UNITÉ 1 : DES NOMBRES RÉELS

Le classement des nombres réels

$$\text{complexes } C\begin{cases} \text{réels } R \begin{cases} \text{rationnels } Q \begin{cases} \text{entiers relatifs } Z \begin{cases} \text{naturels } N = \{0,1,2,3,4,5,6,7...\} \\ \text{naturels négatifs} = \{-1,-2,-3...\} \end{cases} \\ \text{décimaux} = \left\{3.25, -0.06, -\frac{3}{2}, 4.25, -2.7, -10.35...\right\} \\ \text{décimaux périodiques} \begin{cases} \text{simples} = \left\{2.\widehat{3}, \frac{1}{9}, -0.\widehat{7}...\right\} \\ \text{mixtes} = \left\{23.4\widehat{5}, -0.00\widehat{8}\right\} \end{cases} \end{cases} \\ \text{irrationnels } I = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, e, 2.010010001..., \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, ...\right\} \end{cases} \\ \text{imaginaires} = \text{sous la forme } a+bi \text{ avec } b \neq 0, \\ \text{exemples } 3+2i, -4-5i, 6i... \text{et } i = \sqrt{-1} \end{cases}$$

1. Des nombres rationnels. L'écriture fractionnaire

Tout nombre décimal ou possédant un développement décimal périodique peut s'écrire sous forme de fraction.

Suivez les démarches suivantes	Cas du nombre décimal	Cas du développement décimal périodique simple	Cas du développement décimal périodique mixte
On appelle N le nombre décimal	N = 7.25	N= $32.\widehat{7}$	$23.24\widehat{5}$
Multipliez N par 10^n (où n est le nombre de chiffres après la virgule)	$10^2 \cdot$N= $10^2 \cdot 7.25$ 100N = 725		
Multipliez N par 10^n (où n est le nombre de chiffres composant la valeur mixte)			$10^2 \cdot$N= $10^2 \cdot 23.24\widehat{5}$ 100N = $2324.\widehat{5}$
Multipliez N par 10^n (où n est le nombre de chiffres composant la période)		$10^1 \cdot$N = $10^1 \cdot 32.\widehat{7}$ 10N = $327.\widehat{7}$	
Multipliez le résultat précédent par 10^n (où n est le nombre de chiffres composant la période)			$10^1 \cdot 10^2 \cdot$N =$10^1 \cdot 10^2 \cdot 23.24\widehat{5}$ 1000N = $23245.\widehat{5}$
Soustrayez : $10^n \cdot$N – N		$10^1 \cdot$N –N =$327.\widehat{7} - 32.\widehat{7}$ 9N = 295	
Soustrayez les deux résultats précédents			1000N–100N=$23245.\widehat{5} - 2324.\widehat{5}$ 900N =20921
Dégagez N et simplifiez	$N = \frac{725}{100} = \frac{29}{4}$	$N = \frac{295}{9}$	$N = \frac{20921}{900}$

Autrement :

Cas du nombre décimal :
Il suffit de prendre comme numérateur le nombre décimal privé de sa virgule et comme dénominateur 10^n où n est le nombre de chiffres après la virgule

$$15.16 = \frac{1516}{100} = \frac{379}{25}$$

Cas du développement décimal périodique simple :
Comme numérateur, il suffit de retrancher la partie entière du nombre composé de la partie entière suivie de la période tandis que le dénominateur sera composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres composant la période.

$$1.232323\ldots = \frac{123-1}{99} = \frac{122}{99}$$

Cas du développement décimal périodique mixte :
Comme numérateur, il suffit de retrancher la partie entière suivie de la valeur mixte du nombre composé de la partie entière suivie de la valeur mixte et de la période.
Quant au dénominateur, il sera composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres composant la période, suivis d'autant de zéros qu'il y a de chiffres après la virgule composant la valeur mixte.

$$1.2454545\ldots = \frac{1245-12}{990} = \frac{1233}{990} = \frac{137}{110}$$

2. Des nombres réels (R).

Les nombre rationnels et irrationnels forment l'ensemble des nombres **réels.**
Rappelez :
- Sont **rationnels** tous les nombres qui peuvent s'écrire **sous la forme d'une** fraction, c'est-à-dire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des nombres entiers relatifs et b $\neq$ 0.
- Les nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous cette forme sont dits **irrationnels.**

Exemples :

4 ; –19 ; 9,21 ; $\frac{3}{11}$; $\frac{2}{5}$; $\sqrt{2}$; e ; ϕ et π sont des nombres réels.

