UD 3 Álgebra en movimiento. Cinemática

La palabra ***álgebra*** proviene del árabe. Aparece por primera vez en un tratado del siglo IX, «Al–jebr W,almugabala», que significa transposición y eliminación.

Transposición es la traslación de términos de un lado a otro de una igualdad y eliminación es la supresión de términos iguales.

1. LENGUAJE ALGEBRAICO

El **lenguaje algebraico** es el formado por números, letras que representan a números y los símbolos de las operaciones aritméticas. Este lenguaje nos va a permitir traducir problemas formulados verbalmente a lenguaje matemático de manera exacta, lo cual facilitará su resolución.

Las expresiones formadas por números, letras que representan a números y los signos de las operaciones aritméticas que se realizan entre ellos se llaman **expresiones algebraicas**.

Cada una de las letras que intervienen en una expresión algebraica se denomina **variable**.

Ejemplo:

$2x + 7 = 2(2x - 3)$, donde ***x*** es la variable.

Hallar el **valor numérico de una expresión algebraica** consiste en dar valores concretos a las variables. Por ejemplo: sabemos que el área de un rectángulo es ***A= b · h***. Si necesitamos saber el área de una habitación de 5 m de largo y 7 de ancho, sustituimos la letra ***b*** por 5 y la ***h*** por 7. El resultado es **A = 35 m²**.

Llamamos **identidad** a una igualdad cierta para cualquier valor de las variables.

Ejemplo:

$$x + 3 = x + 5 - 2$$

En Matemáticas existen identidades muy importantes que reciben el nombre de **identidades notables**. Son las siguientes:

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$
Recuerda que la igualdad es **reversible**

Realiza las actividades 1, 2, 4 y 5.

2. ECUACIONES

Se denomina **ecuación** a toda igualdad que sólo es cierta para algunos valores de las variables. En este caso, las variables se llaman **incógnitas** y, cada sumando, **término de la ecuación**. Los términos numéricos se denominan **términos independientes**.

Al valor de la variable (o los valores de las variables) para el cual es cierta la igualdad se le llama **solución** de una ecuación. Ésta puede ser única, pueden ser varias o incluso puede que la ecuación no tenga solución. En este caso concreto a la ecuación la llamaremos **ecuación imposible**.

Realiza la actividad 3.

3. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Resolver una ecuación es hallar el valor de la incógnita:

$$x + 12 = 46$$

En esta igualdad, $x + 12$ está en el **primer miembro** (a la izquierda del signo =), y 46 está en el **segundo miembro** (a la derecha del signo =). Nuestro objetivo es aislar la ***x***, es decir, dejarla **sola** en alguno de los miembros. En este caso, tenemos que trasponer el 12.

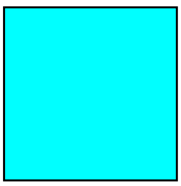
$$x + 12 - 12 = 46 - 12$$

$x = 46 - 12$, de donde $x = 34$

Para simplificar el proceso, podemos generalizar diciendo que, para despejar (dejar sola) la ***x***, podemos trasponer los términos que la acompañan pasándolos al otro miembro haciendo la operación contraria. (Si estaba sumando, pasa restando; si estaba restando, pasa sumando; si estaba multiplicando, pasa dividiendo; si estaba dividiendo, pasa multiplicando).

Ejemplo:

El perímetro de un cuadrado es 12 m. ¿Cuánto mide cada uno de los lados?



$$4 \cdot x = 12$$

$$x = \frac{12}{4}\ ;\ x = 3$$

Solución: Cada lado mide 3 m.

Es importante que, una vez resuelta la ecuación, compruebes el resultado. Esto se hace sustituyendo la ***x*** por el valor que has hallado y comprobando que se mantiene la igualdad. En este caso:

$$4 \cdot 3 = 12$$

Realiza las actividades de la 6 a la 11.

4. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES MÁS COMPLEJAS

A veces nos encontramos ecuaciones donde la incógnita nos aparece repetida y en ambos miembros:

Método de resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita

1. Quitar paréntesis. Si no los hay, pasar al paso 2.
2. Quitar denominadores. Si al quitar denominadores aparecen paréntesis, volver al paso 1. Si no hay denominadores, pasar al paso 3.
3. Agrupar en un miembro los términos con **x** y en el otro los que no la tengan.
4. Simplificar.
5. Despejar la **x**.

