 = 0$$
$$x = 0 \qquad 3x^2 = 5$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$
$$x = \pm 1{,}3$$

Alors, les coordonnées à l'origine sont (0, 0), (1,3, 0) et (-1,3, 0).

5. Symétrie

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^5 - 5(-x)^3 \\ &= -3x^5 + 5x^3 \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Alors, la fonction est impaire. La courbe est symétrique autour de l'origine.

6. Périodicité
La fonction n'est pas périodique.

7.. Intervalles de croissance et de décroissance
La fonction *f(x)* est croissante pour les intervalles (- ∞,-1) et (1, ∞) et la fonction f(x) est décroissante pour les intervalles (-1, 0) et (0, 1).

8. Maximums et minimums locaux
on a un point maximum à (-1, 2) et un point minimum à (1, -2).
Il n'y a pas de maximums et minimums absolus.

9. Intervalles de concavité
La fonction *f(x)* est concave vers le haut pour les intervalles (-0,7, 0) et (0,7, ∞) et concave vers le bas (convexe) pour les intervalles (- ∞, -0,7) et (0, 0,7).

10. Points d'inflexion
Les points d'inflexion sont (-0,7, 1,2), (0, 0) et (0,7, -1,2).