Parmi ces nombres réels, seuls 4 ; –19 ; 9,21 ; $\frac{3}{11}$ et $\frac{2}{5}$ sont rationnels.

$\sqrt{2}$; e ; ϕ et π sont des nombres irrationnels.

PROPRIÉTÉS DE L'ADDITION DANS R

- La somme de deux nombres réels est encore un nombre réel.
- L'addition des nombres réels est commutative. C'est´`a-dire, La commutativité permet d'échanger l'ordre des termes dans une somme.
  $a+b=b+a$
- L'addition des nombres réels est associative. C'est´`a-dire, L'associativité permet de supprimer les parenthèses.
  $(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$
- 0 est l'élément neutre pour l'addition dans R.
  $a+0=0+a=a$
- L'addition dans R est symétrique. Pour tout réel a, il existe un réel b tel que la somme de a et de b est 0. b est appelé l'**opposé** de a. On note : $b = -a$.

PROPRIÉTÉS DE LA MULTIPLICATION DANS R

- Le produit de deux nombres réels est encore un nombre réel.
- La multiplication des nombres réels est commutative. C'est´`a-dire, La commutativité permet d'échanger l'ordre des facteurs dans un produit.
  $a\cdot b=b\cdot a$
- La multiplication des nombres réels est associative. C'est´`a-dire, L'associativité permet de supprimer les parenthèses.
  $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=a\cdot b\cdot c$
- 1 est l'élément neutre pour la multiplication dans R.
  $a\cdot 1=1\cdot a=a$

La multiplication dans R^* est symétrique. Pour tout réel **non nul** a, il existe un réel **non nul** b tel que le produit de a par b soit égal à l'élément neutre 1. b est l'inverse de a. On note : $b = \frac{1}{a}$.

Attention : 0 n'a pas d'inverse !

PROPRIÉTÉ DISTRIBUTIVE PAR RAPPORT À L'ADDITION DANS R

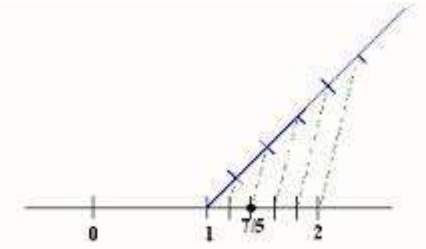
$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

EXTRAIRE FACTEUR COMMUN

$a\cdot b+a\cdot c = a\cdot(b+c)$

3. La droite réelle.

On sait représenter sur la droite réelle des nombres rationnels (naturels, entiers, décimaux fini et périodiques). (Théorème de THALÈS)
Exemple : 7/5 = 1+ 2/5

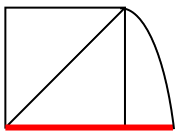


Mais comment peut-on représenter les nombres irrationnels ?
On peut les représenter approximativement.
Cependant les racines carrées $\sqrt{a}$, on peut les représenter exactement. En utilisant la théorème de Pythagore

Exemple:
Pour représenter $\sqrt{2}$, il faut faire appel au théorème de PYTHAGORE.

La théorème de PYTHAGORE dit : *Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des côtés égale le carré de l'hypoténuse*.

$a^2 + b^2 = c^2$
si $a = 1$ et $b = 1$
alors $1 + 1 = c^2$
soit $c^2 = 2$ ou $c = \sqrt{2}$
$\sqrt{2}$ peut donc se représenter par la diagonale d'un carré de côté 1.



4. Des approches

Un nombre peut avoir plusieurs valeurs approchées. Cette valeur peut être arrondie ou tronquée.

TRONCATURE :
Faire la troncature d'un nombre, c'est couper ce nombre à un rang donné.
Ex : faire une troncature au centième est couper le nombre à deux chiffres à droite de la virgule.
Exemple: π au centième $\pi \approx$□3,14 (valeur approchée par défaut, valeur tronquée)
ARRONDI:
Pour arrondir un nombre à un rang donné :

- on fait une troncature,
- on regarde le chiffre qui est juste après cette troncature
    - si la partie enlevée commence par 0 – 1 – 2 – 3 – 4 on prend la valeur tronquée,
    - si la partie enlevée commence par 5 – 6 – 7 – 8 – 9 on prend la valeur tronquée à laquelle on ajoute 1 au chiffre le plus à droite.