Ejemplo:

$$6x + 5 - 3x = 15 - 2x$$

Cuando nos encontremos una ecuación de este tipo, es conveniente agrupar en un miembro los términos con ***x*** y en el otro los que no la tengan.

$$6x - 3x + 2x = 15 - 5$$

$$5x = 10$$

$$x = \frac{10}{5}$$, de donde $x = 2$

En las ecuaciones donde aparecen fracciones, lo primero que hemos de procurar es eliminarlos. Esto lo haremos reduciendo todos los términos a común denominador.

Ejemplo:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{5} - 6 = 8$$

$$\frac{5x}{10} + \frac{2x}{10} - \frac{60}{10} = \frac{80}{10}$$

Prescindiendo de los denominadores:

$$5x + 2x - 60 = 80$$

Y ya podemos resolver trasponiendo términos:

$$5x + 2x = 80 + 60$$

$$7x = 140$$

$$x = \frac{140}{7}$$, de donde $x = 20$

De igual manera se aplica este método si hemos de despejar fórmulas matemáticas. Por ejemplo, si tenemos que despejar el radio, ***r***, en la fórmula de la superficie del círculo:

$$S = \pi \cdot r^2$$

$$r^2 = \frac{S}{\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

Realiza las actividades 12 y 13.

5. APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

No existe una receta única que nos conduzca a un final feliz en la resolución de un problema, aunque te vamos a facilitar un procedimiento que, junto con la práctica, te lo va a allanar bastante.

Procedimiento para resolver un problema

1. Lee atentamente el enunciado del problema hasta comprenderlo.
2. Elige adecuadamente la incógnita.
3. Traduce el enunciado del problema a lenguaje algebraico.
4. Resuelve la ecuación obtenida.
5. Comprueba la solución en la ecuación.
6. Da una respuesta al problema
7. Comprueba dicha respuesta con el enunciado del problema

5.1. Problemas de tipo aritmético

La suma de tres números impares consecutivos es 1.845. Determina de qué números se trata.

Planteamiento:

Un número impar se puede escribir así: $2x + 1$.

Tengo que considerar que sean consecutivos. Vendrán dados por:

$\mathbf{2x + 1}$
$2x + 1 + 2 = \mathbf{2x + 3}$
$2x + 3 + 2 = \mathbf{2x + 5}$

La suma de los tres ha de ser 1.845

$$\mathbf{(2x + 1) + (2x + 3) + (2x + 5) = 1.845}$$

Resolvemos la ecuación:

$$6x + 9 = 1.845;\ x = 306$$

Solución:

Primer número: 2 · 306 + 1 = **613**
Segundo número: 2 · 306 + 3 = **615**
Tercer número: 2 · 306 + 5 = **617**

Comprobación:

Son todos impares y su suma es 1.845.

5.2. Problemas de edades

Un hombre de 40 años tiene un hijo de 10 años. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea el doble que la del hijo?

Planteamiento:

Sea ***a*** el número de años que deben transcurrir. Entonces el padre tendrá 40 + *a* años y el hijo 10 + *a* años.

Nos dicen que la edad del padre será doble que la del hijo, por tanto:

$$\mathbf{40 + a = 2(10 + a)}$$

Resolvemos la ecuación:

$$\mathbf{40 + a = 20 + 2a;\ a = 20\ años}$$

Solución:

El padre tendrá 40 + 20 = 60 años.
El hijo tendrá 10 + 20 = 30 años.

Comprobación:

$$60 = 2 \cdot 30$$

5.3. Problemas de mezclas

¿Cuántos litros de vino de 3 euros/l hay que mezclar con 40 litros de vino de 2 euros/l para obtener vino a 2,75 euros/l?

Planteamiento:

Designemos por ***x*** la cantidad de litros de vino que hemos de mezclar. Su valor será 3*x* euros. El valor de los 40 litros de vino a 2 euros por litro es:

$$40 \cdot 2 = 80 \text{ euros.}$$

En total tendremos *x* + 40 litros que deseamos vender a 2,75 euros el litro y cuyo importe es:

$$(x + 40)\ 2{,}75 \text{ euros}$$

Resolvemos la ecuación:

$$\mathbf{3x + 40 \cdot 2 = (x + 40)\ 2{,}75}$$

Solución:

x = 120 litros de vino de 3 € por litro

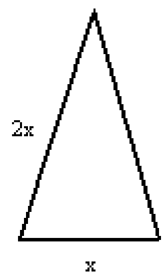
Comprobación:

$$3 \cdot 120 + 40 \cdot 2 = (120 + 40) \cdot 2{,}75$$

5.4. Problemas geométricos

El perímetro de un triángulo isósceles mide 15 cm. Calcula la longitud de sus lados sabiendo que el lado desigual mide la mitad de cada uno de los otros dos.

