SITUACIONES Y PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN UTILIZANDO LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Resolveremos algunas situacionesreales con la aplicación de funciones exponenciales:

1) Las diferencias de presiones, que se producen al ascender una montaña, son la causa que algunas personas se apunen y tengan fuertes dolores de oídos. Investigaciones científicas determinaron que la presión atmosférica está dada por la expresión:

$$y = f(x) = \left(\frac{9}{10}\right)^x$$

x : se mide en miles de metros. y: se mide en atmósferas

a) Realice la gráfica de la función. **b) ¿Qué presión hay a cuatro mil metros de altura?**

Solución:

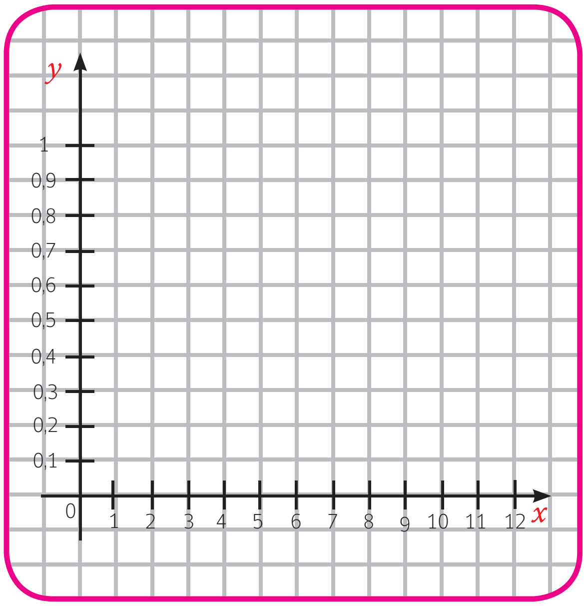
a) Para realizar la gráfica es necesario hacer una tabla de valores, evaluar la función y ubicar los puntos correspondientes en el plano cartesiano:

Como x: se mide en miles de metros completaré la siguiente tabla:

x	0	1	2	4	6	8	10	12
$y = f(x) = \left(\frac{9}{10}\right)^x$								

b) El valor x =4 indica cuatro mil metros de altura y la tabla muestra el valor de y = ______ atmósferas.

Respuesta: Por lo tanto a los cuatro mil metros hay ______ atmósfera de presión.



ACTIVIDAD Ejemplos de problemas que involucran funciones exponenciales:

Como se explicó anteriormente, las funciones exponenciales son muy útiles para describir algunas situaciones, como por ejemplo:

1) El crecimiento demográfico de una población de bacterias, esta modelado por una función exponencial de la forma:

$$P(t) = P_0 \cdot 2^t$$

donde:

P_0: es la población inicial de bacterias cuando $t = 0$ t: es el tiempo medido en horas

Si la población bacteriana inicial es de 100 bacterias, complete la tabla según los tiempos en horas dados:

t: tiempo en horas	0	1	2	3	4	5	6
Población $P(t)$	100		400	1.600		6.400	

Sugerencia:

Para completar la tabla, proceda reemplazando cada valor de t, en la función:

$P(t) = P_0 \cdot 2^t \rightarrow P(t) = 100 \cdot 2^t$

$\downarrow \downarrow$

$P(0) = 100 \cdot 2^0 \rightarrow P(0) = 100 \cdot 1 = 100$

$P(1) = 100 \cdot 2^1 \rightarrow P(1) = 100 \cdot 2 = 200$

$P(2) = 100 \cdot 2^2 \rightarrow P(2) = 100 \cdot 4 = 400$

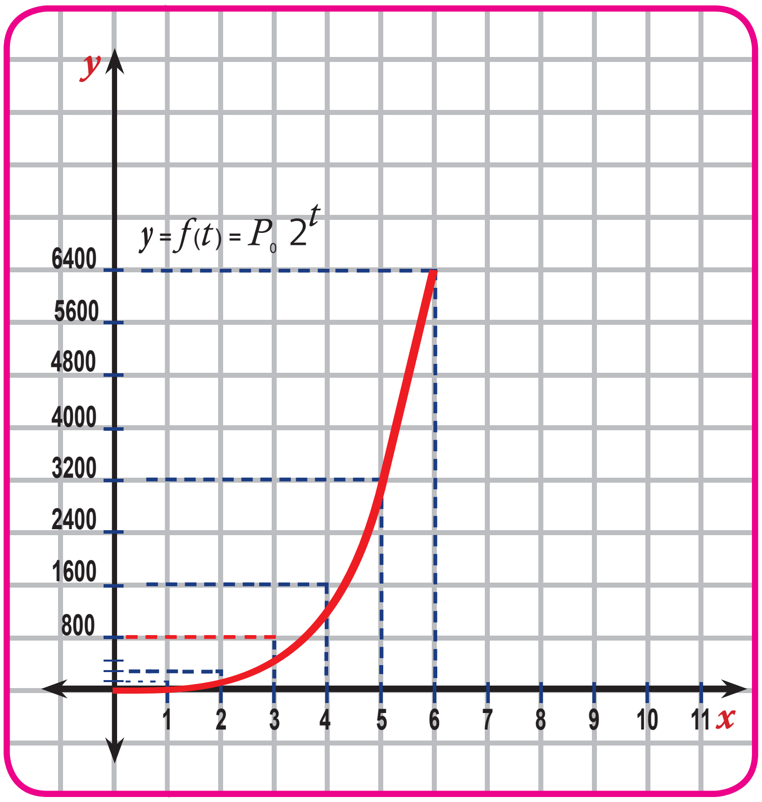
$P(3) = 100 \cdot 2^3 \rightarrow P(3) = 100 \cdot$ ____ = ____

$P(4) = 100 \cdot 2^4 \rightarrow P(4) = 100 \cdot 16 = 1.600$

$P(5) = 100 \cdot 2^5 \rightarrow P(5) = 100 \cdot$ ____ = ____

$P(6) = 100 \cdot 2^6 \rightarrow P(6) = 100 \cdot 64 = 6.400$

Esbozo del gráfico de la función:



¿Qué pasaría si P_0 = 10? Complete la siguiente tabla y esboce el gráfico x : $P(t)=P_0 \cdot 2^t$ --> $P(t)=\dots \cdot 2^t$

t : tiempo en horas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Población $P(t)$	10										

Realice el gráfico de la función:

Si la población inicial (cuando t = 0) es 10 (P_0 = 10) **¿Cuál será el tamaño de la población al cabo de 5 horas?**

....

Si la población inicial (cuando t = 0) es 20 (P_0 = 20) **¿Cuál será el tamaño de la población al cabo de 7 horas?**

....

2) Si se agregan 20 gramos de sal a una cantidad de agua, la cantidad $q(t)$, de sal sin disolver luego de t segundos está dada por: $q(t) = 20\left(\frac{4}{5}\right)^t$

a) ¿Cuánta cantidad de sal sin disolver hay luego de 10 segundos?

Actividad en el cuaderno

b) Esboce la gráfica después de completar la tabla

t: (segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$q(t) = 20\left(\frac{4}{5}\right)^t$		16				6,6			3,4		

3) El modelo aproximado de Jenss:

$$y = 79 + 6x - e^{3,3-x}$$

es considerado el más preciso para determinar la estatura de los niños menores de 7 años. Si y es la estatura medida en centímetros y x es la edad medida en años.

a) Completar la tabla de estatura de los niños menores de 7 años.

x: (años)	0	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6
$y = 79 + 6x - e^{3,3-x}$	52,5	59,8			75,2			102,5		114,9

Actividad en el cuaderno

b) Esboce la gráfica de la estimación de la estatura de los niños menores de 7 años.

4) Chile, los años 1996, 1997 y 1998, tenía una población aproximada de 14.419.000, 14.622.000 y 14.822.000 habitantes respectivamente. Actualmente, según el censo del año 2002, tiene una población aproximada de 15,5 millones de habitantes y está **creciendo a una tasa anual de 1,3%.** Crecimiento que se ha ido desacelerando desde el año 1992.

Si se observan estos datos, o si se estudia esta situación con datos más completos del Instituto Nacional de Estadísticas (INE) se puede observar que este crecimiento no es constante; y si lo fuese, tendríamos un crecimiento lineal, pero no ocurre así. Este tipo de crecimiento atiende más bien a un crecimiento exponencial que está determinado por la función:

$$\boxed{P(t) = P_0 \bullet e^{kt}}$$

donde:

P_0 : es la población inicial (cuando $t = 0$),

k : es la tasa de crecimiento en porcentaje anual,

t : es el tiempo medido en años,

$P(t)$: es la población en el tiempo t.