Exemples : 7,18342 a pour valeur arrondie 7,18 à 0,01 près
7,18715 a pour valeur arrondie 7,19 à 0,01 près

Observez les tableaux ci-dessous :

		Nombre	Arrondi	Troncature
à 1 près	= à l'unité	14,**8**753	15	14
à 0,1 près	= au dixième	14,8**7**53	14,9	14,8
à 0,01 près	=au centième	14,87**5**3	14,88	14,87
à 0,001 près	= au millième	14,875**3**	14,875	14,875

Arrondi en présence d'un 5 :

	Nombre	Arrondi	Troncature
à l'unité	9,**5**	10	9
à 0,01près	6,85**4**	6,85	6,85
à 0,01 près	6,85**5**	6,86	6,85
à 0,01 près	6,85**6**	6,86	6,85

5. Des erreurs

Erreur absolue

L'erreur absolue est : $E_{a=} \left| \text{valeur approchée} - \text{valeur réelle} \right|$

L'erreur absolue mesure l'imprécision sur une mesure que nous effectuons.

Elle est appelée absolue, car elle est le résultat de la valeur absolue de la différence entre

- d'une part la valeur réelle de la grandeur que l'on mesure
- et d'autre part une valeur de référence que nous avons choisie comme une bonne approximation de celle-ci.

Elle est donc toujours un nombre positif.
On utilise l'erreur absolue pour calculer l'erreur relative.

Erreur relative

L'erreur relative est : $E_r = \dfrac{\left| \text{valeur approchée} - \text{valeur réelle} \right|}{\text{valeur réelle}}$

En fait, $\dfrac{\text{valeur approchée} - \text{valeur réelle}}{\text{valeur réelle}} \times 100$, il s'agit d'un pourcentage d'augmentation (respectivement de diminution) qui, lorsqu'on l'applique à la valeur exacte, donne la valeur approchée.

6. Des intervalles

On appelle intervalle réel un ensemble de nombres délimité par deux nombres réels constituant une borne inférieure et une borne supérieure. Un intervalle contient tous les nombres réels compris entre ces deux nombres.

Intervalles bornés

Soient deux réels a et b tels que a < b. Le tableau ci-dessous résume les quatre types d'intervalles bornés.

L'intervalle noté :	est l'ensemble des réels *x* tels que :	Représentation (en rouge) :
$[a;b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a;b[$	$a \leq x < b$	
$]a;b]$	$a < x \leq b$	
$]a;b[$	$a < x < b$	

Parmi les intervalles bornés, on distingue :

- les intervalles ouverts : **]a , b[**
- les intervalles fermés : **[a , b]**
- les intervalles semi-ouverts (ou semi-fermés) : **[a , b[et]a , b]**

Intervalles non bornés

Soient a et b deux réels. Le tableau ci-dessous résume les quatre types d'intervalles non bornés. On appelle aussi demi-droite

L'intervalle noté :	est l'ensemble des réels *x* tels que :	Représentation (en rouge) :
$[a;+\infty[$	$x \geq a$	
$]a;+\infty[$	$x > a$	
$]-\infty;b]$	$x \leq b$	
$]-\infty;b[$	$x < b$	

7. Des problèmes avec des pourcentages

Un **pourcentage** est une façon d'exprimer un nombre comme une fraction de cent, généralement en utilisant le signe *%*

$a\,\% = \frac{a}{100}$

On utilise le pourcentage seulement lorsqu'un nombre représente une proportion ou une fraction d'un ensemble.
La formule suivante permet de **calculer un pourcentage** à partir de deux valeurs données. Cela permet de situer la première valeur par rapport à la deuxième.

$$\boxed{Pourcentage = \frac{effectif}{effectif\ total} \times 100}$$

Rappelle : a% de N = $\frac{a}{100} \cdot$N

Le pourcentage comme une règle de trois directe :

a% de b est c alors	a---------100 c----------b

Exemple1 :

10% de 30 est x	10% de x est 3	x% de 30 est 3
10--------100 x----------30	10 ---------100 3 ------------ x	x --------- 100 3 ------------30

Exemple2 :
Il y a 200 élèves au lycée, 25% des élèves portent des lunettes. Combien d'élèves portent des lunettes ?

25%de 200 = $\frac{25}{100}$ ·200= 50 élèves

Exemple 3 :
Dans une classe de 25 élèves il y a 13 filles. Quel est le pourcentage de filles ?

On applique la formule : . $\frac{13}{25}$ ·100, Donc il y a 52% de filles dans cette classe.

On peut vérifier le résultat en calculant 52% de 25.