Planteamiento:



Un dibujo como el que aparece en el margen nos podría aclarar el problema. Recuerda que un triángulo isósceles tiene dos lados iguales. Si llamamos ***x*** al lado desigual, los otros miden **2*x*** cada uno (el doble).

El perímetro es la suma de todos los lados:

$$\mathbf{x + 2x + 2x = 15}$$

Resolvemos la ecuación:

$$5x = 15;\ x = \frac{15}{2};\ x = 3$$

Solución:

$x = 3$, por lo que un lado mide 3 cm y cada uno de los otros dos miden 6 cm.

Comprobación:

Si sumamos los tres lados obtenemos el perímetro: 3 + 6 + 6 = 15.

Realiza las actividades de la 14 a la 27.

A C T I V I D A D E S

1. Traduce al lenguaje algebraico las siguientes frases:

a) la mitad de un número más ocho.
b) el doble de un número menos su mitad
c) aumenta en cuatro el triple de un número
d) la suma de los cuadrados de dos números
e) disminuye en seis el doble del cuadrado de un número

2. Escribe en lenguaje algebraico las siguientes informaciones relativas a la base y la altura de un rectángulo:

a) la base es el doble que la altura.
b) la base excede en cinco unidades a la altura.
c) La altura es dos quintos de la base.
d) El área del rectángulo es de 75 cm^2.
e) La base y la altura difieren en 3 unidades

3. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones para el valor de la variable que se indica:

a) $3x + 2y$, para $x = 1$; $y = 0$
b) $3(x + 2)^2$, para $x = 1$; $x = -2$; $x = 3/2$
c) $2(x - y)^2$, para $x = 2$; $y = -3$

4. Desarrolla las siguientes igualdades:

a) $(a + b)^2$
b) $(a - b)^2$
c) $(1 - a)(1 + a)$
d) $(3 + b)^2$
e) $(b + 6)(b - 6)$
f) $(2a - 1)^2$
g) Comprueba que son identidades cada uno de los apartados anteriores dando diversos valores y viendo que los resultados coinciden.

5. Expresa como potencias o productos las siguientes sumas:

a) $x^2 - 1$
b) $x^2 + 4 + 4x$
c) $49 - 9x^2$
d) $9x^2 - 6x + 1$
e) $x^2 - 12x + 36$
f) $x^2 - y^2$

6. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x + 28 = 12$
b) $x - 10 = 12$
c) $x + 2 = 8$
d) $5 - x = 3$
e) $9 - x = 0$
f) $x + 5 = 81$
g) $8 - x = 1$

7. Resuelve estas ecuaciones:

a) $3x = 6$
b) $5x = 25$
c) $9x = 99$
d) $2x = 64$
e) $2x = 5$

f) $6x = 1$
g) $7x = 3$
h) $12x = 21$

8. Halla el valor de la incógnita en cada ecuación:

a) $3x - 6 = 0$
b) $5s - 4 = 16$
c) $7y + 5 = 33$
d) $1 - 2x = 0$
e) $190 - 9z = 100$
f) $37 - 3x = 1$

9. Encuentra el valor de *x*:

a) $5x + 7x = 12$
b) $9x + 14x = 50$
c) $3x - 2 = 4x - 7$
d) $2x - 7 = 3x + 8$
e) $11x + 7x + 3x = 7$
f) $4x + 12x = 30 + 15x$
g) $29 - 17x = 5x$
h) $-3x + 2 = x - 10$

10. Resuelve:

a) $2(x - 1) = 0$
b) $5(1 - x) = 0$
c) $7(x - 2) = 42$
d) $9(2x - 3) = 9$
e) $3(3 + x) = 2x + 10$
f) $(x - 1)9 = 6x + 18$
g) $x + 7 = 2(x - 3)$
h) $12 + 2(x - 3) = 3$

11. Resuelve las ecuaciones:

a) $2(x + 3) - 6(5 + x) = 4x + 8$

b) $5(2 - x) + 3(x + 6) = 10 - 4(6 + 2x)$

c) $3x + 8 - 5x - 5 = 2(x + 6) - 7x$

d) $4x - 2 + 6(x - 4) = 6 + 2x$

12. Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{(-3)+x}{-2} = 4$ b) $\frac{x+3}{3} = x + 5$

c) $\frac{x-1}{-5} = 3$ d) $\frac{2x+6}{-2} = x - 5$

13. Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{x}{4} + \frac{2}{3} = \frac{35}{12}$

b) $\frac{3x}{7} + \frac{4}{5} = \frac{2x}{2} - \frac{12}{35}$

14. ¿Qué número sumado con 15 da 28?

