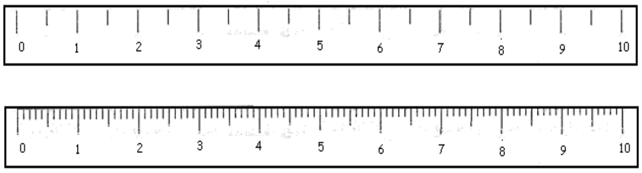
1. Los instrumentos de medida

Cuando queremos obtener el valor de una magnitud, tendremos que escoger un instrumento que mida tal magnitud. Por ejemplo para determinar la masa de un cuerpo utilizamos una balanza, para la longitud una cinta métrica, para la temperatura un termómetro, para el tiempo un cronómetro, etc. Cuando hablamos de instrumentos de medida hay que reflexionar sobre algunos aspectos; por ejemplo, ¿nos servirá igual una balanza de tendero que una de laboratorio para medir la masa de una pastilla de medicamento?, ¿podríamos saber si tenemos fiebre con el termómetro de exterior que hay en la terraza o necesitaríamos un termómetro clínico? Los instrumentos planteados, balanzas y termómetros, tienen diferente sensibilidad, cualidad muy importante en un aparato de medida. La sensibilidad de un aparato de medida es la mínima cantidad que el aparato puede medir. Así, una balanza que marca hasta los gramos, podrá medir como mínimo 1 gramo y tendrá por tanto una sensibilidad de un 1 gramo y un termómetro que marque hasta las décimas de grado, tendrá una sensibilidad de 0,1 ºC.

A1) Indicar la sensibilidad de las reglas siguientes:



……
……

Es evidente que cuando expresamos el resultado de una medida deberemos tener en cuenta la sensibilidad del aparato, ¿o a caso podríamos decir que un objeto medido con la regla de arriba de la figura, tiene una longitud de 2,8 cm? Obviamente no, lo más que se podría decir es que su longitud está entre 2,5 y 3,0 cm. Cuando medimos con un instrumento llamamos cifras significativas a todas las que nos proporciona el instrumento. Por tanto las cifras significativas son los dígitos de una magnitud medida experimentalmente que establecen la precisión con que se conoce la magnitud. Si medimos con una regla que aprecia hasta los milímetros, en la medida 1,523 m, las cuatro cifras son significativas, igual que si se escribe 152,3 cm o 1523 mm.

Para definir la bondad de un instrumento de medida se suelen utilizar dos términos de forma indistinta aunque no significan exactamente lo mismo, la exactitud y la precisión. Un aparato es exacto si las medidas realizadas con él son próximas al valor "verdadero" de la magnitud medida. Un aparato es preciso cuando la diferencia entre medidas diferentes es pequeña. La exactitud implica normalmente precisión, pero la precisión no implica necesariamente exactitud (puede ser un aparato preciso que posea poca exactitud debido a errores sistemáticos como el error de cero, etc.)

2. Incertidumbre en la medida

Podríamos realizar la siguiente experiencia: necesitamos una persona voluntaria y varias más, por ejemplo 5 participantes con 5 cintas métricas. De forma independiente y aislada, cada participante medirá la altura del voluntario y anotará su valor sin decírselo al resto. ¿Han obtenido el mismo resultado? Es evidente que no y que tenemos por tanto una incertidumbre en el valor de la altura del voluntario. Pero, ¿por qué son diferentes las medidas? El valor real de una magnitud no se conoce nunca puesto que aunque se realice la medida de la forma más cuidadosa posible, la medida siempre lleva asociada la presencia de errores, en el sentido que ahora explicaremos.

Se pueden producir errores de los denominados no aleatorios, cuya responsabilidad recae en los elementos de la medida (el medidor o el instrumento) o en el método utilizado para realizar la medida. El error sistemático es un error que aparece de forma repetida en una serie de medidas porque hay un error inherente en el sistema de medida por ejemplo debido a que un instrumento de medida presenta un error de cero. El error accidental es un error cometido por la persona que lleva a cabo una medida, como el error al hacer una lectura en la temperatura que marca un termómetro. En el caso de la altura del voluntario, el medidor puede tener un problema de visión, la cinta métrica puede estar mal numerada o lo que habrá sido más habitual, la forma de hacerlo no ha sido correcta, por ejemplo al colocar la cinta métrica. Estos errores, si se detectan, son subsanables.

