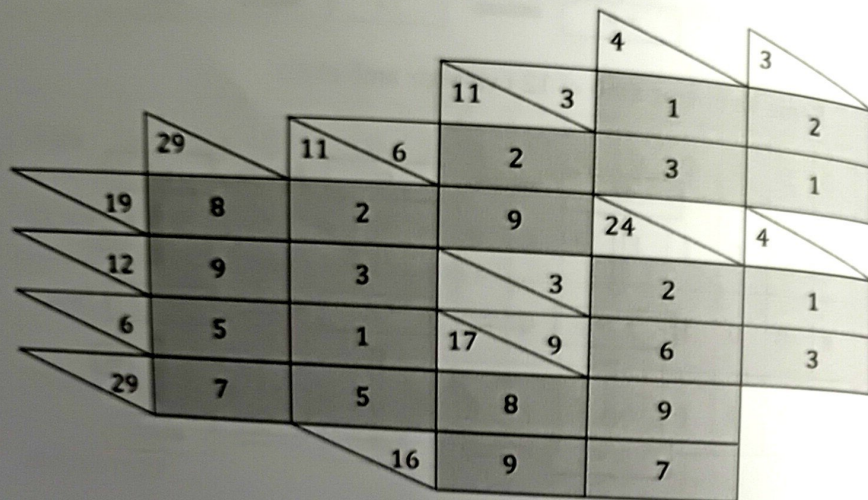


PROBLEMES DE NIVELL A

PROBLEMES PER A PRACTICAR

1. NOMBRES

Solució:



DIFICULTAT: 20

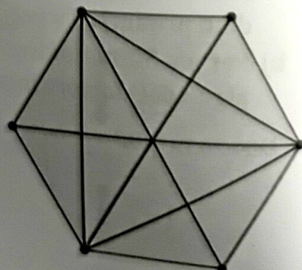
2. LA PART DE L'HEXÀGON

Solució: $\frac{1}{2}$.

Podem dividir l'hexàgon en 12 triangles iguals, de manera que visualment observem que dins del triangle format per la unió dels vèrtexs imparells s'hi troben 6 d'ells. Aleshores:

$$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

DIFICULTAT: 20



3. PER A VEURE'NS MILLOR

Solució: 5 xiques no porten ulleres.

Com que el 60% de 25 alumnes són 15, vol dir que hi ha 15 xics i 10 xiques. Entre els xics, una tercera part porta ulleres i, com que $\frac{1}{3} \cdot 15 = 5$, són 5 els xics que porten ulleres.

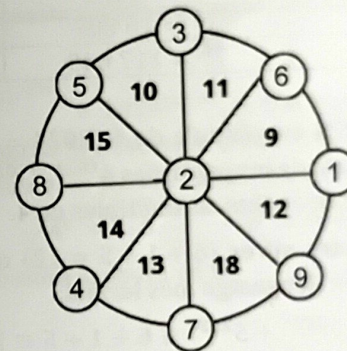
Sabem que el nombre de xiques amb ulleres és el mateix que el de xics amb ulleres. Aleshores, les xiques que no en duen són $10 - 5 = 5$.

DIFICULTAT: 20

4. LA RODA

Solució:

Una de les solucions possibles és la següent:



$$11 + 9 + 12 + 18 + 13 + 14 + 15 + 10 = 102$$

En aquesta suma el nombre central apareixerà vuit vegades, mentre que els nombres sobre la circumferència sols hi apareixeran dues vegades. A partir d'eixa consideració es pot determinar que el nombre en el centre ha de ser el 2.

DIFICULTAT: 20

5. LA GRANJA FRACCIONÀRIA

Solució: a) $\frac{1}{8}$; b) 240 animals.

a) Una quarta part són porcs i, d'aquests, la meitat són ibèrics; per tant,

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \text{ del total d'animals són porcs ibèrics.}$$

- b) Si hi ha 30 porcs ibèrics, això vol dir que $1/8$ del total d'animals són 30. Per tant, el total d'animals (és a dir, $8/8$) seran $8 \cdot 30 = 240$.

DIFICULTAT: 20

6. LES UNITATS

Solució: 2.

