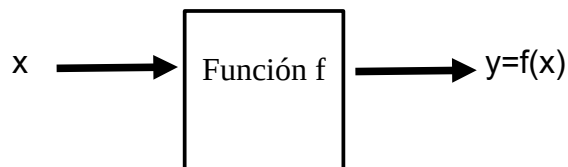


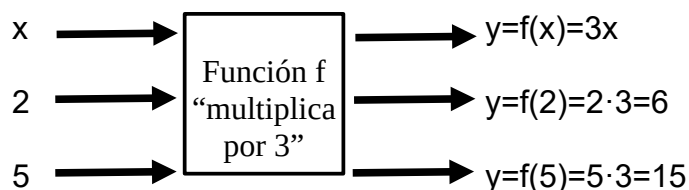
TEMA 7: FUNCIONES. DEFINICIONES Y CARACTERÍSTICAS

1.- CONCEPTOS BÁSICOS (p190)

- Una función es una relación entre varias magnitudes, que describen fenómenos físicos, económicos, biológicos, sociológicos o, simplemente, relaciones matemática. A cada una de esas magnitudes se le llama variable.
- Cuando la relación es únicamente entre dos variables:
 - A una de esas magnitudes o variable le llamamos **independiente**, porque podemos elegir qué valor toma. Se asocia a la letra “**x**” (aunque se le puede asociar otra letra si la relación matemática corresponde a magnitudes conocidas, como ocurre en física con el tiempo “**t**”, la velocidad “**v**”, etc.).
 - A la otra magnitud o variable se le llama **dependiente**, porque viene dada por la primera, es función de ella, y se asocia a la letra “**y**” (aunque como ocurre con la independiente, puede tomar otras letras).
 - Por eso escribimos **$y = f(x)$** y decimos que “**y**” es función de “**x**”.
- **IMPORTANTE:** para que la relación entre las variables sea una función, cada valor de “**x**” solo puede tener asociado un valor de “**y**” (o ninguno). O sea, dado el valor de **x**, sabemos cuál es el valor de **y** que le corresponde, no hay varias posibilidades.
- Ejemplos:
 - Si los boquerones se venden a 6 €/kg, el coste de los boquerones en función de los kilogramos comprados.
 - El área de un cuadrado en función de la longitud de su lado.
 - La distancia que recorre un coche en función de la velocidad que lleva.
- Podemos ver la función como una caja a la que le entra un valor de la variable **x** o independiente. En esa caja se realiza alguna acción, y nos devuelve el valor de la variable dependiente **y**:



Por ejemplo:



2.- COMO SE REPRESENTAN LAS FUNCIONES (p191, 192, 193)

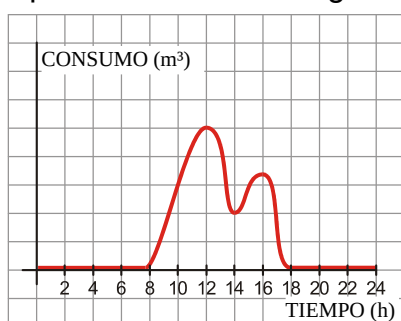
Una función se puede representar:

- Mediante un gráfico.

En este caso, se representa en los ejes de coordenadas cartesianas, donde:

- La recta horizontal es el eje de abscisas o eje X, y corresponde a los valores de la variable independiente.
- La recta vertical es el eje de ordenadas o eje Y, y corresponde a los valores de la variable dependiente.
- El punto donde se cortan los ejes es el origen de coordenadas, punto (0,0).
- Los ejes de coordenadas dividen el plan en cuatro regiones. Cada una de estas regiones se denomina cuadrante.

Por ejemplo: El consumo de agua en una escuela a lo largo del día:



- Mediante un enunciado.

La relación entre las variables se explica mediante una descripción.

Por ejemplo: Esta mañana, Pau ha salido a hacer una ruta en bicicleta. Ha tardado media hora en llegar al primer punto de descanso, que se encontraba en 25 Km de su casa. Ha estado parado durante 30 minutos. Ha tardado 1 hora en recorrer los 10 Km siguientes y ha tardado otra hora en recorrer los 20 Km que faltaban para llegar a su destino. Después ha vuelto a casa sin hacer ningún descanso y ha tardado 2 horas y media en llegar.