Pourcentage et évolution

Remarque :

Il n'y a qu'une formule universelle à retenir et un seul schéma dès qu'on a affaire à des hausses et des baisses en tout genre, c'est celle-là :

$$y_1 \times CM = y_2$$

Valeur **avant** évolution	Coefficient multiplicatif	Valeur **après** évolution

Augmentation ou diminution (évolution) en pourcentage

Avec cette formule, on peut faire tous les exercices dans lesquels on a des hausses et des baisses. Il faut juste parfois repérer ce qui serait la valeur d'avant et celle d'après.
Ce qui est la clé qui change, c'est le CM !! Le fameux coefficient multiplicatif !!
Ce qu'il faut retenir :

• **Si c'est une <u>hausse</u> de t % alors CM = 1 +** $\mathbf{\frac{t}{100}}$ c'est-à-dire cela équivaut à calculer (100+t) %

• **Si c'est une <u>baisse</u> de t % alors CM = 1 –** $\mathbf{\frac{t}{100}}$ c'est-à-dire cela équivaut à calculer (100 – t) %

Exemple :

Ça augmente de 25%, alors CM = $1 + \frac{25}{100} = 1 + 0{,}25 = 1{,}25$

Ça baisse de 36% alors CM = $1 - \frac{36}{100} = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$

Après il faut savoir revenir sur ses pas !!

Si au cours d'un calcul on obtient une valeur d'un CM et qu'on veut savoir si ça fait une hausse ou une baisse, il suffit d'effectuer le calcul CM – 1 et de multiplier ce résultat par 100.

• **Si le résultat obtenu est positif, c'est une hausse !! Et on obtient même le taux de la hausse en résultat !!**

Exemple :

CM = 1,38

1,38 – 1 = 0,38 et 0,38 × 100 = 38

C'est donc une hausse de 38 %.

• **Si le résultat obtenu est négatif, c'est une baisse !! Et on obtient même le taux de la baisse en résultat !!**

Exemple :

CM = 0,48

0,48 – 1 = - 0,52 et - 0,52 × 100 = - 52

C'est donc une baisse de 52 %.

Remarque : Si par hasard CM = 1, ça veut dire que ça n'a pas varié

Pourcentages enchaînés : Évolutions successives

Si on enchaîne les évolutions (des hausses et des baisses), on prend les coefficients multiplicatifs de chacun et on les multiplie tous entre eux, cela donne un coefficient multiplicatif CM global, alors : **valeur après évolution = CM · valeur avant évolution**

Exemple :

On augmente de 30% et on baisse de 40% !!

« On augmente de 30% » : $CM_1 = 1 + 0,3 = 1,3$

« On baisse de 40% » : $CM_2 = 1 – 0,4 = 0,6$

On obtient alors le CM global :

$CM = CM_1 \times CM_2 = 1,3 \times 0,6 = 0,78$

On peut même s'intéresser à ce que ça donne !!

CM = 0,78 donc 0,78 – 1 = - 0,22 et 0,22 × 100 = - 22 donc c'est une baisse de 22 % !!

Et en plus ça marche encore si on fait plein d'évolutions (ça augmente de 15%, ça baisse de 10%, ça augmente de 30%, ça augmente de 20% : 1,15 × 0,9 × 1,3 × 1,2)

« Pourcentage de pourcentage »

C'est quand on prend une part d'une part de quelque chose. On multiplie les taux et on divise par 100 pour avoir le taux de cette « sous-partie » dans le total

Exemple : Dans une entreprise, il y a 40% d'hommes et parmi ces hommes il y a 30% de cadres.

On demande alors la part en pourcentage d'hommes cadres dans l'entreprise

$$\frac{40 \times 30}{100} = \frac{1200}{100} = 12$$

Il y a donc 12% d'hommes cadres dans l'entreprise.

8. L'intérêt simple

L'intérêt simple, **I**, est le revenu d'une somme d'argent prêtée (ou placée). Le montant de l'intérêt est fonction du capital, **C**, du taux de placement, **r%**, et de la durée du placement, **t**.

Remarque :
Durée de placement :
Le montant de l'intérêt varie selon la durée du prêt. Celle-ci peut-être calculée en jours, en quinzaines, en mois ou années.
Le calcul de la durée se fait selon les règles suivantes :

- Une année compte 360 jours, 24 quinzaines, 12 mois.
- Si la durée est calculée en jours, les mois sont comptés à leur juste valeur. Sans autre indication, le mois de Février compte 28 jours.
  Exemple : Quelle est la durée d'un placement effectué du 5 Septembre au 15 Décembre ?

