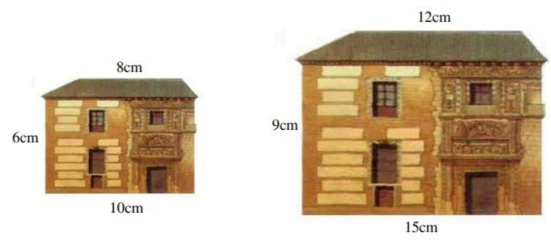
TEMA 4: SEMEJANZA (RESUMEN)

1.- Semejanza (pág. 114, 115)

- Dos figuras son semejantes si tienen la misma forma aunque con tamaño diferente. Esto se traduce matemáticamente en:
  - Los ángulos correspondientes son iguales.
  - Las longitudes de los segmentos correspondientes son proporcionales.

- A la razón entre los segmentos se le llama razón de semejanza $k=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=...$

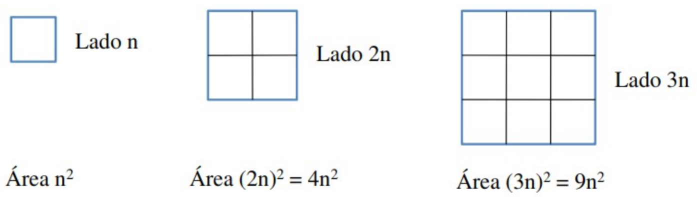


$\frac{9}{6}=1,5$ $\quad \frac{15}{10}=1,5$ $\quad \frac{12}{8}=1,5$ $\quad$ razón de semejanza $=1,5$

- La Escala es una razón de semejanza que se utiliza en la representación mediante modelos, planos o mapas de magnitudes reales. La escala es la razón entre la longitud en el modelo (mapa, maqueta, etc) y la longitud real.

- Áreas. Si dos figuras son semejantes, con razón de semejanza k, sus áreas tienen una razón de semejanza de k^2.
  Si $A = a\cdot b$ (multiplicación de 2 magnitudes) $\rightarrow A' = a' \cdot b' = k\cdot a\cdot k\cdot b = k^2\cdot a\cdot b = k^2\cdot A$

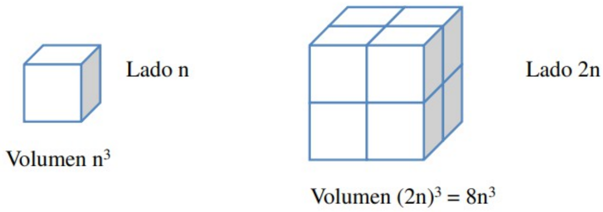
  $a' = k\cdot a$
  $b' = k\cdot b$



$\boxed{\text{Lado } k\cdot n \rightarrow \text{Área } (k\cdot n)^2 = k^2\cdot n^2}$

- Volúmenes: si dos figuras son semejantes, con razón de semejanza k, sus volúmenes tienen una razón de semejanza de k^3.
  Si $V = a\cdot b\cdot c$ (multiplic. de 3 magnitudes) $\rightarrow A' = a' \cdot b' = k\cdot a\cdot k\cdot b\cdot k\cdot c = k^3\cdot a\cdot b\cdot c = k^3\cdot V$

  $a' = k\cdot a$
  $b' = k\cdot b$
  $c' = k\cdot c$



$$\boxed{\text{Lado } k \cdot n \rightarrow \text{Volumen } (k \cdot n)^3 = k^3 \cdot n^3}$$

2.- Homotecia

Leer páginas 116 y 117.

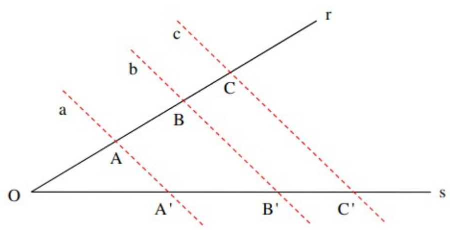
3.- Rectángulos interesantes

Leer páginas 118 y 119.

4.- Semejanza de Triángulos (pág. 120 y 121)

- Es muy importante saber evaluar la semejanza de triángulos pues cualquier polígono se puede descomponer en triángulos.

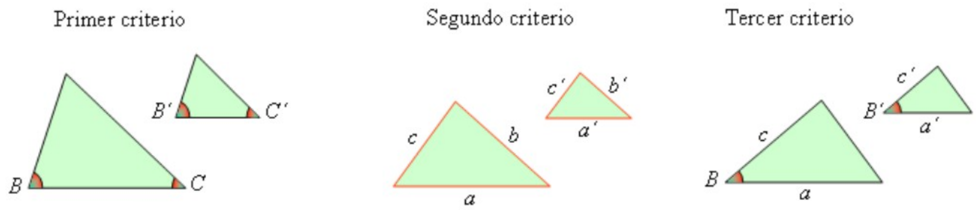
- Teorema de Tales:
  Si dos rectas que se cruzan se cortan por varias rectas paralelas entre sí, los segmentos que se determinan entre ellas son proporcionales.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

- Dos triángulos son semejantes si sus tres ángulos son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales (los lados correspondientes, son los que forman parte de ángulos iguales).