A la següent taula es mostren les primeres potències de 4, 7 i 5. Observem que les xifres de les unitats es repeteixen cada dos termes en el cas del 4 i cada quatre en el cas del 7, mentre que en el cas del 5 sempre són iguals.

$4^1 = 4$	$7^1 = 7$	$5^1 = 5$
$4^2 = 16$	$7^2 = 49$	$5^2 = 25$
$4^3 = 64$	$7^3 = 343$	$5^3 = 125$
$4^4 = 256$	$7^4 = 2401$	$5^4 = 625$
$4^5 = 1024$	$7^5 = 16\,807$	$5^5 = 3125$
$4^6 = 4096$	$7^6 = 117\,649$	$5^6 = 15\,625$

Ara bé, com que 2024 és múltiple de 4 ($2024 = 4 \cdot 506$), podem deduir les xifres de les unitats de les potències 4^{2024} , 7^{2024} i 5^{2024} , que seran 6, 1 i 5, ja que coincideixen en tots els múltiples de 4.

Operant amb aquestes xifres ($6 + 1 + 5 = 12$) obtenim el resultat (12 acaba en 2). Escrit en llenguatge més formal:

$$4^{2024} + 7^{2024} + 5^{2024} \equiv 6 + 1 + 5 \equiv 2 \pmod{10}$$

DIFICULTAT: 20

7. NOTES

Solució: 10 persones.

En 2 ESO A hi ha 15 alumnes amb una nota mitjana de 6,4: $6,4 \cdot 15 = 96$.

En 2 ESO B hi ha x alumnes amb una nota mitjana de 7,9: $7,9 \cdot x$

Com sabem que quan s'agrupen les notes la mitjana és 7:

$$96 + 7,9x = 7 \cdot (15 + x) \rightarrow 96 + 7,9x = 105 + 7x \rightarrow 0,9x = 9$$

$$x = 10 \text{ alumnes}$$

DIFICULTAT: 30

8. EL MEU VEÍ

Solució: Tomàs viu al costat de Júlia; Júlia - Tomàs - Susanna - Pere.

Com que Tomàs viu al costat de Susanna però no és veí de Pere, suposem que a l'altre costat de Tomàs no viu ningú. En eixe cas, Pere i Júlia haurien de viure a l'altre costat de Susanna i, per tant, un al costat de l'altre. Però com que ens indiquen que Pere no és veí de Júlia, hem arribat a una contradicció.

Per tant, a l'altre costat de Tomàs ha de viure necessàriament Júlia. Com que Pere no pot anar al seu costat, ha de ser veí de Susanna, i la distribució final queda: Júlia - Tomàs - Susanna - Pere.

DIFICULTAT: 20

9. 2024

Solució: 6.

Com que $2024^{2024^{2024 \cdot 2024}} = 2024^{\text{parell}}$, tenim una potència parella d'un nombre acabat en quatre. Si observem el patró de les primeres potències de 4, observem que totes les parelles acaben en 6:

$$\dots 4^1 = \dots 4 \quad \dots 4^2 = \dots 6 \quad \dots 4^3 = \dots 4 \quad \dots 4^4 = \dots 6$$

Per tant, el nostre nombre acabarà en 6.

DIFICULTAT: 20

10. L'APOSTA

Solució:

Bec el primer got d'aigua, i el pose cap per avall sobre la tassa de cafè.

Ara tinc tot el temps que vulga per beure'n els altres dos, ja que sense tocar el meu got no es pot agafar la tassa.

DIFICULTAT: 10

11. PASSEN ELS ANYS

Solució: 8 anys.

Any	1977	1978	1979
Lluís	20	21	22
Germà 1	6	7	8
Germà 2	7	8	9
Diferència	7	6	5

Clarament, s'aprecia que cada any que passa, la diferència disminueix en una unitat. Per tant, han de transcórrer 8 anys a partir de 1977.

DIFICULTAT: 20

12. NOMBRES CONDICIONATS

Solució: 24.

La condició 1 implica que a val 4 o 5.

La condició 2 implica que d és 0 o 5.