Existen otros errores que se denominan aleatorios o accidentales que se producen por causas imprevisibles y no controlables (aleatorias) que hacen que al repetir una medida, no siempre se obtiene el mismo valor. Por ejemplo al medir con una cinta métrica metálica se puede dilatar o contraer por pequeñas variaciones de temperatura, al pesar una cantidad de sustancia puede contener más o menos humedad según la humedad del momento, al medir el tiempo de deslizamiento de un cuerpo por una superficie puede estar más o menos limpia afectando al rozamiento, etc. Estos errores pueden provocar desviaciones respecto del valor real, por exceso o por defecto (por arriba o por abajo). Pero entonces, ¿qué podemos hacer si el valor estrictamente real nunca se conocerá exactamente?

3. Expresión de las medidas experimentales

Como valor verdadero de la magnitud medida se toma el valor medio de las medidas obtenidas. Pero, ¿será fiable?, o dicho de otra forma, ¿cómo saber lo fiable que es este valor? El indicador será el error absoluto, valor numérico mayor elegido entre la sensibilidad del aparato de medida y la desviación media de las medidas. Veamos un ejemplo que aclarará este punto. Se mide la masa de diferentes unidades de una pieza de un proceso de fabricación

Masa (g)	Desviación
10,4	10,4-10,3 =+ 0,1
10,5	10,5-10,3 = + 0,2
10,1	10,1-10,3 =- 0,2
10,2	10,2-10,3 = - 0,1

Valor medio = 10,3 g
Para la desviación media se toman los valores en valor absoluto (sin signo): Desviación media = (0,1 + 0,2 + 0,2 + 0,1)/4 = 0,15 g
Sensibilidad aparato = 0,1 g

El error absoluto se debe tomar con una sola cifra significativa (pues si es la sensibilidad del aparato será el valor de una sola división de su escala como 1 mm, 0,1 ºC o 0,01 s). Por tanto el error absoluto tendrá sólo un dígito distinto de cero, siendo este número redondeado por exceso en una unidad si la segunda cifra significativa es 5 o mayor. Esta regla tiene dos excepciones, si la primera cifra significativa es un 1 o si es un 2 y la segunda no llega a 5; en estos casos, el error tendrá las dos primeras cifras significativas con el redondeo de la segunda como se ha explicado. Por tanto en este ejemplo el error absoluto que deberemos tomar será la desviación media expresada como 0,2 g (redondeo de 0,15 g). Otros ejemplos de expresión de errores absolutos: 0,0045 m →0,005 m ; 0,0032 g → 0,003 g ; 0,014 s → 0,014 s

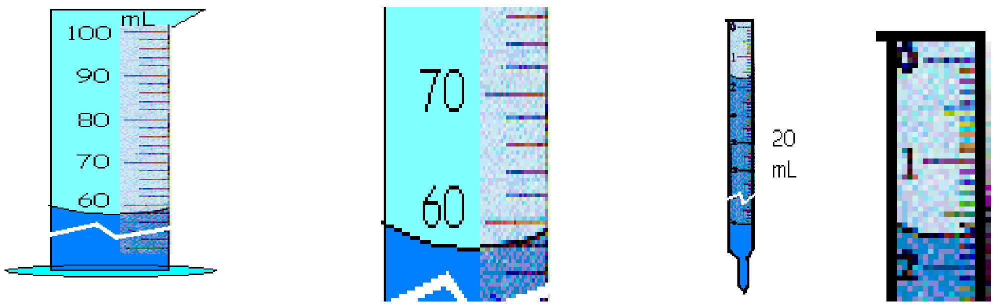
Se acepta como forma correcta de expresar una medida la fórmula siguiente:

$$\boxed{x_m \pm E_a}$$

Siendo x_m el valor medio de los valores medidos y E_a el error absoluto. Obviamente el valor medio deberá tener el mismo orden decimal que el error absoluto. Por tanto la expresión correcta del ejemplo anterior, sería: Masa = 10,3 $\pm$ 0,2 g

A2) Corrige las expresiones de las siguientes medidas que sean incorrectas:
2,418 $\pm$ 0,123 ……………………………………
5,42 $\pm$ 0,12 ……………………………………
4,3 $\pm$ 0,09 ……………………………………
5,20 $\pm$ 0,09 ……………………………………

A3) Ejemplo resuelto: Expresar correctamente el volumen de líquido contenido en la probeta y volumen consumido en la pipeta de la figura adjunta.



