TEMA 16: PROBABILIDAD

1.- DEFINICIONES

Experimento aleatorio: Un experimento es un experimento aleatorio si puede dar lugar a varios resultados y de antemano no se puede saber cuál de ellos va a ocurrir, es decir, depende del azar. Por ejemplo, lanzar un dado, extraer una bola de una urna, etc.

Caso: Cada uno de los resultados que se pueden obtener en una experiencia aleatoria. En el ejemplo de lanzar un dado, habría 6 casos posibles: 1, 2, 3, 4, 5 ó 6.

Espacio muestral: Se llama espacio muestral de un experimento al conjunto de todos los resultados posibles de ese experimento. Se nombra con la letra **E** y sus elementos se indican entre llaves y separados por comas (como cualquier conjunto).
Por ejemplo: el espacio muestral del experimento aleatorio "lanzar un dado y anotar el resultado" sería E={1, 2, 3, 4, 5, 6}

Suceso: Cualquier subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo, A="sacar par"={2, 4, 6}, B="sacar más de 4"={5,6}.
Los casos también son sucesos (compuestos por un único elemento). Se llaman sucesos elementales.
Un suceso formado por más de un sucelo elemental se llama suceso compuesto.
Los sucesos vacíos o sin elementos, se llaman sucesos imposibles. Por ejemplo, C="sacar más de 7".
El espacio muestral también es un suceso, se llama suceso total o suceso seguro.

→ p202: 1, 2, 3

2.- PROBABILIDAD DE UN SUCESO DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO

La probabilidad de un suceso S se indica P[S] y es una función que asocia a cada suceso un número entre 0 y 1 que indica la facilidad de que ocurra ese suceso.

$$0 \leq P[S] \leq 1$$

Si la P[S] está cerca de 0 quiere decir que es poco probable que ocurra. Si la P[S] está cerca de 1 quiere decir que es muy probable.

PROPIEDADES:

- La probabilidad del suceso seguro es 1: $P[E] = 1$
- La probabilidad del suceso imposible es 0: $P[\emptyset] = 0$
- La probabilidad de cualquier otro suceso está entre 0 y 1: $0 < P[S] < 1$

- La probabilidad de un suceso compuesto es la suma de las probabilidades de sus sucesos elementales:
  Si S={s_1, s_2, s_3, …, s_n} → P[S] = P[s_1] + P[s_2] + P[s_3] + … + P[s_n]
- Las probabilidades de dos sucesos contrarios suman 1, pues entre los dos sucesos forman el espacio muestral:

$$P[S] + P[\overline{S}] = 1$$

3.- RELACIONES Y OPERACIONES CON SUCESOS

- **Unión** de dos sucesos A y B: A U B
Formado por todos los elementos de A y todos los elementos de B.
Se leería "que pase A **o** que pase B".

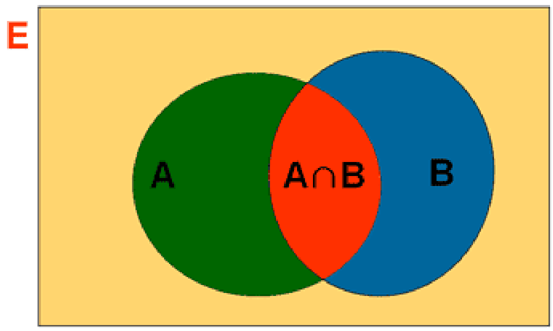
- Intersección de dos sucesos A y B: A ∩ B
Formado por todos los elementos que estén en A y en B a la vez.
Se leería "que pase A **y** que pase B".

- Dos sucesos son **incompatibles** si no tienen en común ningún suceso elemental, o sea, no pueden ocurrir simultáneamente. Si A y B son incompatibles, A ∩ B = Ø

- El suceso S' (o $\overline{S}$) se dice que es el suceso **contrario** de S si son incompatibles y entre los dos forman el espacio muestral.

$$S \cap \overline{S} = Ø \qquad \text{y} \qquad S \cup \overline{S} = E$$

- Se cumple siempre: P[A U B] = P[A] + P[B] – P[A ∩ B]



P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A∩B)

- Si los dos sucesos son incompatibles (A ∩ B = ∅), queda: P[AUB] = P[A] + P[B]

- Probabilidad condicionada: $P[A/B] = \dfrac{P[A \cap B]}{P[B]}$

→ p202: 10, 11, 13, 14, 16, 7

4.- CALCULAR LA PROBABILIDAD DE EXPERIENCIAS SIMPLES

- La experiencia aleatoria es **regular** si las probabilidades de los sucesos son previsibles. Por ejemplo, si tiramos un dado correcto (no trucado), si sacamos una bola de una bolsa donde sabemos cuántas bolas hay de cada color, etc. En ese caso podemos aplicar la Ley de Laplace, que dice:

$$P[S]=\frac{\textit{número de casos favorables}}{\textit{número de casos posibles}}$$

Por ejemplo, en el caso de tirar un dado, la probabilidad de sacar un 5 es P[5] = $\frac{1}{6}$

En el caso de una bolsa con 5 bolas rojas, 3 azules y 2 verdes, la probabilidad de sacar una roja es P[roja] = $\frac{3}{10}$.

EJEMPLO 1: En una baraja de 40 cartas, hallar: P(As), P(Oros)

La baraja es un instrumento regular y todas las cartas tienen la misma probabilidad de ser elegidas, por tanto podemos aplicar la Ley de Laplace.

$$P(As)=\frac{n^o\ ases}{n^o\ cartas\ totales}=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}=0{,}1 \qquad P(Oros)=\frac{n^o\ oros}{n^o\ cartas\ totales}=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

EJEMPLO 2: ¿Cuál es la probabilidad de obtener 12 al multiplicar los resultados de dos dados correctos?

Los objetos son regulares (dados correctos), pero no son equiprobables (no hay la misma probabilidad de que salga el 1 = 1.1 que el 12=2.6 = 3.4 = 4.3 = 6.2, por lo tanto, lo mejor es hacer una tabla y contar:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

$$P(\text{Producto dé } 12)=\frac{n^o\ casos\ favorables}{n^o\ casos\ posibles}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

EJEMPLO 3: ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados correctos la diferencia de sus puntuaciones sea 2?

Como en el ejemplo 2, rellenamos la tabla con las diferencias.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$$P(\text{Diferencia dé } 2)=\frac{n^o\ casos\ favorables}{n^o\ casos\ posibles}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

- La experiencia aleatoria es **irregular** si es imposible prever el valor de las probabilidades de los sucesos. Por ejemplo, un dado trucado, una bolsa con bolas de distintos colores de la que no sabemos la composición total, etc. Solo se pueden conocer de forma aproximada, experimentando. En este caso, cuanto más experiencias hagamos, más fiable será asignar la frecuencia relativa del experiemto a la probabilidad del suceso.
Por ejemplo, tiramos un dado trucado 100 veces. La cara 1 sale 12 veces, la 2 sale 53 veces, la 3 sale 11, la 4 sale 8, la 5 sale 4 y la 6 sale 12. La P[2] = $\frac{53}{100}$, mientras que la P[3] = $\frac{11}{100}$.

NOTA: Puedes practicar sobre la cantidad de veces que puede ser necesario repetir una experiencia aleatoria para que sea fiable asignar la frecuencia relativa a la probabilidad del suceso con el programa en Scratch que simula el lanzamiento de un dado y apunta el número de veces que sale cada cara, que tienes en la página web.

→ p202: 8

5.- PROBABILIDAD EN EXPERIENCIAS COMPUESTAS

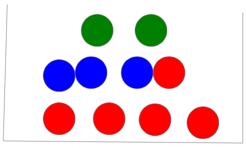
5.1.- Experiencias independientes.

Dos (o más) experiencias aleatorias son independientes si el resultado de cada una de ellas no influye en el resultado de las demás. Por ejemplo, lanzar un dado dos veces (lo que sale la primera vez no influye para nada en lo que pueda salir en la siguiente), sacar dos bolas de una urna habiendo devuelto la primera bola a la urna antes de sacar la segunda (a esto se le llama con reemplazo),...

En este caso, la probabilidad de que ocurra el suceso 1 (S_1) y el suceso 2 (S_2) y el S_3, etc, es:

$$P[S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } S_3 \text{ y } ...] = P[S_1] \cdot P[S_2] \cdot P[S_3] \cdot \ldots$$

Por ejemplo: Tenemos una urna con 5 bolas rojas, 3 azules y 2 verdes. Sacamos una bola. Anotamos su color y la devolvemos a la urna. Sacamos una segunda bola.