La condició 3 implica que la parella (b, c) és alguna de les sis parelles $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(4, 6)$, $(5, 6)$.

Per tant, hi ha $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$ nombres N .

A la següent taula s'arreglen les 24 possibilitats:

a	b	c	d	N
4	3	4	0	4340
4	3	4	5	4345
4	3	5	0	4350
4	3	5	5	4355
4	3	6	0	4360
4	3	6	5	4365
4	4	5	0	4450
4	4	5	5	4455
4	4	6	0	4460
4	4	6	5	4465
4	5	6	0	4560

4	5	6	5	4565
5	3	4	0	5340
5	3	4	5	5345
5	3	5	0	5350
5	3	5	5	5355
5	3	6	0	5360
5	3	6	5	5365
5	4	5	0	5450
5	4	5	5	5455
5	4	6	0	5460
5	4	6	5	5465
5	5	6	0	5560
5	5	6	5	5565

DIFICULTAT: 20

13. SIS XIFRES

Solució: El nombre és 324 561.

L'enunciat afirma que:

- bcd és múltiple de 5. Com que el 0 no està entre els dígit disponibles i per tal que un nombre siga divisible per 5 ha d'acabar en 0 o 5, $d = 5$.
- def és múltiple d'11. Per tant, $5ef$ és múltiple d'11. Ha de passar que $5 + f = e$ i amb aquests dígit l'única possibilitat és $e = 6$ i $f = 1$.
- cde és múltiple de 3, és a dir, $c56$ és múltiple de 3. Ha de passar que $5 + 6 + c$ siga múltiple de 3 i, tenint en compte les xifres que hi queden, l'única possibilitat és $c = 4$.
- abc és múltiple de 4. Per tant, $ab4$ és múltiple de 4. Així $b = 2$ perquè 24 és múltiple de 4 però 34 no ho és. Finalment ens queda que $a = 3$.

El nombre és 324 561.

DIFICULTAT: 20

14. TRABASETS

Solució: No. Hi ha 220 sets, quantitat que no és múltiple de 7.

Tot i que es podrien comptar un a un, ací va una solució que no requerirà de tot el temps de la prova per a trobar-la:

Primer, vegem quants sets hi ha en la primera centena:

- Nombres acabats en set (posició d'unitats): 77, 87 i 97. N'hi ha un total de 3.

• Nombres que tenen com a desena un set: 77, 78 i 79. N'hi ha 3.
El 77 està en els dos grups, però és perquè té dos sets. En total en portem 6.
En la següent centena passarà alguna cosa semblant:

- Nombres acabats en set (posició d'unitats): 107, 117, ..., 197. En són 10.
 - Nombres que tenen com a desena un set: 170, 171, ..., 179. També 10.
- El 177 està en tots dos grups, però és perquè té dos sets.
En total, 20 sets.

En les següents centenes passarà el mateix, ja que no hi apareix cap 7 adicional:

- Tercera centena (200-299) → 20 sets.
- Quarta centena (300-399) → 20 sets.
- Cinquena centena (400-499) → 20 sets.
- Sisena centena (500-599) → 20 sets.
- Setena centena (600-699) → 20 sets.

En total, $20 \cdot 5 = 100$ sets.

Finalment, comptem els sets en la centena que comença per set:

- Nombres acabats en set (posició d'unitats): 707, 717, ..., 777. N'hi ha un total de 8.
- Nombres que tenen com a desena un set: 770, 771, 772, ..., 777. N'hi ha un total de 8.
- Nombres que tenen com a centena un set: 700, 701, 702, ..., 777. N'hi ha un total de 78.

Hi ha nombres que estan en diversos grups, però estan comptats més d'una vegada perquè tenen més d'un set. En total, $8 + 8 + 78 = 94$ sets.

Sumem tots els sets comptats fins ara: $6 + 20 + 100 + 94 = 220$, que no és múltiple de set, perquè $220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$.

DIFICULTAT: 30

15. UN DÒMINO AMB MOLTES PECES

Solució: 91 peces.

Si triem un nombre qualsevol, per exemple el 5, apareixerà juntament amb els nombres del 0 al 12; és a dir, el 5 apareix en 13 fitxes.

