

PROBLEMAS PAU BLOQUE II. ANÁLISIS. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES (CIENCIAS)

TIPO I. FUNCIONES SIN PARÁMETROS

1. Problema 5. Julio 2023. Consideramos la función $f(x) = \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}$.

- a) Comprobar que $x = -\frac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable. **(2 puntos)**
- b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(4 puntos)**
- c) Obtener $\int f(x)dx$. **(4 puntos)**

2. Problema 5. Junio 2023. Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x+1)$. Obtener:

- a) El dominio y las asíntotas de $f(x)$. **(2 puntos)**
- b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. **(4 puntos)**
- c) El área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. **(4 puntos)**

3. Problema 5. Junio 2022. Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$. Obtener:

- a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. **(1 punto)**
- b) Las asíntotas de la función. **(2 puntos)**
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos. **(3 puntos)**
- d) La integral de la función $f(x)$. **(4 puntos)**

4. Problema 3. Julio 2021. Se considera la función $f(x) = xe^{1-x^2}$, calculad:

- a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos. **(4 puntos)**
- b) Las asíntotas y la gráfica de f . **(3 puntos)**
- c) La integral $\int f(x)dx$. **(3 puntos)**

5. Problema 3. Junio 2021. Consideremos la función $f(x) = \frac{x-1}{x(x+2)}$. Obtened:

- a) El dominio y las asíntotas de la función. **(2 puntos)**
- b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. **(4 puntos)**
- c) La integral $\int f(x)dx$. **(4 puntos)**

6. Problema 3. Septiembre 2020. Dada la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El dominio de definición y las asíntotas de la función f . **(3 puntos)**
- b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función. **(3 + 1 puntos)**
- c) El valor de $\int_2^3 f(x)dx$. **(3 puntos)**

7. Problema 3. Julio 2020. Se da la función real f definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}$. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El dominio y las asíntotas de la función f . **(3 puntos)**
- b) La integral $\int f(x)dx$, así como la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $(2, 0)$. **(3+1 puntos)**
- c) El área de la región limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$. **(3 puntos)**

8. Problema A.3. Junio 2019. Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(3 puntos)**
- b) La representación gráfica de la curva de la curva $y = f(x)$. **(2 puntos)**
- c) **El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x) = f(x) + a x$. (4 puntos)**
- d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)dx$, $\int xe^{-x}dx$ **(1 punto)**

9. Problema A.3. Junio 2018. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2-x}$ se pide obtener, razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$. **(2 puntos)**
- b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$. **(4 puntos)**
- c) El área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$. **(4 puntos)**

10. Problema A.3. Julio 2016. Se da la función f definida por $f(x) = x^2 + |x|$, donde x es un número real cualquiera y $|x|$ representa el valor absoluto de x . Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El punto o puntos donde la gráfica de la función f corta a los ejes de coordenadas. **(2 puntos)**
- b) La justificación de que la curva $y = f(x)$ es simétrica respecto al eje de ordenadas. **(1 punto)**

- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f **(2 puntos)** y el extremo relativo de la función f , justificando si es máximo o mínimo. **(1 punto)**
- d) La representación gráfica de dicha curva $y = f(x)$. **(1 punto)**
- e) Las integrales definidas $\int_{-1}^0 f(x)dx$ y $\int_0^2 f(x)dx$. **(1,5 + 1,5 puntos)**

11. Problema A.3. Septiembre 2016. Dada la función definida por $f(x) = x^2 e^{-x}$. Obtener razonadamente:

- a) El dominio y el recorrido de la función . **(2 puntos)**
- b) Los valores de x donde la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ alcanza el máximo relativo y el mínimo relativo. **(2 puntos)**
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función f . **(2 puntos)**
- d) Los valores de x donde la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ tiene los puntos de inflexión. **(2 puntos)**
- e) La gráfica de la curva $f(x) = x^2 e^{-x}$, explicando con detalle la obtención de su asíntota horizontal. **(2 puntos)**

12. Problema A.3. Junio 2011. Sea la función definida por $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$.

Obtener razonadamente:

- a) El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$. **(3 puntos)**
- b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$. **(4 puntos)**
- c) La integral $\int f(x)dx = \int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx$. **(3 puntos)**

13. Problema 3.1. Septiembre 2009. Se consideran las funciones reales $f(x) = 2x^2 + 12x - 6$ y $g(x) = (x - 2)(x^2 + 9)$. Se pide obtener razonadamente:

- a) Las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\frac{f(x)}{g(x)}$. **(1,6 puntos).**
- b) La función $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ que cumple $H(3) = \frac{\pi}{3}$. **(1,7 puntos).**

14. Problema 3.2. Junio 2008. Se considera la función real $f(x) = x^2 - 4$. Obtener, explicando el proceso de cálculo:

- a) La gráfica de la curva $y = f(x)$. **(2 puntos)**
- b) Los valores de x para los que está definida la función real $g(x) = \ln f(x)$. **(1,3 puntos)**

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $g(x)$, razonando si tiene, o no, máximo absoluto. **(1,3 puntos)**

15. Problema 3.1. Septiembre 2007. Se consideran las funciones reales $f(x) = 4x^2 + 2x + 10$ y $g(x) = x^3 + x^2 + 5x + 5$. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\frac{f(x)}{g(x)}$. **(1,6 puntos)**

b) Calcular la función función $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ que cumple $H(0) = 0$. **(1,7 puntos)**

16. Problema 3.1. Junio 2007. Se consideran las funciones reales $f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5$ y $g(x) = 6x^2 - 7x + 2$. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\frac{f(x)}{g(x)}$. **(1,6 puntos)**

b) Calcular la función función $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ que cumple $H(1) = 1$. **(1,7 puntos)**

17. Problema 3. Junio 2006.

a) Dibujar razonadamente la gráfica de la función $g(x) = x^2 - 4$, cuando $-1 \leq x \leq 4$ **(1,1 puntos)**

b) Obtener razonadamente los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = |x^2 - 4|$ en el intervalo $[-1, 4]$. **(1,1 puntos)**

c) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$ y las rectas $x = -1$, $x = 4$ e $y = 0$. **(1,1 puntos)**

TIPO II. FUNCIONES CON PARÁMETROS

18. Problema 5. Julio 2024. Se considera la función $h(x) = ax + x^2$ donde a es un parámetro real. Se pide:

a) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abcisa $x = \frac{-3}{4}$. **(4 puntos)**

b) Para el valor de a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. **(2 puntos)**

c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. **(5 puntos)**

19. Problema 5. Junio 2024. Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

- a) Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$. **(3 puntos)**
- b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. **(5 puntos)**
- c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo $[-1, 1]$. **(2 puntos)**

20. Problema A.3. Julio 2017. Se consideran las curvas $y = x^3$, $y = ax$ y la función $f(x) = x^3 - ax$, siendo a un parámetro real y $a > 0$. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes coordenados y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f . **(1 + 2 puntos)**
- b) La gráfica de la función f cuando $a = 9$. **(3 puntos)**
- c) Calcular en función del parámetro a , el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = ax$, cuando $a > 1$. **(2 puntos)**
- d) El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. **(2 puntos)**