PROBLEMA DE MONTY HALL

Aplicación del teorema de Bayes

Por Vicente Toledo Tolsada

ORIGEN DEL PROBLEMA

- El origen del problema o paradoja de Monty Hall se remonta a los años 70. Está basado en el concurso televisivo *Let's Make a Deal* emitido en aquella época en la cadena ABC (1968 – 1976) y presentado por Monty Hall.
- Monty Hall fue su anfitrión desde su primera emisión en 1963 (en la NBC) hasta 1986 (en la CBS).

- La premisa del problema consistía en que el concursante debía elegir una de entre 3 puertas y se llevaba el premio de la puerta elegida. Tras ellas había un coche y 2 cabras.
- Una vez elegida una puerta, el presentador, que sabía donde estaba el coche, abría una de las puertas en las que había una cabra. A continuación, el presentador le daba la opción de cambiar, si lo deseaba, de puerta. ¿Cuál crees que era la mejor opción?¿Quedarse con la puerta elegida o cambiarla?

DEMOSTRACIÓN Y DIFUSIÓN

- El problema fue planteado y demostrado por el matemático Steve Selvin en la revista *American Statistician* en 1975.
- Fue popularizado en 1990 por Marilyn vos Savant en *Parade Magazine*. Marilyn escribía en la columna dominical *Ask Marilyn*. En ella, publicó la demostración de Selvin, la cual provocó un gran revuelo.
- CURIOSIDAD: Marilyn vos Savant se encuentra en el libro Guinness de los Récords como la persona con el cociente intelectual más alto del mundo.

Supongamos que

El concursante elige la puerta 1

y que

El presentador abre la puerta 2, donde sabe que hay una cabra.

DILEMA

- ¿Qué debe hacer el concursante?
  - Opción 1: Quedarse con la puerta elegida
  - Opción 2:Cambiar de puerta
- ¿Realmente hay alguna diferencia?

RECORDEMOS EL TEOREMA DE BAYES

NOCIONES PREVIAS

Profesor: Vicente Toledo Tolsada. IES Guillem d'Alcalà. Departamento de matemáticas

PROBABILIDAD CONDICIONADA

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD

- **PROBABILIDAD CONDICIONADA:** La probabilidad condicionada, es la posibilidad de que ocurra un suceso A, como consecuencia de que ha tenido lugar otro suceso B, y se denota P(A/B). Se calcula utilizando la siguiente fórmula: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- **TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL:**
  Sea $A_1, A_2 \ldots A_n$ una partición del espacio muestral y B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionadas $P(B/A_i)$, entonces la probabilidad del suceso P(B) $= \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \cdot P(A_i)$

TEOREMA DE BAYES

- **TEOREMA DE BAYES:** Sean $A_1, A_2 \dots A_n$ sucesos incompatibles y de probabilidad no nula. Si B es un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionadas $P(B/A_i)$, entonces $P(A_i/B)$ se calcula con la fórmula:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$$

donde:

$P(A_i)$ son las probabilidades a priori

$P(B/A_i)$ es la probabilidad de B sabiendo que ocurre A_i

$P(A_i/B)$ son las probabilidades a posteriori

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

APLICACIÓN DEL TEOREMA DE BAYES

Profesor: Vicente Toledo Tolsada. IES Guillem d'Alcalà. Departamento de matemáticas

PRIMER PASO:

DEFINICIÓN DE LOS SUCESOS

- Llamamos:

C1: suceso el coche está en la puerta 1

C2: suceso el coche está en la puerta 2

C3: suceso el coche está en la puerta 3

- Llamamos

A1: suceso el presentador abre la puerta 1

A2: suceso el presentador abre la puerta 2

A3: suceso el presentador abre la puerta 3

SEGUNDO PASO:

PROBABILIDADES A PRIORI

- Al empezar, la probabilidad de que el coche se encuentre en una de las puertas es la misma:

$P(C1) = 1/3$

$P(C2) = 1/3$

$P(C3) = 1/3$

TERCER PASO:

PROBABILIDADES DE QUE ABRA LA PUERTA 2

- Hemos supuesto que el concursante había elegido la puerta 1. Entonces puede ocurrir 2 cosas:

1) El coche está en la puerta 1
2) El coche no está en la puerta 1.

- Y que el presentador abría la puerta 2, en la que sabía que había una cabra. Entonces tenemos que:

a) En el caso de que el coche esté en la puerta 1 $P(A2/C1)= 1/2$ ya que puede abrir cualquiera de las otras 2 puertas.
b) Pero en el caso de que el coche NO esté en la puerta 1 $P(A2/C3) =1$ ya que no tiene opción de elegir otra puerta. La puerta 1 es la elegida y en la puerta 3 está el coche.

¿DEBE CAMBIAR DE PUERTA?

- ¿Qué probabilidad será mayor?

1) ¿Me quedo con la misma puerta? $P(C1/A2)$
2) ¿Cambió de puerta? $P(C3/A2)$

NOTA: Como el coche es seguro que está en una de las dos puertas, tenemos que:

$$P(C1/A2) + P(C3/A2) = 1$$

CUARTO Y ÚLTIMO PASO:

CÁLCULO PROBABILIDADES A POSTERIORI

- $P(C1/A2) = \dfrac{P(A2/C1)\cdot P(C1)}{P(A2)} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{P(A2)}$
- $P(C3/A2) = \dfrac{P(A2/C3)\cdot P(C3)}{P(A2)} = \dfrac{1\cdot\frac{1}{3}}{P(A2)}$

Observamos que P(C3/A2) es el doble que P(C1/A2). Como ambas probabilidades suman 1 tenemos que…

SOLUCIÓN

- $P(C1/A2) = 1/3$
- $P(C3/A2) = 2/3$

CONCLUSIÓN: La probabilidad de llevarnos el coche se duplicará si cambiamos de puerta

AMPLIACIÓN. CÁLCULO P(A2)

T. DE LA PROBABILIDAD TOTAL

$P(A2) = P(C1)\cdot(A2/C1) +$

$+P(C2)\cdot P(A2/C2) + P(C3)\cdot(A2/C3) =$

$=1/3 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot 1 = 1/2$

NOTA: $P(A2/C2) = 0$ ya que si el coche estuviera en la puerta 2, la probabilidad de que abra esa puerta es 0.