A partir de estos datos, responda:

a) ¿Qué población habrá en Chile en 10 años más y en 50 años más, si sigue creciendo a esta misma tasa?

b) ¿Qué población habrá en Chile en 10 años más, si la tasa de crecimiento cae a la mitad de la actual?

c) Si la tasa de crecimiento se duplica respecto de la tasa actual. **¿Qué población habrá en Chile en 10 años más?**

Solución:

Para resolver el problema, es necesario determinar la función: $P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$, en este caso, los datos permiten escribir la función así:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{kt} \rightarrow P(t) = 15{,}5 \cdot e^{0{,}013t}$$

P_0 = 15,5, millones es la población inicial el año 2002, (cuando $t = 0$),

$k = 1{,}3\% \rightarrow k = \frac{1{,}3}{100} = 0{,}013$, tasa anual de crecimiento.

Actividad en el cuaderno

a) Para $t = 10$ años:

$$P(t) = 15{,}5 \cdot e^{0{,}013t} \rightarrow P(10) = 15{,}5 \cdot e^{0{,}013 \cdot 10} = 15{,}5 \cdot e^{0{,}13} = 17{,}652$$

Por lo tanto, después del 2002 habrá más de 17,7 millones de habitantes aproximadamente. **¿Por qué?**
Determine la población en 50 años más.

b) Para $t = 10$ considerar la mitad de la tasa anterior, es decir;

$$P(t) = 15{,}5 \cdot e^{0{,}0065t} \rightarrow P(10) = 15{,}5 \cdot e^{0{,}0065 \cdot 10} = 15{,}5 \cdot e^{0{,}065} = 16{,}541 \text{ millones}$$

Por lo tanto, después del 2012 habrá más de 17,7 millones de habitantes aproximadamente. **¿Por qué?**

c) Determine la población en 10 años más con una tasa de 2,6%.

d) Con los datos determinados, esbozar la grafica de la función.

Actividad en el cuaderno

En Chile existían dos cuerpos legales que regulaban la conducción bajo los efectos del alcohol: La Ley de Alcoholes N°17.105 del año 1969 contempla la figura penal del conductor del vehículo motorizado en estado de ebriedad y la obligación a la prueba de alcoholemia.

- La Ley de Tránsito N° 18.290 de 1984 que establece el concepto de conducir bajo la influencia del alcohol sin estar ebrio y lo tipifica como una infracción gravísima.

La diferencia entre estos dos cuerpos legales está basada en una interpretación de las alcoholemias hechas por el Servicio Médico Legal en 1972 y que la Corte Suprema de Justicia recomendó a los tribunales del país, donde con 1 gramo de alcohol por litro de sangre se considera al conductor en estado de ebriedad, y entre 0,5 hasta 0,99 gr/litro será considerado bajo la influencia del alcohol sin estar ebrio.

Investigaciones médicas recientes han propuesto un modelo matemático que indica porcentualmente la probabilidad de tener un accidente automovilístico al conducir bajo los efectos del alcohol, la cual está dada por la función de riesgo

$$\boxed{R(x) = 6 \cdot e^{kx}}$$ donde,

x: es la concentración de alcohol en la sangre,
k: es una constante,
R: es la probabilidad de tener un accidente (expresada en porcentaje).
e : corresponde a 2,71.

a) Al suponer que una concentración de 1 gr. de alcohol en la sangre produce un riesgo del 100 % (R=100) de sufrir un accidente, en este caso el valor de la constante es 2,81, aproximadamente. Utilizando este valor de k, calcule el riesgo de sufrir un accidente si la concentración de alcohol en la sangre es de 0,5 gr/litro.

Sugerencia: considere x = 0,5 y k = 2,81

b) Al suponer que una concentración es de 1 gr. de alcohol en la sangre produce un riesgo del 80 % (R=80) de sufrir un accidente, el valor de la constante baja a 2,6. Utilizando este valor de k, calcule el riesgo si la concentración de alcohol en la sangre es de 1,5 gr/litro.

Sugerencia: considere x = 1,5 y k = 2,6