15. ¿Qué número multiplicado por 3 y sumando luego 7 da 19?

16. La suma de dos números impares consecutivos es 32. ¿Cuáles son dichos números?

17. Tres números pares consecutivos suman 150. ¿De qué números se trata?

18. Halla tres números consecutivos que sumen 663. ¿Existirán tres números pares consecutivos que sumen 663?

19. halla dos números impares consecutivos sabiendo que la diferencia de sus cuadrados es 24.

20. Si al doble de un número le sumamos 5 obtenemos su triple. ¿De qué número hablamos?

21. Encuentra dos números naturales que sumen 48 y que al dividir uno entre otro se obtenga 3 de cociente y 4 de resto.

22. Juan tiene 28 años menos que su padre. Dentro de 15 años, la edad de éste será el doble de la de Juan. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Soluciones

1. **a**) $\frac{x}{2}+8$; **b**) $2x-\frac{x}{2}$; **c**) 4 + 3x; **d**) $x^2 + y^2$; **e**) $2x^2 - 6$
2. **a**) $b = 2a$; **b**) $b - 5 = a$; **c**) $a = \frac{2}{5}b$; **d**) $a \cdot b = 75$; **e**) $b - 3 = a$
3. **a**)3; **b**) 27 para x = 1;0 para x = 2; $\frac{147}{4}$ para x = $\frac{3}{2}$ **c**) 50.
4. **a**) $a^2 + b^2 + 2ab$; **b**) $a^2 + b^2 - 2ab$; **c**) $1 - a^2$; **d**) $9 + b^2 + 6ab$; **e**) $b^2 - 36$; **f**) $4a^2 + 1 - 4a$; **g**) Respuesta libre.
5. **a**) $(x - 1)(x + 1)$; **b**) $(x + 2)^2$; **c**) $(7 - 3x)(7 + 3x)$; **d**) $(3x - 1)^2$; **e**) $(x - 6)^2$; **f**) $(x - y)(x + y)$.
6. **a**) – 16; **b**) 22; **c**) 6; **d**) 2; **e**) 9; **f**) 76; **g**) 7.
7. **a**) 2; **b**) 5; **c**) 11; **d**) 32; **e**) $\frac{5}{2}$; **f**) $\frac{1}{6}$; **g**) $\frac{3}{7}$; **h**) $\frac{7}{4}$.
8. **a**) 2; **b**) 4; **c**) 4; **d**) $\frac{1}{2}$; **e**) 10; **f**) 12.
9. **a**) 1; **b**) $\frac{50}{23}$; **c**) 5; **d**) – 15; **e**) $\frac{1}{3}$; **f**) 30; **g**) $\frac{29}{22}$; **h**) 3.
10. **a**) 1; **b**) 1; **c**) 8; **d**) 2; **e**) 1; **f**) 9; **g**) 13; **h**) $-\frac{3}{2}$.
11. **a**) – 4; **b**) – 7; **c**) 3; **d**) 4.

12. **a**) – 5; **b**) – 6; **c**) – 14; **d**) 1.
13. **a**) 9; **b**) 2.
14. x + 15 = 28; x = 13.
15. 3x + 7 = 19; x = 4.
16. (2x + 1) + (2x + 3) = 32; x = 7. Sol: 15 y 17.
17. 2x + 2x + 2 + 2x + 4 = 150; x = 24. Sol: 48, 50 y 52.
18. x + x + 1 + x + 2 = 663; x = 220. Sol: 220, 221 y 222. / No
19. $(2x + 3)^2 – (2x + 1)^2 = 24$; x = 2. Sol: 7 y 5.
20. 2x + 5 = 3x; x = 5.
21. 3(48 – x) = x – 4; x = 37. Sol: 37 y 11.
22. 2(15 + x) = (x + 28) + 15. Sol: Juan, 13 años; Padre, 41 años.
23. 42 + x = 3(12 + x). Sol: 3 años.
24. x + 48 = 2(x + 25); x = – 2. Ocurrió hace dos años.
25. 3x – 30 = x + 8; x = 19. Sol: Madre, 57 años; hija, 19 años.
26. x(x – 3) + 26 = (x + 2) (x – 1); x = 7. Sol: b, 7 cm; h, 4 cm.
27. $x^2 + 51 = (x + 3)^2$; x = 7 cm.

