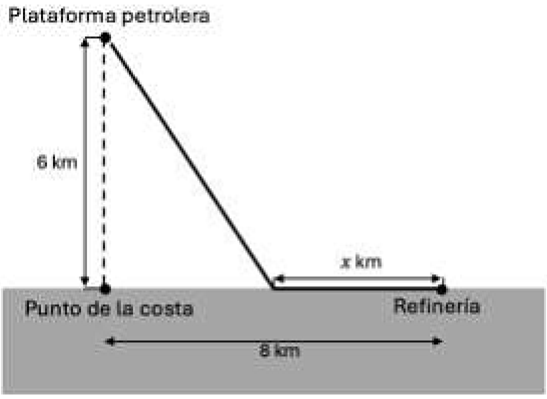
PROBLEMAS PAU BLOQUE II. ANÁLISIS
OPTIMIZACIÓN (CIENCIAS)

TIPO I. GEOMETRÍA PLANA

1. Problema 4.2. Julio 2025 extra. Una costa marítima se extiende en línea recta hacia la derecha desde un punto P de la costa. A 8 km de P hay una refinería situada en la costa. Además, hay una plataforma petrolífera en el mar que está situada a 6 km de distancia de P en la recta perpendicular a la costa desde el punto P. Se construirá un oleoducto desde la plataforma hasta la refinería. El coste de construir el oleoducto bajo el agua es de 1 millón de euros por kilómetro y el de construirlo sobre tierra, de 0,6 millones de euros por kilómetro.



a) **(0.5 puntos)** Encontrar la función del coste de construcción del oleoducto dependiendo de la distancia, x, entre el primer punto donde el oleoducto toca la costa y la refinería.
b) **(1.5 puntos)** Encontrar el valor de x para que el coste de construcción del oleoducto sea mínimo.
c) **(0.5 puntos)** Calcular dicho coste.

2. Problema 4.2. Modelo 2025. Responda a todos los subapartados siguientes:

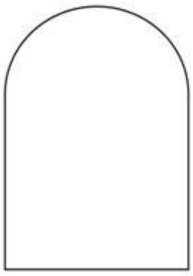
Una ventana Norman está formada por un rectángulo y un semicírculo. El semicírculo está apoyado sobre el lado horizontal superior del rectángulo, que coincide con el diámetro horizontal del semicírculo.

La base del rectángulo mide x y su altura mide y, por lo que el diámetro del semicírculo mide x.

Obtener:

a) **(1 punto)** La expresión $S(x)$ que da el área de una ventana Norman de perímetro 5 metros en función de su anchura x.
b) **(1.5 puntos)** El valor de x para el que la función $S(x)$ tenga un máximo relativo y el valor de dicha área máxima.

3. Problema 6. Julio 2023. Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo tal y como se indica en la siguiente figura.

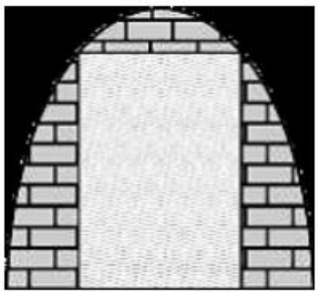


Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros:

a) **(3 puntos)** Calcular el área de la ventana en función de su anchura x.
b) **(5 puntos)** Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz.
c) **(2 puntos)** Calcular el valor de dicha área máxima.

4. Problema 6. Junio 2023. El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$, donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:

a) **(6 puntos)** Calcular las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible.
b) **(4 puntos)** Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta de piedra.

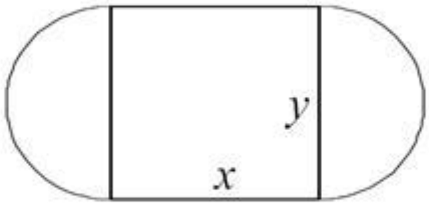


5. Problema 6. Junio 2022. Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m. de longitud.

a) **(3 puntos)** Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo.
b) **(7 puntos)** Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima.