- Mediante una tabla de valores.

Por ejemplo: En la siguiente tabla nos indica cuánto se paga en un aparcamiento en función del tiempo que dejemos el coche aparcado:

Rotación		App		Reservas por horas/días		Abonos Mensuales	
1 hora	2,50€	1 hora	2,50€	1 hora	2,50€	Nocturno	53,00€
2 horas	5,00€	2 horas	5,00€			24 horas renovable	117,00€
3 horas	7,50€	3 horas	7,50€	1 día	11,45€	Flexible 14h renovable	81,00€
4 horas	9,95€	4 horas	9,95€	3 días	34,35€	Flexible 12h renovable	76,00€
5 horas	11,60€	5 horas	9,95€			Flexible 10h renovable	69,00€
Máximo diario	22,35€	Máximo diario	9,95€	1 semana	64,90€		

- Mediante su expresión matemática.

Es la forma más precisa porque nos permite calcular cualquier valor, hacer la representación gráfica, hacer una tabla,...

Por ejemplo:

- $y = 4x^3 - 5x + 1$ (relación entre la variable x e y)
- $e = 10 t^2$ (distancia que recorre una bola con una aceleración de 20cm/s^2)
- $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ (volumen de una esfera)
- $T = 2\sqrt{l}$ (periodo de un péndulo en función de su longitud)

→ p190: 1, 2

→ p207: 1, 2, 3

→ p191: 1, 2

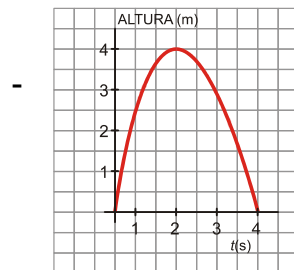
→ p207: 4, 5

→ p209: 24, 25

3.- DOMINIO DE DEFINICIÓN (p194)

Llamamos dominio de definición de una función f , al conjunto de valores de x para los que existe la función (conjunto de elementos que tienen imagen). Lo representamos por $\text{Dom } f$ ó D_f .

Ejemplos:



→ $\text{Dom } f = [0,4]$

- $f(x) = 2 + \frac{1}{x} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$
- $f(x) = x^2 + 2x + 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$

Para calcular el dominio de definición de una función en forma algebraica hay que buscar en cada caso si hay valores en la función que no se pueden asignar a la variable x porque no se pueden realizar las operaciones que salen. Vamos a ver cómo calcularlo en algunas funciones típicas:

a) FUNCIONES POLINÓMICAS

Son funciones del tipo $f(x) = P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio de cualquier grado.

Estas funciones están definidas para cualquier valor de x , por tanto el dominio será siempre el conjunto de los números reales: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

Ejemplo: $f(x) = x^2 + 2x + 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x < -3 \\ x^3-1 & -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{x-5} & x \geq 4 \end{cases} \rightarrow \text{Dom } f =]-\infty, -3[\cup [-1, 2] \cup [4, 5[\cup]5, \infty[$$

e) FUNCIONES DEFINIDAS GRÁFICAMENTE

Si la función viene dada por un gráfico, su dominio serán los valores de x en los que existe función en el gráfico, como vimos en el primer ejemplo de este punto.

→ p194: 1

→ p207: 6

→ p209: 21

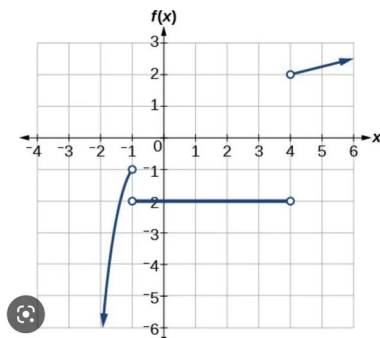
→ p211: 41 (si da tiempo)

→ Ejercicio resuelto en la web

4.- RECORRIDO O RANGO O IMAGEN

Son los valores de la variable dependiente “ y ” que toma la función. Se nombra $R(f)$ o $\text{Im } f$.