Si repetim el procés per als 13 nombres possibles, ens eixiran $13 \cdot 13 = 169$ combinacions de dos nombres. Però d'aquesta forma, menys les dobles, totes les fitxes han sigut comptades dues vegades (per exemple, el 5 amb el 3 i després el 3 amb el 5).

De les 169, no dobles hi ha $169 - 13 = 156$ fitxes.

En total, el dòmino tindrà $13 + 156 : 2 = 13 + 78 = 91$ peces.

La forma per a anotar-les totes pot ser la següent:

0/0				
0/1	1/1			
0/2	1/2	2/2		
0/3	1/3	2/3	3/3	
0/4	1/4	2/4	3/4	4/4
.....				

DIFICULTAT: 30

16. TRES TRIANGLES

Solució: $AFG < ACG < ADG$.

Com que els triangles tenen la mateixa base, el que determina l'àrea és l'altura. Aleshores, de menor a major, l'ordre és:

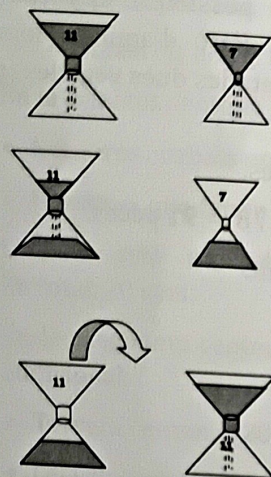
$AFG < ACG < ADG$

DIFICULTAT: 20



17. UN OU PERFECTE

Solució: Girem els dos rellotges alhora. Començarem a comptar el temps quan acabe el de 7 min. En aquest moment, quedaran 4 min en el rellotge d'11 min. Quan passen, començarem de nou el rellotge d'11 min, per la qual cosa tindrem $4 + 11 = 15$ min.



Posem a funcionar els dos rellotges de sorra alhora.

Quan s'acaba la sorra del rellotge de 7 minuts, en el d'11 minuts encara queden 4 minuts. Així que ací comencem a comptar els 15 minuts necessaris per a coure l'ou.

Quan s'acaba de buidar la sorra del rellotge d'11 minuts, hauran transcorregut els primers 4 minuts de cocció de l'ou i per a completar els 15 que són necessaris, només tindrem que donar la volta a aquest mateix rellotge per tal que es buide i mesure els 11 minuts restants.

Per a acabar més prompte, es pot fer el següent: S'inicien els dos. Quan acaba el de 7 minuts es gira. Quan acaba el d'11 minuts, hauran transcorregut 4 minuts més i en el rellotge de 7 minuts hi haurà a la part de baix la sorra corresponent a 4 minuts. Es gira aquest rellotge i quan acaba hauran passat en total $7 + 4 + 4 = 15$ minuts.

DIFICULTAT: 10

18. EL NOMBRE AMAGAT

Solució: 326.

Siguen x la xifra de les centenes, y la de les desenes i z la de les unitats. El nombre serà xyz .

Amb la informació que tenim, obtenim el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ z = 2x \\ 100x + 10y + z + 297 = 100z + 10y + x \end{cases}$$

Simplificant l'última equació, obtenim:

$$99x - 99z + 297 = 0 \rightarrow x - z + 3 = 0$$

Substituïm z per $2x$ i obtenim $x - 2x + 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow z = 6$

Substituïm en la primera equació: $3 + y + 6 = 11 \rightarrow y = 2$

El nombre que busquem serà 326.

DIFICULTAT: 30

19. EL PASSEIG

Solució: 1248 m.

Anomenem n al nombre de passos que dona la meua germana xicoteta. Aleshores, jo hauré donat $n - 1200$ passos.

Distància recorreguda per la meua germana: $40n$ cm

Distància recorreguda per mi: $65 \cdot (n - 1200)$ cm

Han de coincidir:

$$40n = 65 \cdot (n - 1200) \rightarrow 65 \cdot 1200 = 25n \rightarrow n = 3120$$

Lavors, hem recorregut $40n = 40 \cdot 3120 = 124800$ cm = 1248 m

DIFICULTAT: 20

20. EL TORNEIG DE FUTBOL

Solució: Hi ha 40 equips inscrits al torneig.