- ¿Cuál es la probabilidad de que saquemos las dos bolas verdes?

$$P[\text{verde y verde}] = P[1^{a} \text{ verde}] \cdot P[2^{a} \text{ verde}] = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{25}$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que saquemos una azul y una roja?

P[una azul y una roja] = P[1ª azul y 2ª roja] + P[1ª roja y 2ª azul] =

En este caso, el suceso "sacar una bola azul y una roja" está compuesto por dos sucesos, que serán:
- "sacar 1ª azul, 2ª roja"
- "sacar 1ª roja, 2ª azul"

Por lo que tenemos que sumar las probabilidades de estos dos sucesos

P[1ªA,2ªR] = P[A]·P[R]

P[1ªR,2ªA] = P[R]·P[A]

$$= P[\text{azul}] \cdot P[\text{roja}] + P[\text{roja}] \cdot P[\text{azul}] = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} =$$

$$= \frac{3}{20} + \frac{3}{20} = \frac{3}{10}$$

5.2.- **Experiencias dependientes**.

Dos (o más) experiencias aleatorias son dependientes si el resultado de cada una de ellas depende de lo que haya ocurrido en las anteriores. Por ejemplo, sacar dos bolas de una urna sin haber devuelto la primera bola a la urna antes de sacar la segunda (a esto se le llama sin reemplazo),...

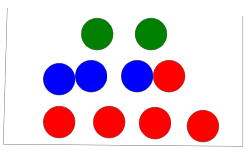
En este caso, la probabilidad de que ocurra el suceso 1 (S_1) y el suceso 2 (S_2) y el S_3, etc, es:

$$P[S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } S_3 \text{ y } ...] = P[S_1] \cdot P[S_2 \text{ en la segunda } / S_1 \text{ en la primera}] \cdot P[S_3/S_1 \text{y } S_2] \cdot \ldots$$

A la $P[S_2/S_1]$ se le llama Probabilidad Condicionada de S_2 a S_1 y se refiere a la probabilidad de que ocurra S_2 sabiendo que ya ha ocurrido S_1.

Por ejemplo:

Tenemos una urna con 5 bolas rojas, 3 azules y 2 verdes. Sacamos una bola. Anotamos su color y NO la devolvemos a la urna. Sacamos una segunda bola.



- ¿Cuál es la probabilidad de que saquemos las dos bolas verdes?

$$P[\text{verde y verde}] = P[1^{a} \text{ verde}] \cdot P[2^{a} \text{ verde } / 1^{a} \text{ verde}] = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$$

Esta probabilidad es 2/10 porque al principio hay 2 bolas verdes entre 10 posibles : $\frac{\text{2 bolas verdes}}{\text{10 bolas posibles}}$

Esta probabilidad es 1/9 porque sólo queda 1 bola verde entre 9 posibles al haber sacado ya una bola verde: $\frac{\text{1 bola verde}}{\text{9 bolas posibles}}$

- ¿Cuál es la probabilidad de que saquemos una azul y una roja?

P[una azul y una roja] = P[1ª azul y 2ª roja] + P[1ª roja y 2ª azul] =

Como antes, el suceso "sacar una bola azul y una roja" está compuesto por dos sucesos, que serán:
- "sacar 1ª azul, 2ª roja"
- "sacar 1ª roja, 2ª azul"
Por lo que tenemos que sumar las probabilidades de estos dos sucesos

Pero ahora, las experiencias son dependientes, entonces:
P[1ªA,2ªR] = P[1ªA]·P[2ªR/1ªA]
P[1ªR,2ªA] = P[1ªR]·P[2ªA/1ªR]

= P[1ªazul] · P[2ªroja/1ªazul] + P[1ªroja] · P[2ªazul/1ªroja] =

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

→ p202: 9, 19, 20, 24, 18

6.- TABLAS DE CONTINGENCIA

Las tablas de contingencia relacionan dos variables de la misma población de forma muy visual, haciendo muy sencillo calcular probabilidades, especialmente probabilidades condicionadas.