Septembre	30-5 = 25
Octobre	31
Novembre	30
Décembre	15
	101 jours

- Si la durée est calculée en quinzaines : on compte les quinzaines à partir du 1er ou du 16 de chaque mois qui suit le dépôt, à partir du 1erou du 16 qui précède le retrait.
- Si la durée est calculée en mois, on ne tient pas compte de la durée réelle des mois.

FORMULES :

$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$ (durée en années)

$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{2 \cdot 100}$ (durée en semestre)

$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{12 \cdot 100}$ (durée s en mois)

$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{3 \cdot 100}$ (durée en quadrimestre)

$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{360 \cdot 100}$ (durée en jours)

$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{4 \cdot 100}$ (durée en trimestre)

Le capital final (valeur acquise)

En ajoutant à un capital les intérêts qu'il a produit à la suite d'un placement, on obtient la somme dont dispose désormais le propriétaire des fonds. Cette somme est la valeur acquise $C_F = C + I$

Activités :

1. *Quel intérêt un capital de 3 200 €, placé à 7.5% pendant 5 ans produit-il ?*
   $$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{3200 \cdot 7.5 \cdot 5}{100}$$
2. *Quel intérêt un capital de 6 420 € placé à 10% l'an pendant 8 mois produit-il ?*
   $$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{12 \cdot 100} = \frac{6420 \cdot 10 \cdot 8}{12 \cdot 100}$$
3. *Quel intérêt un capital de 2000 €, placé à 9% pendant 15 quinzaines, produit-il ?*
   $$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{24 \cdot 100} = \frac{2000 \cdot 9 \cdot 15}{24 \cdot 100}$$

4. *Quel intérêt un capital de 12 000 €, placé à 4.5% du 23 Août au 11 Juin, produit-il ?*

$$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{360\cdot 100}=\frac{12000\cdot 4.5\cdot 293}{360\cdot 100}$$

août 31-23 ; septembre 30 ; octobre 31; novembre 30 ; décembre 31 ; janvier 31 ; février 28 ; mars 31 ; avril 30 ; mai 31 ; juin 11

TOTAL : 9+30+31+30+31+31+28+31+30+31+11=293 jours

5. *Calculer la valeur acquise par un capital de 20 000 € placé à 12% l'an, pendant 270 jours ?*

$$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{360\cdot 100}=\frac{20000\cdot 12.5\cdot 270}{360\cdot 100} \qquad C_F = C + I = 20000+\frac{20000\cdot 12.5\cdot 270}{360\cdot 100}$$

9. L'intérêt composé

Un capital est placé à **intérêts composés** lorsque les intérêts de chaque période sont incorporés au capital pour l'augmenter progressivement et porter intérêts à leur tour.

Pour calculer des intérêts composés annuellement, il suffit d'utiliser une suite géométrique, dont la formule est :

$C_f = C\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$; où C_f est la valeur finale, C la valeur initiale, r% le taux d'intérêt

sur une période, et t le nombre de périodes (d'années, semestres, trimestres, etc.). L'habitude est d'exprimer le taux d'intérêt en pourcentage, ainsi on écrira 2 % pour $\frac{2}{100}$.

L'intérêt composé ou le revenu obtenu est I= C_f -C
Exemple : *En plaçant 10 euros à un taux de 2 % par an pendant 5 ans, on obtient :*
$C_f = 10\cdot\left(1+\frac{2}{100}\right)^5$ =11.04 € ;
Après 10 ans, le total sera de 12,19 € ;

Après un siècle, de 72,45 €.

Cette somme C_f est aussi celle qui est due par un emprunteur au bout de t années, au taux d'intérêt r (s'il n'a rien remboursé entre-temps).

Remarque :

Les intérêts peuvent aussi être composés sur *n* **fractions d'une année**, par exemple 12 mois, même si le taux r reste exprimé par an. Un intérêt égal à $\frac{r}{12}$ est alors versé à

la fin de chaque mois. La valeur finale au bout de t années est alors donnée par $C_f = C\cdot\left(1+\frac{r}{n\cdot 100}\right)^{n\cdot t}$

Exemple : *En plaçant 10 euros à un taux de 2 % par an pendant 5 mois, on obtient:*

$C_f = 10\cdot\left(1+\frac{2}{12\cdot 100}\right)^{12\cdot 5}$ = 11.05€