Resumim en una taula el nombre de partits que se celebrarien si la inscripció fora de dos, tres, quatre o cinc equips.

Si en foren dos, A i B, se celebrarien dos partits entre ells.

Si en tres, A, B i C, se celebrarien dos partits entre A i B, dos entre B i C, i dos entre A i C; és a dir, sis partits.

Si en foren quatre, A, B, C i D, se celebrarien dos partits entre A i B, dos entre A i C, dos entre A i D, dos entre B i C, dos entre B i D, i dos entre C i D; és a dir, dotze partits.

Si en foren cinc, A, B, C, D i E, se celebrarien dos partits entre A i B, dos entre A i C, dos entre A i D, dos entre A i E, dos entre B i C, dos entre B i D, dos entre B i E, dos entre C i D, dos entre C i E, i dos entre D i E; és a dir, vint partits.

Així, la taula que s'obté és:

Nombre d'equips	2	3	4	5
Nombre de partits	$2 = 2 \cdot 1$	$6 = 3 \cdot 2$	$12 = 4 \cdot 3$	$20 = 5 \cdot 4$

Si n és el nombre d'equips inscrits, el nombre de partits serà $n \cdot (n - 1)$.

Tindrem l'equació:

$$n \cdot (n - 1) = 1560 \rightarrow n^2 - n - 1560 = 0 \rightarrow$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 6240}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{6241}}{2} = \frac{1 \pm 79}{2}$$

Les dues solucions possibles són: $n = 40$ i $n = -39$.
Per tant, el nombre de equips inscrits serà 40.

Un raonament més directe per a determinar el nombre total de partits consisteix a observar que cada un dels n equips jugarà dues vegades contra cada un dels altres $n - 1$ equips, el que fa un total de $2 \cdot n \cdot (n - 1)$ partits. Com que d'aquesta manera s'haurà comptat dues vegades cada partit (una per cada un dels dos equips), caldrà dividir entre dos l'expressió anterior:

Tindrem: $\frac{2 \cdot n \cdot (n - 1)}{2} = n \cdot (n - 1)$ partits.

DIFICULTAT: 20

21. L'ERUPCIÓ

Solució: 47 dies.

Coneguda la mitjana aritmètica obtenim la següent equació:

$$\frac{24 + 47 + 56 + 66 + 82 + 84 + x}{7} = 58$$

$$\frac{359 + x}{7} = 58 \rightarrow 359 + x = 7 \cdot 58$$

$$359 + x = 406 \rightarrow x = 406 - 359$$

$$x = 47 \text{ dies}$$

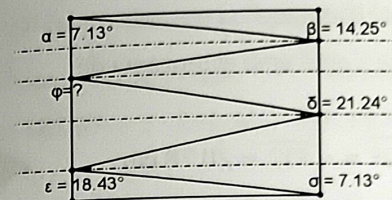
DIFICULTAT: 10

22. L'ANGLE DESCONEGUT

Solució: $17,06^\circ = 17^\circ 3' 36''$.

MÈTODE 1:

Si tracem des de cada vèrtex una paral·lela a la base del rectangle com es veu a la imatge, podem fer servir que una recta que talla dues paral·leles defineix angles iguals.



Aplicant-ho, l'angle β es pot descompondre en $7,13^\circ + 7,12^\circ = 14,25^\circ$.

$7,12^\circ$ serà la part superior de l'angle que busquem.

Si ara actuem igual, però de baix a dalt:

$$\varepsilon = 7,13^\circ + 11,30^\circ = 18,43^\circ$$

$$\delta = 11,30^\circ + 9,94^\circ = 21,24^\circ$$

$9,94^\circ$ serà la part inferior de l'angle cercat.

L'angle que busquem mesurarà $7,12^\circ + 9,94^\circ = 17,06^\circ$

MÈTODE 2:

La suma dels angles de la dreta ha de coincidir amb la suma dels de l'esquerra.