Por ejemplo:



$$\rightarrow \text{Im } f =]-\infty, -1[\cup]2, \infty[$$

5.- PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES Y SIGNO DE UNA FUNCIÓN (p195)

- Los puntos de corte con el eje Y (eje de ordenadas) tienen que cumplir que $x=0$, por lo tanto, serán de la forma $(0, y)$.

- Los puntos de corte con el eje X (eje de abscisas) tienen que cumplir que $y=0$, por lo tanto, serán de la forma $(x, 0)$.

Ejemplo: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$

- Puntos de corte con el eje Y: $x=0 \rightarrow f(0) = 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 2 = 2 \rightarrow (0, 2)$

- Puntos de corte con el eje X: $y=0 \rightarrow 0 = 2x^3 - 5x^2 + x + 2 \rightarrow$

$$\rightarrow (x-1) \cdot (x-2) \cdot (2x+1) = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$$

$$x = 2 \rightarrow (2, 0)$$

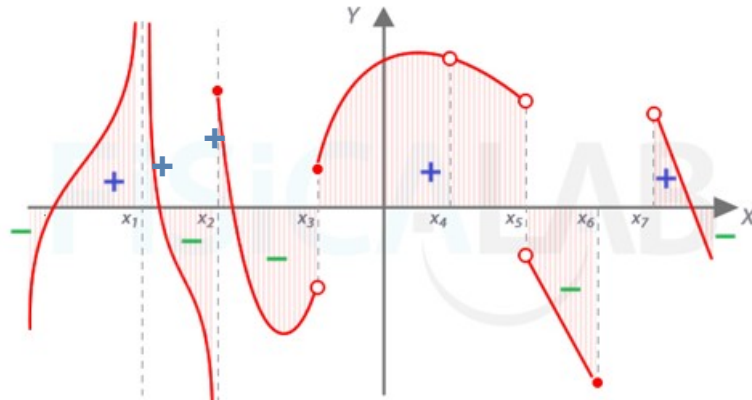
$$x = -\frac{1}{2} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

- El signo de la función se refiere a si el valor de la función (y), es positivo o negativo:

- Si la función está por encima del eje X (valores de y positivos), el signo de la función es positivo.

- Si la función está por debajo del eje X (valores de y negativos), el signo de la función es negativo.

- Una función puede cambiar de signo en los puntos de corte con el eje X (o en los puntos donde presenta discontinuidades).

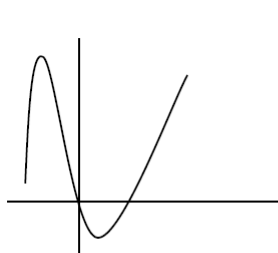


→ Ejercicio resuelto p195: 2 (cálculo de signo)

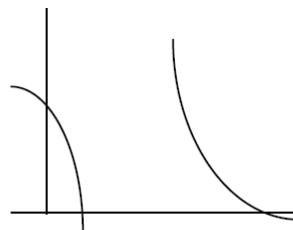
→ p195: 1, 2, 3

6.- CONTINUIDAD (p196)

- La idea de una función continua es que “puede dibujarse de un solo trazo”:

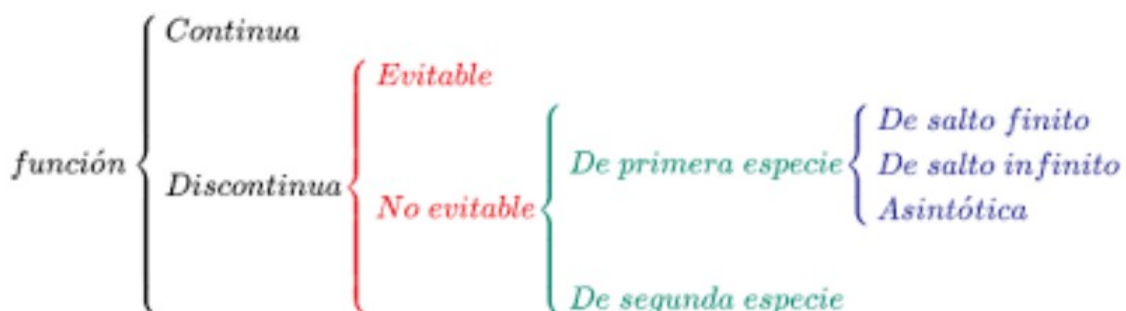


CONTINUA



DISCONTINUA

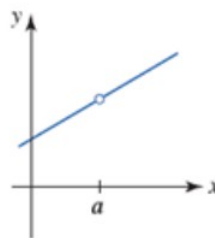
- TIPOS DE DISCONTINUIDADES:



EVITABLE:

En la función sólo “falla” un punto, que “no está donde debería estar”.

Más formalmente, si nos aproximamos al punto por la derecha y por la izquierda, nos aproximamos a un valor que no es el de la función. En este caso, la función sería continua sin más que cambiar la definición de la función en el punto que nos da problemas.



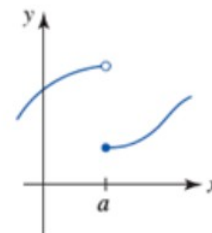
c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
pero $f(a)$ no está
definida



d) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe,
 $f(a)$ está definida,
pero $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

DE SALTO FINITO:

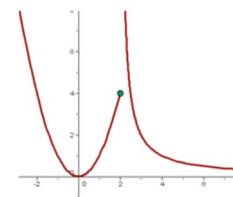
En un punto, la función tiene dos ramas diferentes a derecha e izquierda del punto. Estas ramas se aproximan a valores distintos (pero finitos) para cada lado. El punto de discontinuidad puede estar en una cualquiera de las ramas o incluso fuera de ellas. Da lo mismo, la discontinuidad sigue siendo de salto finito.



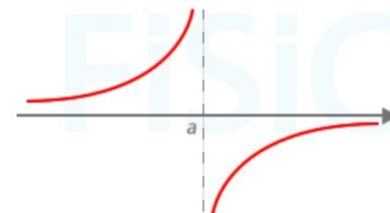
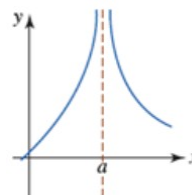
b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe
pero $f(a)$ está
definida

DE SALTO INFINITO:

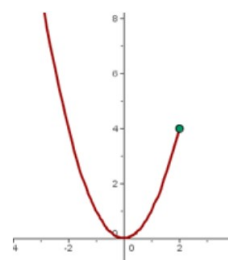
Como en salto finito, en un punto la función tiene dos ramas diferentes. Pero en este caso, al menos una de las dos ramas (posiblemente las dos) se hace inmensamente grande o inmensamente negativa (en términos más informales “se va a infinito”).



Si ambas ramas tienen a infinito (positivo o negativo), serían ASINTÓTICAS.

**DE SEGUNDA ESPECIE O ESENCIAL:**

Una discontinuidad es esencial o de segunda especie si no existe alguno de los límites laterales en $x=a$.



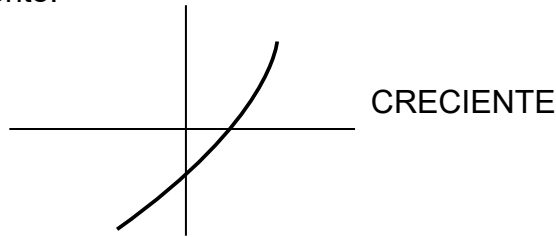
→ Ejercicio resuelto p206: 2

→ p210: 32, 34

7.- MONOTONÍA. MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS (p197, 198, 199)

- Dada una función, puede cumplirse que al aumentar el valor de x , los valores que va tomando la función $f(x)$ sean cada vez más grandes. En este caso diremos que la función es creciente.

- Gráficamente:



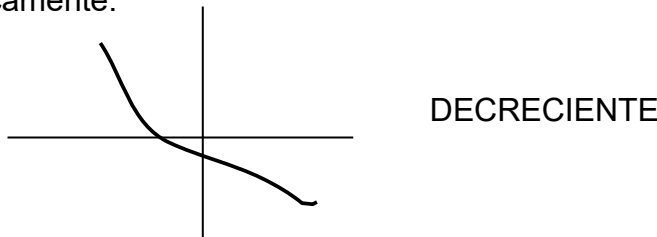
- Definición: Una función f es **estrictamente creciente** en un intervalo de su dominio si para cualquier x_1 y x_2 de este intervalo se verifica que:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- Definición: Una función f es **creciente** en un intervalo de su dominio si para cualquier x_1 y x_2 de este intervalo se verifica que: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

- Por otra parte, puede cumplirse que al aumentar el valor de x , los valores que va tomando la función $f(x)$ sean cada vez más pequeños. En este caso diremos que la función es decreciente.

- Gráficamente:



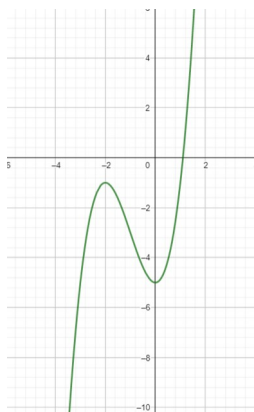
- Definición: Una función f es **estrictamente decreciente** en un intervalo de su dominio si para cualquier x_1 y x_2 de este intervalo se verifica que:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

- Definición: Una función f es **decreciente** en un intervalo de su dominio si para cualquier x_1 y x_2 de este intervalo se verifica que: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

- Los intervalos de monotonía siempre se indican con los intervalos de x donde la función crece o decrece.

- Ejemplo:



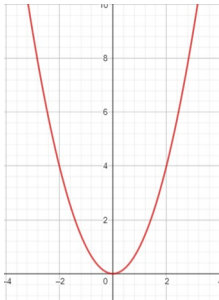
Creciente : $] -\infty, -2 [\cup] 0, \infty [$

Decreciente : $] -2, 0 [$

- Los máximos y mínimos relativos (o locales) son los puntos donde la función cambia su monotonía:

- Definición: Una función f tiene un **mínimo relativo o local** en x_0 si existe un entorno de centro $x_0, E_r(x_0)$, tal que, para cualquier x que pertenezca a este entorno, se verifica que $f(x) \geq f(x_0) \rightarrow x_0$ mínim local $\Leftrightarrow \exists E_r(x_0) / \forall x \in E_r(x_0) \quad f(x) \geq f(x_0)$

- Definición: Una función f tiene un **mínimo absoluto** en x_0 si para cualquier x del Dom f , se verifica que $f(x) \geq f(x_0) \rightarrow x_0$ mínim absolut $\Leftrightarrow \forall x \in Df \quad f(x) \geq f(x_0)$



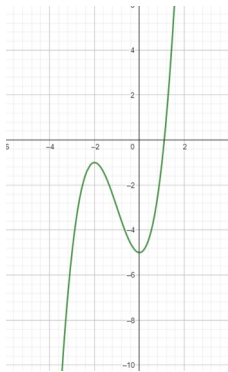
La función $f(x) = x^2$ tiene:

- un mínimo relativo en $x=0$ porque el valor de la función para cualquier valor de x en el entorno de $x=0$ se cumple que $f(x) > f(0)$,
- y también tiene un mínimo absoluto en $x=0$ porque $f(x)$ siempre es mayor que $f(0)$ para cualquier valor del Dom f

- Definición: Una función f tiene un **máximo relativo o local** en x_0 si existe un entorno de centro $x_0, E_r(x_0)$, tal que, para cualquier x que pertenezca a este entorno, se verifica que $f(x) \leq f(x_0) \rightarrow x_0$ màxim local $\Leftrightarrow \exists E_r(x_0) / \forall x \in E_r(x_0) \quad f(x) \leq f(x_0)$

- Definición: Una función f tiene un **máximo absoluto** en x_0 si para cualquier x del Dom f , se verifica que $f(x) \leq f(x_0) \rightarrow x_0$ màxim absolut $\Leftrightarrow \forall x \in Df \quad f(x) \leq f(x_0)$

- Ejemplo:



En el ejemplo anterior,

- En $x = -2$ la función tiene un máximo relativo
- En $x = 0$ la función tiene un mínimo relativo

→ Ej resuelto p197

→ Ej resuelto p199: 1, 2

→ Ej p197: 1

→ Ej p199: 5

8.- TASA DE VARIACIÓN MEDIA T.V.M. (p198)

- Se utiliza para medir la rapidez de la variación de una función en un intervalo:

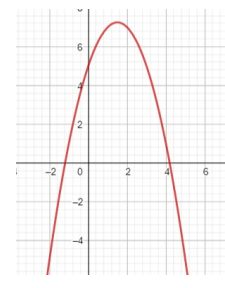
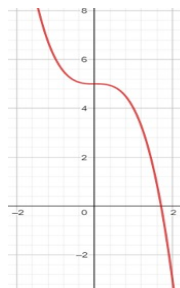
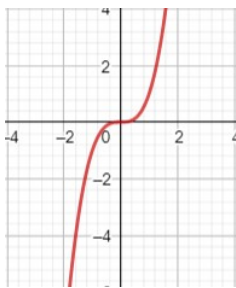
$$\text{T.V.M. } [a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Sólo se utilizan los valores de la función en los extremos del intervalo, así que lo que ocurra dentro del intervalo no se va a reflejar en la T.V.M. Si en un caso la función dentro del intervalo siempre es creciente y sin grandes cambios, la T.V.M. va a ser la misma que en otro caso en el que los valores de los extremos son los mismos, pero dentro del intervalo presenta grandes fluctuaciones.

- Ej resuelto p198: 1, 2
- Ej p198: 2, 3, 4
- Ej p208: 17, 18
- Ej p209: 20
- Ej p210: 27

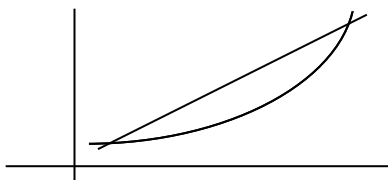
9.- INTERVALOS DE CURVATURA. PUNTOS DE INFLEXIÓN

Una función puede ser creciente o decreciente entre dos puntos a y b, pero puede presentarse de diferentes formas:



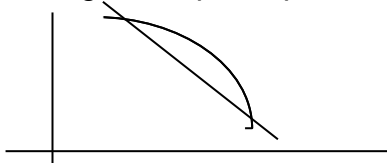
Estas funciones tienen diferente curvatura.

- Diremos que una curva es **cóncava** en un intervalo $]a, b[$ cuando su gráfico queda por debajo de la recta que une las imágenes de a y b:



CÓNCAVA

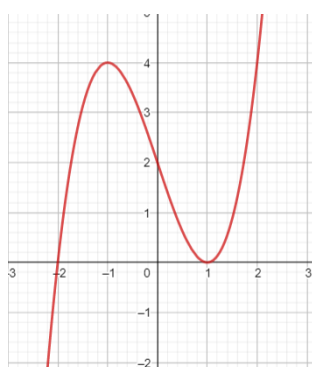
- Si el gráfico queda por arriba de la recta, se dice que es **convexa**:



CONVEXA

- Los puntos en los que la función cambia de curvatura (de cóncava a convexa o al revés) se llaman **puntos de inflexión**.

Ejemplo:



En $x=0$, la función presenta un punto de inflexión:

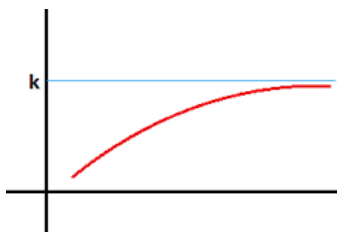
- es convexa en $] -\infty, 0 [$
- es cóncava en $] 0, +\infty [$

10.- TENDENCIA (p200)

La tendencia de una función define su comportamiento a largo plazo, indicando hacia qué valor se aproxima la variable dependiente (y) cuando la independiente (x) se vuelve muy grande (tiende a $+\infty$), muy pequeña (tiende a $-\infty$) o se acerca a un punto específico. Ese valor al que tiende la función se llama límite.