Por ejemplo: En una clase de 30 alumnos hay 18 que han aprobado Matemáticas, 16 que han aprobado Inglés y 6 que no han aprobado ninguna de las dos.
Rellenaríamos la tabla de la siguiente forma:

	Aprueban Mates	No aprueban Mates	Total
Aprueban Inglés	10	6	**16**
No aprueban Inglés	8	**6**	14
Total	**18**	12	**30**

Elegimos al azar un alumno de esa clase:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado Inglés y Matem.? P(I ∩ M) = $\frac{10}{30}$

b) Sabiendo que ha aprobado Matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado Inglés?

$$P(I/M) = \frac{P[I \cap M]}{P[M]} = \frac{\frac{10}{30}}{\frac{18}{30}} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

c) ¿Son independientes los sucesos "Aprobar Matemáticas" y "Aprobar Inglés"?

No porque $P[I \cap M] \neq P[I] \cdot P[M]$, pues $\frac{5}{9} \neq \frac{16}{30} \cdot \frac{18}{30}$

→ p203: 17, 21

7.- TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Diremos que A_1, A_2,.... A_n constituyen un sistema completo de sucesos si todos los sucesos son incompatibles dos a dos y la unión de todos los sucesos forman el espacio muestral:

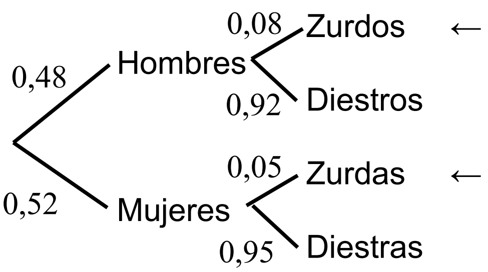
$$A_i \cap A_j = \emptyset$$
$$E = \{ A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

El Teorema de la Probabilidad Total dice que si tenemos un sistema completo de sucesos, la probabilidad de que ocurra un suceso B es:

$$P[B] = P[A_1]\cdot P[B/A_1] + P[A_2]\cdot P[B/A_2] + \dots + P[A_n]\cdot P[B/A_n]$$

Por ejemplo: En una población el 5% de las mujeres y el 8% de los hombres son zurdos. Si en esa población el 48% son Hombres, ¿cuál es la probabilidad de que un miembro de la población elegido al azar sea zurdo?

Con un árbol vemos más claramente las probabilidades de cada suceso:



P[Zurdo] = P[Mujer]·P[Zurdo/Mujer] + P[Hombre]·P[Zurdo/Hombre] =
= 0,52 · 0,05 + 0,48 · 0,08 = 0,064

8.- TEOREMA DE BAYES

Utilizando la fórmula de la probabilidad condicionada y el Teorema de la probabilidad total podemos calcular probabilidades "a posteriori", porque nos piden $P[A_i/B]$ y los valores condicionados que conocemos son los de $P[B/A_i]$:

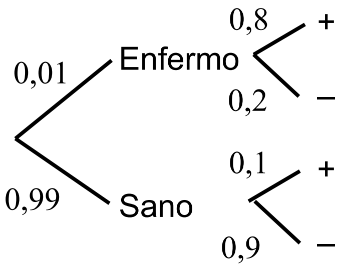
$$P[A_i/B]=\frac{P[A_i \cap B]}{P[B]} = \frac{P[A_i]\cdot P[B/A_i]}{P[B]} = \frac{P[A_i]\cdot P[B/A_i]}{P[A_1]\cdot P[B/A_1]+\dots+P[A_n]\cdot P[B/A_n]}$$

Por ejemplo: Una población tiene un 1% de individuos enfermos. Un test detecta la enfermedad 8 veces sobre 10 en un sujeto enfermo y detecta la no existencia de enfermedad 9 veces sobre 10 en un sujeto sano. Calcula la probabilidad de que un sujeto que ha tenido test positivo esté realmente enfermo.

Nuestro sistema completo de sucesos es {Enfermo, Sano} y conocemos las probabilidades:

P(E)=0'01
P(S)=0'99
P(+/E)=0'8
P(+/S)=0'1

Lo vemos en un árbol:



Por tanto aplicando el teorema de Bayes obtenemos lo siguiente:

$$P[E/+]=\frac{P[E\cap +]}{P[+]} = \frac{P[E]\cdot P[+/E]}{P[E]\cdot P[+/E]+P[S]\cdot P[+/S]} = \frac{0{,}01\cdot 0{,}8}{0{,}01\cdot 0{,}8+0{,}99\cdot 0{,}1} = 0{,}075$$

→ p203: 22, 23