TEMA 9: PROBABILIDAD (Tema 14 del libro)

1.- DEFINICIONES

Experimento aleatorio: Un experimento es un experimento aleatorio si puede dar lugar a varios resultados y de antemano no se puede saber cuál de ellos va a ocurrir, es decir, depende del azar. Por ejemplo, lanzar un dado, extraer una bola de una urna, etc.

Caso: Cada uno de los resultados que se pueden obtener en una experiencia aleatoria. En el ejemplo de lanzar un dado, habría 6 casos posibles: 1, 2, 3, 4, 5 ó 6.

Espacio muestral: Se llama espacio muestral de un experimento al conjunto de todos los resultados posibles de ese experimento. Se nombra con la letra **E** y sus elementos se indican entre llaves y separados por comas (como cualquier conjunto).
Por ejemplo: el espacio muestral del experimento aleatorio "lanzar un dado y anotar el resultado" sería E={1, 2, 3, 4, 5, 6}

Suceso: Cualquier subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo, A="sacar par"={2, 4, 6}, B="sacar más de 4"={5,6}.
Los casos también son sucesos (compuestos por un único elemento). Se llaman sucesos elementales.
Un suceso formado por más de un sucelo elemental se llama suceso compuesto.
Los sucesos vacíos o sin elementos, se llaman sucesos imposibles. Por ejemplo, C="sacar más de 7".
El espacio muestral también es un suceso, se llama suceso total o suceso seguro.

2.- RELACIONES Y OPERACIONES CON SUCESOS

- **Unión** de dos sucesos A y B: A U B
Formado por todos los elementos de A y todos los elementos de B.

- Intersección de dos sucesos A y B: $A \cap B$
Formado por todos los elementos que estén en A y en B a la vez.

- Dos sucesos son **incompatibles** si no tienen en común ningún suceso elemental, o sea, no pueden ocurrir simultáneamente. Si A y B son incompatibles, $A \cap B = \emptyset$

- El suceso S' (o $\overline{S}$) se dice que es el suceso **contrario** de S si son incompatibles y entre los dos forman el espacio muestral.

$$S \cap S' = \emptyset \quad \text{y} \quad S \cup S' = E$$

3.- PROBABILIDAD DE UN SUCESO DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO

La probabilidad de un suceso S se indica P[S] y es una función que asocia a cada suceso un número entre 0 y 1 que indica la facilidad de que ocurra ese suceso.

$$0 \leq P[S] \leq 1$$

Si la P[S] está cerca de 0 quiere decir que es poco probable que ocurra. Si la P[S] está cerca de 1 quiere decir que es muy probable.

PROPIEDADES:

- La probabilidad del suceso seguro es 1: P[E] = 1
- La probabilidad del suceso imposible es 0: P[Ø] = 0
- La probabilidad de cualquier otro suceso está entre 0 y 1: 0 < P[S] < 1
- La probabilidad de un suceso compuesto es la suma de las probabilidades de sus sucesos elementales:
  Si $S=\{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\} \rightarrow P[S] = P[s_1] + P[s_2] + P[s_3] + \dots + P[s_n]$
- Las probabilidades de dos sucesos contrarios suman 1, pues entre los dos sucesos forman el espacio muestral:
  $$P[S] + P[S'] = 1$$

4.- CALCULAR LA PROBABILIDAD DE EXPERIENCIAS SIMPLES

- La experiencia aleatoria es **regular** si las probabilidades de los sucesos son previsibles. Por ejemplo, si tiramos un dado correcto (no trucado), si sacamos una bola de una bolsa donde sabemos cuántas bolas hay de cada color, etc. En ese caso podemos aplicar la Ley de Laplace, que dice:

$$P[S]=\frac{\textit{número de casos favorables}}{\textit{número de casos posibles}}$$

Por ejemplo, en el caso de tirar un dado, la probabilidad de sacar un 5 es P[5] = $\frac{1}{6}$

En el caso de una bolsa con 5 bolas rojas, 3 azules y 2 verdes, la probabilidad de sacar una roja es P[roja] = $\frac{3}{10}$.

- La experiencia aleatoria es irregular si es imposible prever el valor de las probabilidades de los sucesos. Por ejemplo, un dado trucado, una bolsa con bolas de distintos colores de la que no sabemos la composición total, etc. Solo se pueden conocer de forma aproximada, experimentando. En este caso, cuanto más experiencias hagamos, más fiable será asignar la frecuencia relativa del experiemto a la probabilidad del suceso.

Por ejemplo, tiramos un dado trucado 100 veces. La cara 1 sale 12 veces, la 2 sale 53 veces, la 3 sale 11, la 4 sale 8, la 5 sale 4 y la 6 sale 12. La P[2] = $\frac{53}{100}$, mientras que la P[3] = $\frac{11}{100}$.

NOTA: Puedes practicar sobre la cantidad de veces que puede ser necesario repetir una experiencia aleatoria para que sea fiable asignar la frecuencia relativa a la probabilidad del suceso con el programa en Scratch que simula el lanzamiento de un dado y apunta el número de veces que sale cada cara.