Como se trata de medidas únicas, el valor medio es el valor que marca el instrumento y el error absoluto, la sensibilidad del mismo. Resulta pues:

Probeta: 58 ± 2 mL   Bureta: $1,7 \pm 0,1$ mL

Existe un razonamiento matemático complejo, conocido como teoría de errores que trata de evaluar la fiabilidad de que el verdadero valor de una magnitud esté dentro del intervalo que marca una medida correctamente expresada con su error. Esta teoría está basada en suponer que las desviaciones (errores) de una medida siguen una distribución de Gauss, es decir que hay un valor central de error (valor medio) y errores mayores y menores que el valor medio con probabilidad decreciente a medida que nos alejamos del valor central. Este estudio se suele aplicar si se han realizado 15 o más medidas y acepta que el error absoluto es igual a la desviación standard (también llamada error cuadrático medio). La teoría de errores permite saber que el valor verdadero de la magnitud medida, estará comprendido entre unos valores determinados con una probabilidad determinada. Por ejemplo la probabilidad de que el valor de la magnitud medida esté comprendida entre (x_m- 2.σ) y (x_m + 2.σ) está evaluada en un 95 %, siendo σ la desviación típica de las medidas realizadas.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - x_m)^2}{n-1}}$$

x_i cada uno de los valores de la medida
$\bar{x}$ media aritmética de las medidas
n número de medidas

La varianza es la media de los cuadrados de las desviaciones. La desviación típica (estándar en inglés) es la raíz cuadrada de la varianza. Si la desviación típica es pequeña, los datos están agrupados cerca de la media; si es grande, están muy dispersos. Para una muestra de datos el estadístico se representa por δ, siendo:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum(x_i - x_m)^2}{n}}$$

Para una población de datos, el parámetro se representa por σ, siendo:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - x_m)^2}{n-1}}$$

Ejemplo de cálculo:

Masa (g)	Desviación	Cuadrado desviaciones
10,4	10,4-10,3 =+ 0,1	0,01
10,5	10,5-10,3 = + 0,2	0,04
10,1	10,1-10,3 =- 0,2	0,04
10,2	10,2-10,3 = - 0,1	0,01

Suma del cuadrado de las desviaciones = 0,1

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - x_m)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,1}{4-1}} = 0,18 \ldots = 0,2$$

Aunque en muchos contextos se utiliza el término de desviación típica para referirse a ambas expresiones, el cambiar el denominador (n) por (n-1) hace que esta segunda fórmula sea una estimación más precisa para realizar inferencias a una población (precisamente el ejemplo mostrado no sería una población, por sus pocos datos pero entiéndase a modo de ejemplo para simplificar el cálculo)

A modo de pequeño resumen:

- Medida directa y única → Error absoluto = sensibilidad del aparato
- Medida directa, repetida pocas veces → Error absoluto = número mayor entre la sensibilidad y la desviación media de las medidas
- Medida directa realizada gran número de veces (más de 10) → Error absoluto = desviación típica σ

4. Error relativo de una medida

¿Tiene la misma importancia equivocarse en 1 cm al medir un folio que al medir un campo de fútbol? Evidentemente no y para diferenciar estas situaciones se introduce el concepto de error relativo. El error relativo se calcula como el cociente entre el error absoluto y el valor verdadero (valor medio). Si este cociente se multiplica por cien, entonces el error relativo estará expresado en porcentaje.

$$E_{rx} = (E_x / x)$$

A4) Calcular los errores relativos cometidos al pesar un objeto de un kilogramo de masa, con una balanza de cocina de sensibilidad 1 g y con una balanza de baño de 100 g de sensibilidad.

