4.7. Anualidades de amortización

En la vida real es muy frecuente pedir prestado a un banco o una entidad financiera una cantidad de dinero que llamamos **deuda**. Esta deuda la devolvemos o la amortizamos mediante pagos siempre iguales, durante un número t de años consecutivos, haciendo cada pago o aportación al final de cada año. Estos pagos o aportaciones iguales se llaman **anualidades de amortización.**

Las **anualidades de amortización** son pagos o aportaciones fijas que hacemos al final de cada año, para amortizar o cancelar una deuda, junto con sus intereses compuestos, durante un número determinado, t de años.

La deuda D, al cabo de t años, al tanto por uno anual, r, capitaliza el siguiente montante:

$$M = D(1+r)^t$$

Las anualidades, a, que aportamos al final de cada año, capitalizan los siguientes montantes:

La primera anualidad en $t-1$ años se convierte en: $a\,(1+r)^{t-1}$

La segunda anualidad en $t-2$ años se convierte en: $a\,(1+r)^{t-2}$

La tercera anualidad en $t-3$ años se convierte en: $a\,(1+r)^{t-3}$

Y así sucesivamente, la anualidad t-ésima, que aportamos al final del último año, es: a

La suma de los anteriores montantes ha de coincidir con M

$$M = D(1+r)^t = a + a(1+r) + \ldots + a(1+r)^{t-2} + a(1+r)^{t-1}$$

Aplicando la expresión de la suma de n términos consecutivos de una sucesión o progresión geométrica a la sucesión anterior de razón $1 + r$ y de t términos, obtenemos:

$$D \cdot (1+r)^t = \frac{a(1+r)^{t-1} \cdot (1+r) - a}{(1+r) - 1}$$

Y de aquí obtenemos la expresión que nos da la anualidad de la amortización:

$$a = \frac{Dr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1}$$

Cuando los pagos o aportaciones los hacemos al final de cada mes, la amortización mensual viene dada por:

$$a = \frac{D \cdot \frac{r}{12} \cdot \left(1+\frac{r}{12}\right)^T}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^T - 1}$$

donde D es la deuda y T es el tiempo de amortización en meses.

En general, cuando los pagos los hacemos n veces al año, la cuota de amortización es:

$$a = \frac{D \cdot \frac{r}{n} \cdot \left(1+\frac{r}{n}\right)^T}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^T - 1}$$

siendo T el número de periodos de amortización.

Actividades resueltas

- En el Mercado de Ocasión del coche usado nos venden un coche por 1 800 €. La empresa tiene una entidad financiera, la cual cobra un 2 % anual. ¿Cuál debe ser la amortización mensual para saldar la deuda en 2 años?

La amortización es mensual, por lo que el número n de periodos en un año es de 12 y la expresión que utilizamos es:

$$a = \frac{D \cdot \frac{r}{12} \cdot \left(1+\frac{r}{12}\right)^{T}}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{T} - 1} = \frac{1\,800 \cdot \frac{0.02}{12} \cdot \left(1+\frac{0.02}{12}\right)^{24}}{\left(1+\frac{0.02}{12}\right)^{24} - 1} = 76.58$$

- La empresa Frío Industrial ha adquirido una máquina por la que se compromete a pagar 12 000 € en el momento de la adquisición y 5 000 € al final de cada año, durante 10 años. Si se aplica un 2 % de interés anual, ¿cuál es el valor de la máquina?

La deuda, D, que la empresa amortiza en 10 anualidades es:

$$D = \frac{a \cdot ((1+r)^{t} - 1)}{r(1+r)^{t}} = \frac{5\,000 \cdot ((1+0.02)^{10} - 1)}{0.02(1+0.02)^{10}} = 44\,914.47$$

Luego el valor de la máquina es: 44 914.47 + 12 000 = 56 914.47.