5.- PROBABILIDAD EN EXPERIENCIAS COMPUESTAS

5.1.- **Experiencias independientes**.

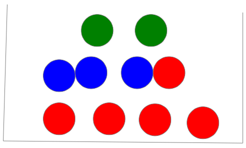
Dos (o más) experiencias aleatorias son independientes si el resultado de cada una de ellas no influye en el resultado de las demás. Por ejemplo, lanzar un dado dos veces (lo que sale la primera vez no influye para nada en lo que pueda salir en la siguiente), sacar dos bolas de una urna habiendo devuelto la primera bola a la urna antes de sacar la segunda (a esto se le llama con reemplazo),...

En este caso, la probabilidad de que ocurra el suceso 1 (S_1) y el suceso 2 (S_2) y el S_3, etc, es:

$$P[S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } S_3 \text{ y } ...] = P[S_1] \cdot P[S_2] \cdot P[S_3] \cdot \ldots$$

Por ejemplo:

Tenemos una urna con 5 bolas rojas, 3 azules y 2 verdes. Sacamos una bola. Anotamos su color y la devolvemos a la urna. Sacamos una segunda bola.



- ¿Cuál es la probabilidad de que saquemos las dos bolas verdes?

$$P[\text{verde y verde}] = P[1^a \text{ verde}] \cdot P[2^a \text{ verde}] = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{25}$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que saquemos una azul y una roja?

$$P[\text{una azul y una roja}] = P[1^a \text{ azul y } 2^a \text{ roja}] + P[1^a \text{ roja y } 2^a \text{ azul}] =$$

En este caso, el suceso "sacar una bola azul y una roja" está compuesto por dos sucesos, que serán:
- "sacar 1^a azul, 2^a roja"
- "sacar 1^a roja, 2^a azul"

Por lo que tenemos que sumar las probabilidades de estos dos sucesos

$P[1^aA,2^aR] = P[A] \cdot P[R]$

$P[1^aR,2^aA] = P[R] \cdot P[A]$

$$= P[\text{azul}] \cdot P[\text{roja}] + P[\text{roja}] \cdot P[\text{azul}] = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} =$$

$$= \frac{3}{20} + \frac{3}{20} = \frac{3}{10}$$

5.2.- **Experiencias dependientes**.

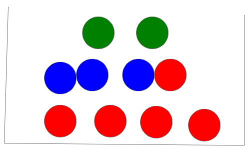
Dos (o más) experiencias aleatorias son dependientes si el resultado de cada una de ellas depende de lo que haya ocurrido en las anteriores. Por ejemplo, sacar dos bolas de una urna sin haber devuelto la primera bola a la urna antes de sacar la segunda (a esto se le llama sin reemplazo),...

En este caso, la probabilidad de que ocurra el suceso 1 (S_1) y el suceso 2 (S_2) y el S_3, etc, es:

$$P[S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } S_3 \text{ y } ...] = P[S_1] \cdot P[S_2 \text{ en la segunda } / \ S_1 \text{ en la primera}] \cdot P[S_3/S_1 \text{ y } S_2] \cdot \ldots$$

A la $P[S_2/S_1]$ se le llama Probabilidad Condicionada de S_2 a S_1 y se refiere a la probabilidad de que ocurra S_2 sabiendo que ya ha ocurrido S_1.

Por ejemplo:
Tenemos una urna con 5 bolas rojas, 3 azules y 2 verdes. Sacamos una bola. Anotamos su color y NO la devolvemos a la urna. Sacamos una segunda bola.



- ¿Cuál es la probabilidad de que saquemos las dos bolas verdes?

$$P[\text{verde y verde}] = P[1^a \text{ verde}] \cdot P[2^a \text{ verde } / \ 1^a \text{ verde}] = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$$

Esta probabilidad es 2/10 porque al principio hay 2 bolas verdes entre 10 posibles : $\frac{\text{2 bolas verdes}}{\text{10 bolas posibles}}$

Esta probabilidad es 1/9 porque sólo queda 1 bola verde entre 9 posibles al haber sacado ya una bola verde: $\frac{\text{1 bola verde}}{\text{9 bolas posibles}}$

- ¿Cuál es la probabilidad de que saquemos una azul y una roja?

$$P[\text{una azul y una roja}] = P[1^a \text{ azul y } 2^a \text{ roja}] + P[1^a \text{ roja y } 2^a \text{ azul}] =$$

Como antes, el suceso "sacar una bola azul y una roja" está compuesto por dos sucesos, que serán:
- "sacar 1^a azul, 2^a roja"
- "sacar 1^a roja, 2^a azul"
Por lo que tenemos que sumar las probabilidades de estos dos sucesos

Pero ahora, las experiencias son dependientes, entonces:
$P[1^aA,2^aR] = P[1^aA] \cdot P[2^aR/1^aA]$
$P[1^aR,2^aA] = P[1^aR] \cdot P[2^aA/1^aR]$

$$= P[1^a\text{azul}] \cdot P[2^a\text{roja}/1^a\text{azul}] \ + \ P[1^a\text{roja}] \cdot P[2^a\text{azul}/1^a\text{roja}] =$$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$