7.5. Anualidades de capitalización

En muchas situaciones se plantea el problema de conseguir u obtener un capital al cabo de un número determinado t de años. Para ello, hacemos unos pagos o aportaciones, siempre iguales, al principio de cada uno de los años. Estos pagos o aportaciones se llaman **anualidades de capitalización**.

> **Recuerda que:**
>
> **Las anualidades de capitalización** son pagos o aportaciones fijas que hacemos al principio de cada año para formar, junto con sus intereses compuestos, un capital al cabo de un número determinado de t años.

Supongamos que la anualidad de capitalización es a, que el tanto por uno anual es r y el tiempo de capitalización es de t años.

Utilizando la expresión de interés compuesto, obtenemos que la anualidad que entregamos al inicio del primer año se convierte o capitaliza en el siguiente montante:

$$a\,(1+r)^t$$

La segunda anualidad, entregada al principio del segundo año, capitaliza al cabo de $t-1$ años el montante:

$$a\,(1+r)^{t-1}$$

La tercera anualidad capitaliza en $t-2$ años el montante:

$$a\,(1+r)^{t-2}$$

y así sucesivamente, la anualidad *t-ésima*, que entregamos al comienzo del *t-ésimo* año o último, capitaliza en 1 año el siguiente montante:

$$a\,(1+r)^1$$

La suma de todos estos montantes da lugar a la capitalización del capital C:

$$C = a\,(1+r)^1 + a\,(1+r)^2 + \ldots + a\,(1+r)^{t-1} + a\,(1+r)^t$$

Aplicando la expresión de la suma de n términos consecutivos de una sucesión o progresión geométrica a la progresión anterior de razón $(1 + r)$ y números de términos t, obtenemos:

$$C = \frac{a(1+r)^t(1+r) - a(1+r)}{(1+r)-1} = \frac{a(1+r)\cdot[(1+r)^t - 1]}{r}$$

> **Recuerda que:**
>
> Una sucesión: $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ se llama sucesión o progresión **geométrica** si cada término, excepto el primero, se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante, r, llamada razón de la progresión: $a_2 = a_1 \cdot r$; $a_3 = a_2 \cdot r$; $a_n = a_{n-1} \cdot r$.
>
> Por tanto, la suma de los n primeros términos $a_1 + a_2 + \ldots. + a_n$ vale: $S_n = \dfrac{a_n \cdot p - a_1}{p-1}$

Cuando los pagos o aportaciones los hacemos al principio de cada mes, la capitalización no es anual, lo que capitalizamos cada mes es:

$$C = \frac{a\left(1+\frac{r}{12}\right)\left[\left(1+\frac{r}{12}\right)^{T} - 1\right]}{\frac{r}{12}}$$

siendo a la aportación mensual y T el tiempo de capitalización en meses.

En general, cuando los pagos los hacemos n veces al año, el capital obtenido es:

$$C = \frac{a\left(1+\frac{r}{n}\right)\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{T} - 1\right]}{\frac{r}{n}}$$

siendo T el número de periodos de capitalización.

Actividades resueltas

- Una persona, al cumplir los 40 años, decide hacer un plan de ahorro. Llega con el banco a un acuerdo de capitalizar trimestralmente al 3 % anual, depositando 90 € al inicio de cada trimestre. ¿Qué capital obtendrá al cumplir los 60 años?

La capitalización es trimestral, con lo cual el número de periodos en un año es n = 4. El tiempo de capitalización es 60 − 40 = 20 años, que expresado en periodos de capitalización o trimestres, es de 4 · 20 = 80 trimestres. Se trata de una capitalización no anual.

El capital que obtendrá según la fórmula que hemos visto antes será:

$$C \; = \; \frac{a\left(1+\frac{r}{4}\right)\left[\left(1+\frac{r}{4}\right)^{T} - 1\right]}{\frac{r}{4}} = \left(\left(\frac{0.03}{4}\right)/90\right)\left(1+\frac{0.03}{4}\right)\left[\left(1+\frac{0.03}{4}\right)^{80} - 1\right] = 989.015$$

- ¿Qué anualidad tendríamos que abonar al principio de cada año durante 12 años para capitalizar o conseguir 18 000 € al 3 % anual?

Se trata de una capitalización anual, por lo tanto, según la fórmula siguiente obtendremos:

$$C = \frac{a \cdot (1+r)((1+r)^{t} - 1)}{r} \Rightarrow a = \frac{rC}{(1+r) \cdot ((1+r)^{t} - 1)} \Rightarrow a = \frac{0.03 \cdot 18\,000}{(1+0.03) \cdot ((1+0.03)^{12} - 1)} = 223.21 \text{ €}$$