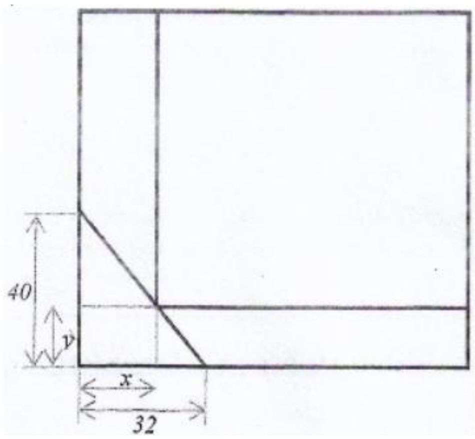
6. Problema 6. Julio 2021. Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia fuera. La superficie del campo mide $(4 + \pi)$ metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal y como se observa en la figura. Se pide:

a) **(5 puntos)** Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo.
b) **(5 puntos)** Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima.



7. Problema 6. Junio 2021. Un espejo plano, cuadrado, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectángulo R, uno de cuyos vértices es el punto (x, y) (véase la figura).

a) **(4 puntos)** Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x, cuando $0 \leqslant x \leqslant 32$.
b) **(4 puntos)** Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima.
c) **(2 puntos)** Calculad el valor de dicha área máxima.



8. Problema 6. Septiembre 2020. Los vértices de un triángulo son $A(0, 12)$, $B(-5, 0)$ y $C(5, 0)$.Se desea construir un rectángulo inscrito en el triángulo anterior, de lados paralelos a los ejes coordenados y dos de cuyos vértices tienen coordenadas $(-x, 0)$ y $(x, 0)$ siendo $0 \leqslant x \leqslant 5$. Los otros dos vértices están situados en los segmentos AB y AC.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) **(4 puntos)** La expresión $f(x)$ del área del rectángulo anterior.
b) **(3 puntos)** El valor de x para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido.

c) **(3 puntos)** La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo.

9. Problema 6. Juliol 2020. En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) **(4 puntos)** La expresión del área $A(x)$ del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado.
b) **(4 puntos)** Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $A(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 20$.
c) **(2 puntos)** La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de este área.

10. Problema B.3. Juliol 2019. Un proyectil está unido al punto $(0,2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2,0)$ y $(2,0)$. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) **(2 puntos)** La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x,\ 4-x^2)$ de la curva $y = 4-x^2$ y el punto $(0,2)$.
b) **(2 puntos)** Los puntos de la curva $y = 4-x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2 \leqslant x \leqslant 2$.
c) **(2 puntos)** Los puntos de la curva $y = 4-x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2 \leqslant x \leqslant 2$.
d) **(4 puntos)** El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4-x^2$ e $y = 2-|x|$ cuando $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

TIPO II. GEOMETRÍA ESPACIAL

11. Problema 4.2. Julio 2025 reserva. Se quiere construir un bote de refresco cilíndrico de volumen 33 cm^3 que tenga un área total (incluyendo las tapas) mínima. Se pide:

a) **(0.5 puntos)** Expresar el área total del bote en función del radio de su base y de su altura.
b) **(1.5 puntos)** Obtener las dimensiones que minimizan el área total del bote.
c) **(0.5 puntos)** Hallar dicha área.

12. Problema 4.2. Junio 2025 reserva. Se considera un prisma triangular de altura h cm, cuya base es un triángulo equilátero de lado x cm. El prisma tiene área total (área que incluye el área de las caras laterales y de las bases superior e inferior) igual a 10 cm^2. Se pide:

a) **(0.5 puntos)** Expresar el área total del prisma en función de x y h.
b) **(1.5 puntos)** Obtener los valores de x y h que maximizan el volumen.
c) **(0.5 puntos)** Hallar dicho volumen.

13. Problema 4.1. Junio 2025. Una empresa de paquetería quiere diseñar distintos modelos de cajas. Uno de esos modelos consiste en una caja de 80 cm^3 de volumen, con base y tapa cuadradas. El precio del material de las paredes laterales es de 1 céntimo por cm^2. La base y tapa se construirán con un material de calidad superior a las caras laterales de la caja, siendo éste un 25% más caro. Obtener:

a) **(0.75 puntos)** La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x.
b) **(1.25 puntos)** Las dimensiones de la caja para que la función $P(x)$ tenga el menor valor posible.
c) **(0.75 puntos)** El precio del material en el caso anterior.

14. Problema 6. Julio 2024. Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud x en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:

a) **(8 puntos)** Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible.
b) **(2 puntos)** Dicho volumen.