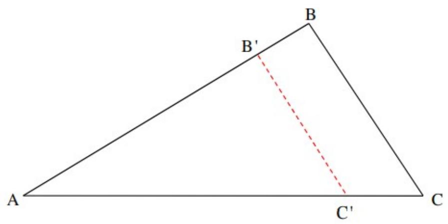
- Sin embargo, no es necesario comprobar los tres ángulos y los tres lados, es suficiente que se cumplan alguno de estos tres criterios de semejanza de triángulos:
  1) Si tienen dos ángulos iguales
  2) Si sus tres lados son proporcionales
  3) Si tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman ambos lados es igual.



$\hat{B} = \hat{B}'$ $\qquad$ $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ $\qquad$ $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{c}{c'}$

$\hat{C} = \hat{C}'$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\hat{B} = \hat{B}'$

- Los triángulos en posición de Tales (un ángulo común y el lado opuesto paralelo) son semejantes (cumplen el tercer criterio de semejanza).



$\hat{A} = \hat{A}'$

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}$

Por lo tanto, en triángulos en posición de Tales se cumplen todos los criterios de semejanza:

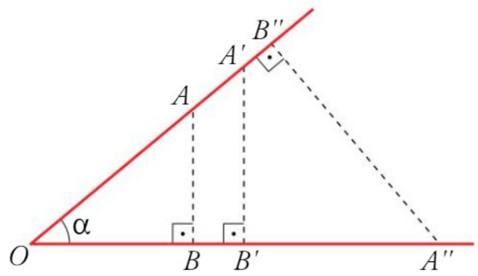
$\hat{A} = \hat{A}' \qquad \hat{B} = \hat{B}' \qquad \hat{C} = \hat{C}'$

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$

5.- Semejanza de triángulos rectángulos

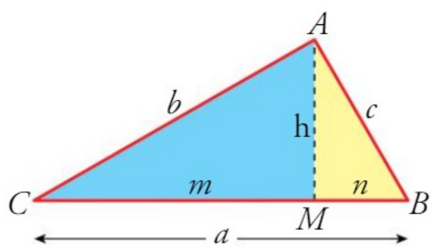
- Todos los triángulos rectángulos tienen un ángulo de 90º, así que con otro ángulo igual, es criterio suficiente de semejanza.

- Todos los triángulos obtenidos al trazar una perpendicular a cualquiera de los lados de un triángulo rectángulo, son semejantes.

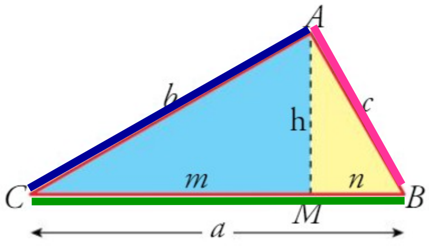


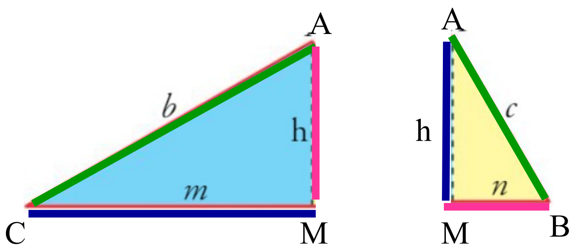
Los triángulos OAB , OA'B' y OA"B" son semejantes porque:
- Todos son rectángulos (tienen un ángulo de 90º).
- Todos tienen un ángulo común, el ángulo α .
- Así que el tercer ángulo también será igual.

- Si trazamos la altura a la hipotenusa, se crean dos triángulos más pequeños semejantes entre sí y al original: ABC , AMC , ABM .



Vamos a marcar en cada triángulo los lados correspondientes:





hipotenusa

cateto que forma el ángulo C

cateto que forma el ángulo B

Por lo tanto, obtenemos 3 razones de semejanza:

- Si comparamos los dos primeros triángulos, tenemos: $\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{h}$

- Si comparamos el primero con el tercero, tenemos: $\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{n}$

- Y si comparamos el segundo con el tercero, tenemos: $\frac{b}{c} = \frac{m}{h} = \frac{h}{n}$

De las relaciones anteriores obtenemos los Teoremas del Cateto y de la Altura:

- Teorema del cateto: un cateto al cuadrado es igual a la hipotenusa por la proyección de ese cateto sobre la hipotenusa.

  De I $\rightarrow b^2 = a \cdot m$

  De II $\rightarrow c^2 = a \cdot n$

- Teorema de la altura: el cuadrado de la altura a la hipotenusa es igual al producto de los dos segmentos en que la altura divide a la hipotenusa.

  De III $\rightarrow h^2 = m \cdot n$