Sumem els coneguts:

$$\text{A la dreta } 14,25^\circ + 21,24^\circ + 7,13^\circ = 42,62^\circ$$

$$\text{A l'esquerra } 7,13^\circ + 18,43^\circ = 25,56^\circ$$

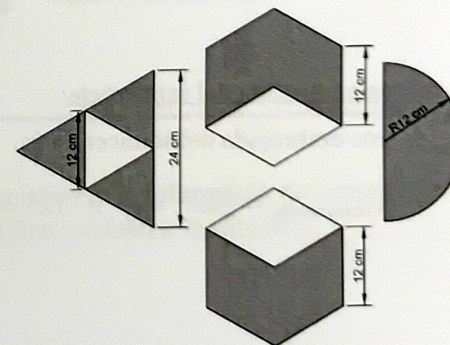
$$\text{L'angle que busquem serà } \varphi = 42,62^\circ - 25,56^\circ = 17,06^\circ$$

DIFICULTAT: 20

23. LA FIGURA

Solució: $911,98 \text{ cm}^2$.

La figura s'ha creat amb els següents polígons regulars:



Àrea ombrejada del triangle:

L'altura del triangle s'obté amb el teorema de Pitàgores:

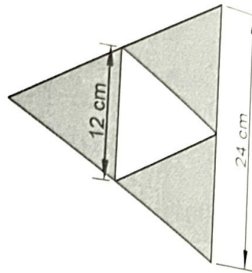
$$h = \sqrt{24^2 - 12^2} = \sqrt{432} \approx 20,78 \text{ cm}$$

L'àrea del triangle de base 24 cm i altura 20,78 cm és:

$$A \approx \frac{24 \cdot 20,78}{2} = 249,42 \text{ cm}^2$$

El triangle interior és 1/4 de l'àrea calculada. Per tant l'àrea ombrejada és 3/4 de l'àrea del triangle de base 24 cm i altura 20,78 cm:

$$A_{\text{ombrejada del triangle}} \approx \frac{3}{4} \cdot 249,42 = 187,07 \text{ cm}^2$$



Àrea ombrejada de l'hexàgon:

Per a calcular l'àrea de l'hexàgon necessitem calcular l'apotema. Aplicarem el teorema de Pitàgores:

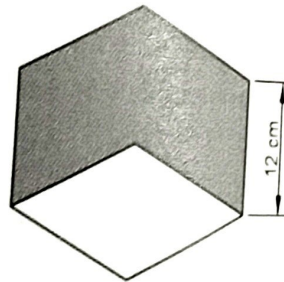
$$h = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} \approx 10,39 \text{ cm}$$

L'àrea de l'hexàgon és, una vegada calculat el perímetre $P = 12 \cdot 6 = 72 \text{ cm}$:

$$A = \frac{P \cdot a}{2} \approx \frac{72 \cdot 10,39}{2} = 374,04 \text{ cm}^2$$

L'àrea ombrejada de l'hexàgon és 4/6 de l'àrea total de l'hexàgon:

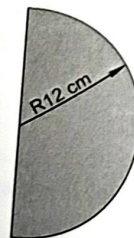
$$A_{\text{ombrejada de l'hexàgon}} \approx \frac{4}{6} \cdot 374,04 = 249,36 \text{ cm}^2$$



Àrea ombrejada del semicercle:

L'àrea ombrejada del semicercle és:

$$A_{\text{semicercle}} = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 12^2 = 72\pi \approx 226,19 \text{ cm}^2$$

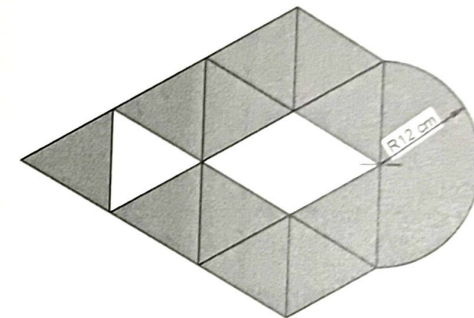


Finalment, l'àrea total ombrejada de la figura és:

$$A_{\text{ombrejada}} = A_{\text{ombrejada del triangle}} + 2 \cdot A_{\text{ombrejada de l'hexàgon}} + A_{\text{semicercle}} \approx 187,07 + 2 \cdot 249,36 + 226,19 = 911,98 \text{ cm}^2$$