……

……

Hemos visto como expresar el margen de confianza de una medida realizada directamente, pero ¿cuál será el error de una medida obtenida por una operación matemática a partir de otras medidas? ¿Será la suma de los errores de las medidas directas?, ¿dependerá de la operación matemática? …

5. Error de una medida indirecta

Utilizando el cálculo diferencial (derivadas) se obtienen unas fórmulas que permiten calcular el error cometido en una medida indirecta, conocidos los errores de las directas. Las más sencillas son las siguientes:

Error de una suma o diferencia, es igual a la suma de los errores absolutos

$Z = x + y$ o $Z = x - y$ → $E_z = E_x + E_y$

Error de un producto o cociente, es igual a la suma de los errores relativos

$Z = x \cdot y$ o $Z = x / y$ → $E_{rz} = E_{rx} + E_{ry}$

Caso general

$Z = x^m / y^n$ → $E_{rz} = m \cdot E_{rx} + n \cdot E_{ry}$

Por tanto, si la medida se obtiene por suma o diferencia de otras, el error absoluto asociado será la suma (los errores nunca se restan, siempre se suman) de los errores absolutos de las medidas directas. Por ejemplo, si medimos una masa por diferencia de otras dos, con errores absolutos de 0,5 y 0,05 g entonces el error de la medida será 0,6 g (0,55 al redondear a 1 cifra significativa queda 0,6). Si la medida se obtiene como producto o cociente de otras, el error relativo asociado será la suma de los errores relativos de las medidas directas. Por ejemplo si medimos una densidad como cociente entre masa y volumen, con errores relativos del 1% y del 2%, entonces el error relativo de la densidad será del 3%.

Existe otro método diferente al anterior que permite deducir las mismas reglas que acabamos de presentar. Veamos, a modo de ejemplo, la deducción para el caso de la multiplicación:

$$z = x \cdot y$$

$$(z \pm Ez) = (x \pm Ex) \cdot (y \pm Ey)$$

$$(z \pm Ez) = x.y + x.Ey + y.Ex + \cancel{Ex.Ey}$$

Dividiendo por (x.y)

$$1 + \frac{Ez}{z} = 1 + \frac{Ey}{y} + \frac{Ex}{x}$$

$$\frac{Ez}{z} = \frac{Ex}{x} + \frac{Ey}{y}$$

En ocasiones para evaluar de forma más rápida el error de una medida indirecta, se utiliza otro método que consiste en aceptar que el resultado de una medida indirecta no deberá presentar más cifras significativas que aquella medida directa con menor número de cifras significativas. Veamos un ejemplo para aclarar este punto.

A5) Ejemplo resuelto

Determinación de la densidad de un líquido

Masa = 20,80 $\pm$ 0,01 g → 4 cifras significativas

Volumen = 10,2 $\pm$ 0,1 cm^3 → 3 cifras significativas

Densidad = (20,80/10,2) = 2,0392… g/ cm^3

Según la regla enunciada, tendremos que tomar 3 cifras significativas en la densidad y por tanto:

Densidad = 2,0392… g/ cm^3

$$\text{Densidad} = 2{,}03\cancel{9}2\ldots\ g/cm^3 = 2{,}04\ \ g/cm^3$$

$$\text{Densidad} = 2{,}04 \pm 0{,}01\ g/cm^3$$

A6) Ejemplo resuelto. Calcular el error al determinar la aceleración de la gravedad mediante la medida del periodo de un péndulo.

$$T = 2\ \pi\ .\ \sqrt{\frac{L}{g}}$$

L = 1000 $\pm$ 1 mm
T = 2,00 $\pm$ 0,01 s

Como $g = 4\ \pi^2\ .\ L\ .\ T^{-2}$

Según $Z = x^m / y^n$ → $E_{rz} = m\ .\ E_{rx} + n\ .\ E_{ry}$; $E_{rg} = 1\ .\ E_{rL} + 2\ .\ E_{rT}$

$$g = 9{,}87 \pm 0{,}11\ m/s^2$$