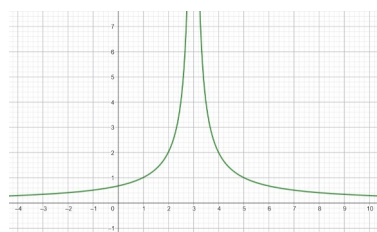
Permite predecir el comportamiento de la gráfica fuera del intervalo estudiado.

Ejemplos:



Cuando x tiende a $+\infty$,
la función tiende a k

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$$



Cuando x tiende a 3
la función tiende a $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$$

→ Ej resuelto p200: 1, 2

→ Ej p201: 1

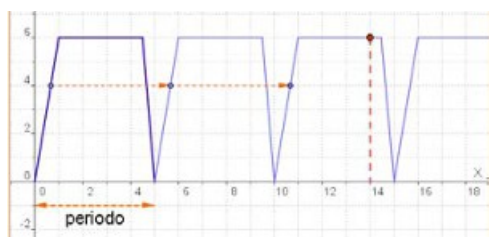
11.- PERIODICIDAD (p201)

Las funciones periódicas repiten su comportamiento cada vez que la variable independiente (x) recorre cierto intervalo. A ese intervalo tras el cual vuelve a repetirse, se le llama Periodo, y se nombra con la letra T.

- Definición: Una función $f(x)$ es **periódica de periodo T** si existe un número real positivo T tal que, $\forall x \in D \ f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) = f(x+kT) = f(x)$.

Son periódicas, por ejemplo, las funciones trigonométricas, el movimiento de un péndulo, la posición de las agujas de un reloj en relación al origen, etc.

Ejemplo: El cubo rojo de Aquarama se llena y se vacía siguiendo el esquema de una función periódica:



- Al principio está vacío.
- Comienza a llenarse y tarda 1 minuto en hacerlo.
- Se mantiene lleno durante 3,5 minutos.
- Entonces se vuelca y tarda 30 segundos en vaciarse.

Conociendo el periodo podemos saber en qué situación está el cubo, por ejemplo, a los 38 minutos aunque ese valor no aparezca en la gráfica:

Como $T = 5\text{min}$ → $38 \left| \begin{array}{l} 5 \\ 3 \end{array} \right. \begin{array}{l} 7 \\ 7 \end{array}$ → Han pasado 7 periodos o ciclos completos y estamos en el minuto 3 del periodo

$f(x) = f(x+T) = f(x+kT) \rightarrow f(38) = f(3+7 \cdot 5) = f(3) = 6 \rightarrow$ el cubo está lleno y faltan 1,5 min para que vuelque

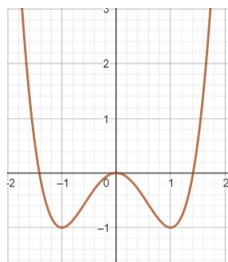
- Ej resuelto p201
- Ej p201: 2
- Ej p208: 16
- Ej p210: 35
- Ej p211: 39

12.- SIMETRÍA

Una función es simétrica es aquella que presenta una correspondencia exacta en forma y posición (como si se reflejaran en un espejo) respecto a un eje o un punto.

- Simetría par. La simetría es respecto al eje de ordenadas (eje Y). Una función $f(x)$ es simétrica respecto al eje de ordenadas si $\forall x \in D \ f(-x)=f(x)$.

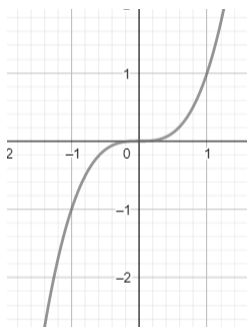
Ejemplo:



$$f(x)=x^4-2x^2 \rightarrow f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=f(x) \rightarrow f \text{ es par}$$

- Simetría impar. La simetría es respecto al origen de coordenadas (punto (0,0)). Una función $f(x)$ es simétrica respecto al origen de coordenadas si $\forall x \in D \ f(-x)=-f(x)$.

Ejemplo:



$$f(x)=x^3 \rightarrow f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \rightarrow f \text{ es impar}$$