SOLUCIÓ ALTERNATIVA:

Dividim la figura en triangles equilàters:



Calculem l'àrea d'un dels triangles equilàters, calculant prèviament l'altura d'aquest triangle:

$$h = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} \approx 10,39 \text{ cm}$$

L'àrea d'un dels triangles equilàters és:

$$A_{\text{triangle}} \approx \frac{12 \cdot 10,39}{2} = 62,34 \text{ cm}^2$$

La figura està formada per 11 triangles equilàters i un semicercle:

$$A \approx 11 \cdot 62,34 + 0,5 \cdot \pi \cdot 12^2 \approx 911,93 \text{ cm}^2$$

DIFICULTAT: 10

24. VEÏNS

Solució: L'alemany té un peix.

Per a resoldre el problema, organitzarem la informació de l'enunciat en una taula, que anirem emplenant fins a esbrinar la solució:

	1a.	2a.	3a.	4a.	5a.
COLOR CASA	GROC	BLAU	ROIG	VERD	BLANC
NACIONALITAT	NORUEC	DANÉS	BRITÀNIC	ALEMANY	SUEC
BEGUDA	AIGUA	TE	LLET	CAFÉ	CERVESA
COLOR PÈL	ROS	PÈL-ROIG	CASTANY	NEGRE	CANÓS
MASCOTA	GAT	CAVALL	PARDALS	PEIX	GOS

DIFICULTAT: 40

25. LA MÀQUINA

Solució: El resultat de la iteració número 2024 acaba en 1.

Vegem què passa amb les primeres xifres:

n	$3n$	$3n + 5$	----- a
1	3	8	8
8	24	29	9
29	87	92	2
92	276	281	1
281	843	848	8

Les terminacions es repeteixen cada quatre vegades, i com que $2024 = 4 \cdot 506$, després de repetir el procés 2024 vegades, haurem fet 506 cicles complets, de manera que la terminació que busquem és l'1.

DIFICULTAT: 20

PROBLEMES DE NIVELL B

PROBLEMES PER A PRACTICAR

1. QUANTITATS MOLT GRANS

Solució: $2024! > 2024^{1012}$.

Començarem per escriure el factorial de manera diferent. Agruparem en productes de dos factors equidistants des dels extrems:

$$2024! = (2024 \cdot 1) \cdot (2023 \cdot 2) \cdots (1014 \cdot 1011) \cdot (1013 \cdot 1012)$$

Són 1012 factors els que tenim entre parèntesis.

Si calculem el quocient dels dos valor de la balança:

$$\frac{2024!}{2024^{1012}} = \frac{2024 \cdot 1}{2024} \cdot \frac{2023 \cdot 2}{2024} \cdot \frac{2022 \cdot 3}{2024} \cdots \frac{1014 \cdot 1011}{2024} \cdot \frac{1013 \cdot 1012}{2024}$$

Observem que les 1012 fraccions que hi apareixen són, primer la unitat i la resta majors que la unitat i, per tant, el seu producte ho serà també.

Així deduïm que: $2024! > 2024^{1012}$.

DIFICULTAT: 40

2. CURIOSA SIMPLIFICACIÓ

Solució: a) Cinc qualssevol de les següents; b) $\frac{11}{11}, \frac{22}{22}, \frac{33}{33}, \frac{44}{44}, \frac{55}{55}, \frac{66}{66}$,

$$\frac{77}{77}, \frac{88}{88}, \frac{99}{99}, \frac{19}{95} = \frac{1}{5}, \frac{49}{98} = \frac{4}{8}, \frac{16}{64} = \frac{1}{4}, \frac{26}{65} = \frac{2}{5}.$$

Per a trobar altres nombres que complisquen aquesta propietat, necessitem generalitzar. Farem ús de l'àlgebra.

Trobarem per a quins valors a, b i c es compleix la igualtat: $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$,

on hem simplificat indegudament en llevar b en numerador i denominador.

Per a resoldre l'equació anterior l'expressarem així: