4. EJERCICIOS DE TRIÁNGULOS (TEOREMAS DEL SENO Y COSENO)

Cuestión 31:

. Resuelve los siguientes triángulos:

a) $a = 12$ **cm;** $b = 16$ **cm;** $c = 10$ **cm**

b) $b = 22$ **cm;** $a = 7$ **cm;** $\widehat{C} = 40°$

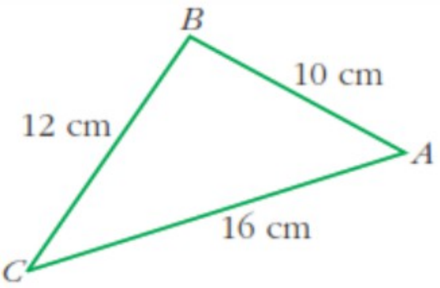
c) $a = 8$ **m;** $b = 6$ **m;** $c = 5$ **m**

d) $b = 4$ **cm;** $c = 3$ **cm;** $\widehat{A} = 105°$

e) $a = 4$ **m;** $\widehat{B} = 45°$ **y** $\widehat{C} = 60°$

f) $b = 5$ **m;** $\widehat{A} = \widehat{C} = 35$

a) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$



$12^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cos \widehat{A}$

$144 = 256 + 100 - 320 \cos \widehat{A}$

$\cos \widehat{A} = \dfrac{256 + 100 - 144}{320} = 0{,}6625$

$A = 48° \; 30' \; 33''$

• $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$

$256 = 144 + 100 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cos \widehat{B}$

$\cos \widehat{B} = \dfrac{144 + 100 - 256}{240} = -0{,}05$

$B = 92° \; 51' \; 57{,}5''$

• $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180° \quad \rightarrow \quad \widehat{C} = 180 - \widehat{A} - \widehat{B}$

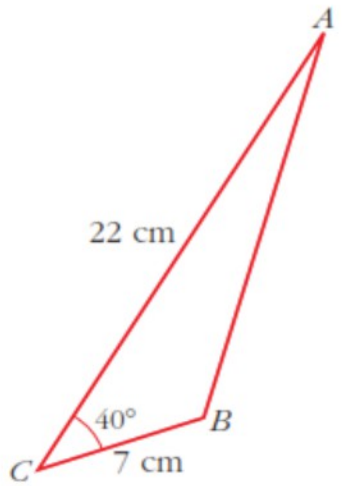
$\widehat{C} = 38° \; 37' \; 29{,}5''$

b) • $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}$

$c^2 = 7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22 \cos 40° =$

$= 49 + 484 - 235{,}94 = 297{,}06$

$c = 17{,}24$ cm



• $\dfrac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \dfrac{c}{\text{sen } \widehat{C}} \quad \rightarrow \quad \dfrac{7}{\text{sen } \widehat{A}} = \dfrac{17{,}24}{\text{sen } 40°}$

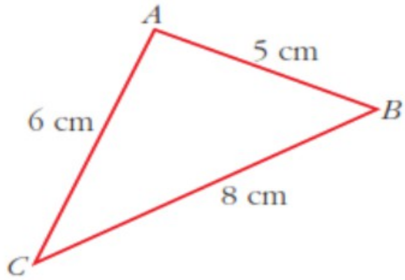
$\text{sen } \widehat{A} = \dfrac{7 \text{ sen } 40°}{17{,}24} = 0{,}26$

$A = \begin{cases} \widehat{A}_1 = 15° \; 7' \; 44{,}3'' \\ \widehat{A}_2 = 164° \; 52' \; 15{,}7'' \quad \rightarrow \quad \text{No válida} \end{cases}$

(La solución A_2 no es válida, pues $\widehat{A}_2 + \widehat{C} > 180°$).

• $\widehat{B} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 124° \; 52' \; 15{,}7''$

c) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$



$64 = 36 + 25 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cos \hat{A}$

$\cos \hat{A} = \dfrac{36 + 25 - 64}{60} = -0{,}05$

$\hat{A} = 92° \; 51' \; 57{,}5''$

• $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

$36 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cos \hat{B}$

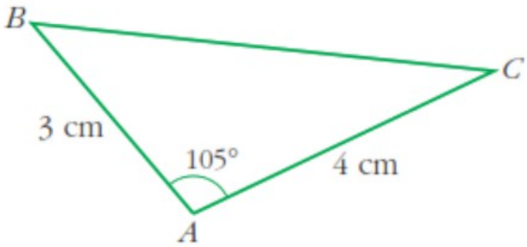
$\cos \hat{B} = \dfrac{64 + 25 - 36}{80} = 0{,}6625$

$\hat{B} = 48° \; 30' \; 33''$

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 38° \; 37' \; 29{,}5''$

(NOTA: Compárese con el apartado a). Son triángulos semejantes).

d) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} =$



$= 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos 105° = 31{,}21$

$a = 5{,}59$ m

• $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}}$

$\dfrac{5{,}59}{\text{sen } 105°} = \dfrac{4}{\text{sen } \hat{B}}$

$\text{sen } \hat{B} = \dfrac{4 \cdot \text{sen } 105°}{5{,}59} = 0{,}6912$

$\hat{B} = \begin{cases} \hat{B}_1 = 43° \; 43' \; 25{,}3'' \\ \hat{B}_2 = 136° \; 16' \; 34{,}7'' \quad \to \quad \text{No válida} \end{cases}$

(La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A}_2 + \hat{B}_2 > 180°$).

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 31° \; 16' \; 34{,}7''$

e) • $\hat{A} = 180 - (\hat{B} + \hat{C}) = 75°$

• $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}}$

$\dfrac{4}{\text{sen } 75°} = \dfrac{b}{\text{sen } 45°}$

$b = \dfrac{4 \cdot \text{sen } 45°}{\text{sen } 75°} = 2{,}93$ m

• $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}} \quad \to \quad \dfrac{4}{\text{sen } 75°} = \dfrac{c}{\text{sen } 60°}$

$c = \dfrac{4 \cdot \text{sen } 60°}{\text{sen } 75°} = 3{,}59$ m

f) • $\hat{B} = 180 - (\hat{A} + \hat{C}) = 110°$

• $\dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} \quad \to \quad \dfrac{5}{\text{sen } 110°} = \dfrac{a}{\text{sen } 35°}$

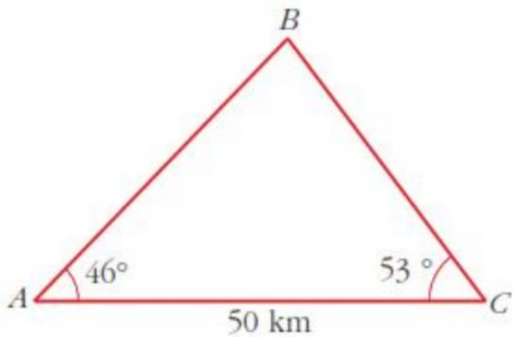
$a = \dfrac{5 \cdot \text{sen } 35°}{\text{sen } 110°} = 3{,}05$ m

• Como $\hat{A} = \hat{C} \quad \to \quad a = c \quad \to \quad c = 3{,}05$ m

Cuestión 32:

Un barco *B* pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, *A* y *C*, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: *BAC* = 46º y *BCA* = 53º. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

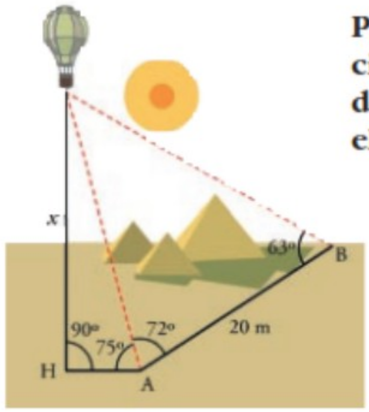
$\widehat{B} = 180° - 46° - 53° = 81°$



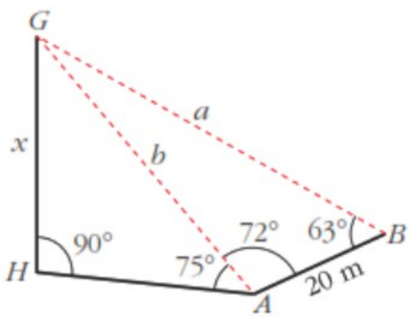
- $\dfrac{a}{sen\ \widehat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \widehat{B}} \rightarrow a = \dfrac{b\ sen\ \widehat{A}}{sen\ \widehat{B}} = \dfrac{50 \cdot sen\ 46°}{sen\ 81°} = 36{,}4 \text{ km}$

- $\dfrac{c}{sen\ \widehat{C}} = \dfrac{b}{sen\ \widehat{B}} \rightarrow c = \dfrac{b\ sen\ \widehat{C}}{sen\ \widehat{B}} = \dfrac{50 \cdot sen\ 53°}{sen\ 81°} = 40{,}4 \text{ km}$

Cuestión 33:



Para hallar la altura de un globo, realizamos las mediciones indicadas en la figura. ¿Cuánto dista el globo del punto *A*? ¿Cuánto del punto *B*? ¿A qué altura está el globo?



$\widehat{AGB} = 180° - 72° - 63° = 45°$

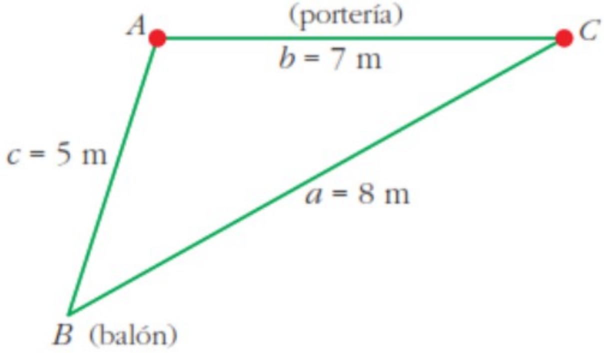
- $\dfrac{b}{sen\ 63°} = \dfrac{20}{sen\ 45°} \rightarrow b = \dfrac{20 \cdot sen\ 63°}{sen\ 45°} = 25{,}2 \text{ m}$

- $\dfrac{a}{sen\ 72°} = \dfrac{20}{sen\ 45°} \rightarrow a = \dfrac{20 \cdot sen\ 72°}{sen\ 45°} = 26{,}9 \text{ m}$

- $sen\ 75° = \dfrac{x}{b} = \dfrac{x}{25{,}2} \rightarrow x = 25{,}2 \cdot sen\ 75° = 24{,}3 \text{ m}$

Cuestión 34:

En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?



Aplicando el teorema del coseno:

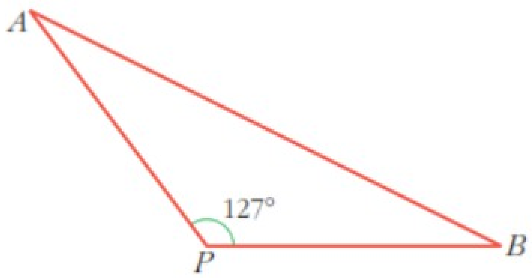
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\ \widehat{B} \ \rightarrow$

$\rightarrow \ cos\ \widehat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = 0{,}5 \ \rightarrow \ B = 60$

Cuestión 35:

Dos barcos parten de un puerto con rumbos distintos que forman un ángulo de 127º. El primero sale a las 10 h de la mañana con una velocidad de 17 nudos, y el segundo sale a las 11 h 30 min, con una velocidad de 26 nudos. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150 km, ¿podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde?

(Nudo = milla / hora; milla = 1 850 m)



La distancia que recorre cada uno en ese tiempo es:

Barco A $\rightarrow \overline{PA} = 17 \cdot 1\,850$ m/h $\cdot$ 5 h = 157 250 m

Barco B $\rightarrow \overline{PB} = 26 \cdot 1\,850$ m/h $\cdot$ 3,5 h = 168 350 m

Necesariamente, $\overline{AB} > \overline{PA}$ y $\overline{AB} > \overline{PB}$, luego:

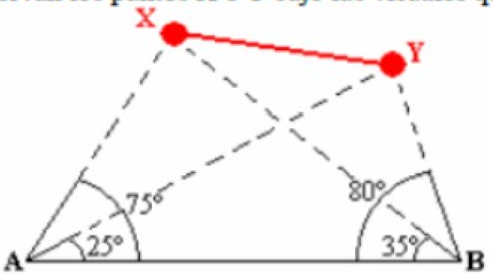
$$\overline{AB} > 168\,350 \text{ m}$$

Como el alcance de sus equipos de radio es 150 000 m, no podrán ponerse en contacto.

(NOTA: Puede calcularse $\overline{AB}$ con el teorema del coseno $\rightarrow \overline{AB} = 291\,432{,}7$ m).

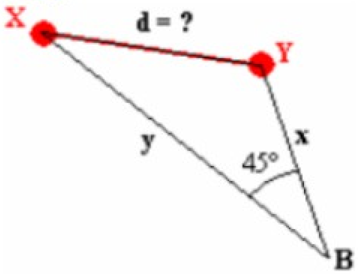
Cuestión 39:

Calcular la distancia entre dos puntos inaccesibles (X e Y) si desde dos puntos, A y B que distan 210 m, se observan los puntos X e Y bajo las visuales que muestra la figura.



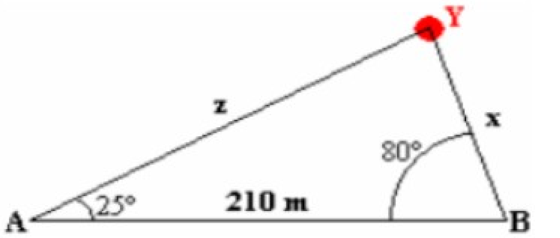
Solución.

Lo primero es seleccionar un triángulo donde este la longitud pedida, uno de ellos puede ser el BXY.



Para calcular **d**, necesitamos conocer **x** e **y**, que localizamos en otros triángulos donde tengamos más datos.

- **x** se pude calcular en el triángulo ABY aplicando el teorema del seno.

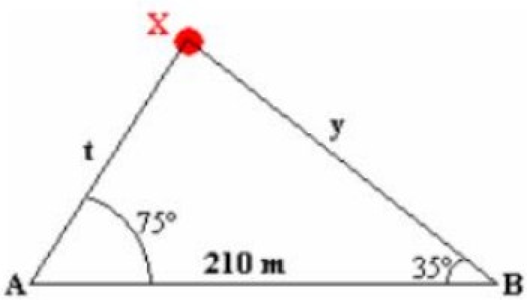


$$25°+80°+\hat{Y}=180° \qquad \hat{Y}=75°$$

$$\frac{x}{\text{sen } 25°}=\frac{210}{\text{sen } 75°} \qquad x=210\,\frac{\text{sen } 25°}{\text{sen } 75°}$$

$$\mathbf{x} \approx 92 \text{ m}$$

- **y** se puede calcular en el triángulo ABX

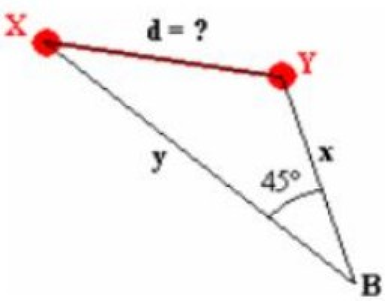


$$75°+35°+\hat{X}=180° \qquad \hat{X}=70°$$

$$\frac{y}{\text{sen } 75°}=\frac{210}{\text{sen } 70°} \qquad x=210\,\frac{\text{sen } 75°}{\text{sen } 70°}$$

$$\mathbf{x} \approx 216 \text{ m}$$

Conocidos $\hat{B}$, **x** e **y** se calcula el valor de **d** mediante el teorema del coseno.



$$d^2=x^2+y^2-2x\cdot y\cdot\cos\hat{B}$$

$$d=\sqrt{92^2+216^2-2\cdot 92\cdot 216\cdot\cos 45°}\approx 164 \text{ m}$$