Funciones

INTRODUCCIÓN

Partiendo de la representación de los números enteros en la recta numérica, introducimos la representación de puntos en el plano mediante la asignación de pares de coordenadas y la construcción de sistemas de ejes cartesianos.

Es importante que los alumnos asimilen el modo ordenado de colocar los pares de números para indicar que el primero de ellos representa el valor sobre el eje horizontal (*X*), y el segundo, el valor sobre el eje vertical (*Y*), así como su expresión mediante tablas de valores y el significado gráfico en el plano.

Habiendo tratado ya la proporcionalidad numérica, continuamos en esta unidad el estudio de la relación entre dos magnitudes por medio de las funciones, los conceptos básicos del lenguaje gráfico de las expresiones algebraicas, sus elementos y significado como paso previo al análisis del mundo de la información y expresión visual.

Mediante la interpretación gráfica, los alumnos van a reconocer la función representada, las variables que intervienen, la unidad de medida elegida en cada eje y su trazado en el plano. También aprenderán a interpretar funciones que cumplen relaciones de proporcionalidad directa e inversa.

RESUMEN DE LA UNIDAD

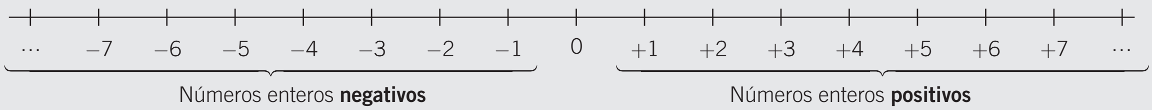
- Para representar puntos en el plano utilizamos un sistema de dos rectas perpendiculares, llamado *sistema de ejes cartesianos*.
- A la recta horizontal (*X*), se le llama *eje de abscisas.*
- A la recta vertical (*Y*), se le llama *eje de ordenadas.*
- El punto donde se cruzan los ejes se llama *origen* y es el valor cero de cada eje.
- Cada punto en el plano tiene dos referencias numéricas llamadas *coordenadas* (*a*, *b*). El primer número corresponde al valor en el eje *X*, y el segundo número corresponde al valor en el eje *Y*.
- Los *pares de valores* se representan en tablas de valores y corresponden a puntos en el plano.
- Mediante una *tabla de valores* podemos relacionar cantidades de dos magnitudes y representarlas gráficamente sobre los ejes.
- Una función es la expresión algebraica que relaciona dos magnitudes. La función asocia a cada valor de una magnitud (*variable independiente*) un valor de la otra magnitud (*variable dependiente*).
- Las funciones se representan gráficamente para estudiar las características que las definen.

REPRESENTAR Y LOCALIZAR PUNTOS EN UN SISTEMA DE EJES CARTESIANOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS EN LA RECTA NUMÉRICA

- Sobre una recta *r* señalamos el origen *O*, que es el valor cero, 0.
- A la **derecha** del cero y equidistante colocamos ordenados los números enteros **positivos**, y a la **izquierda**, colocamos los números enteros **negativos**.



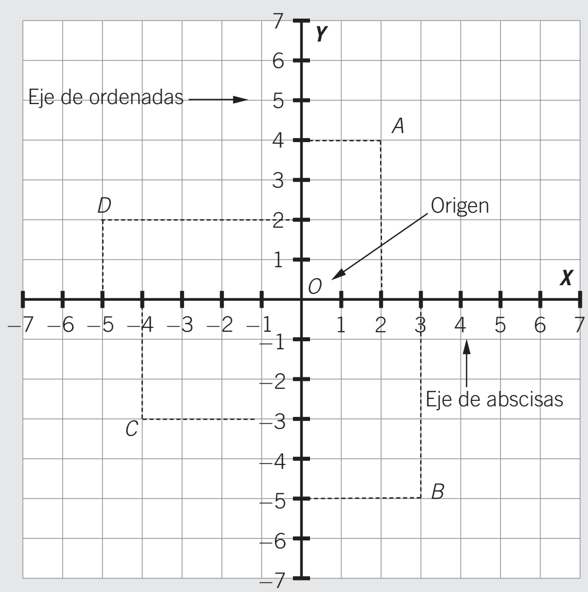
1 **Dados los números –2, +2, –5, +5, –8, +8, –10, +10:**

a) Represéntalos en la recta numérica.

b) ¿Cuál está más cerca y cuál está más lejos del origen?

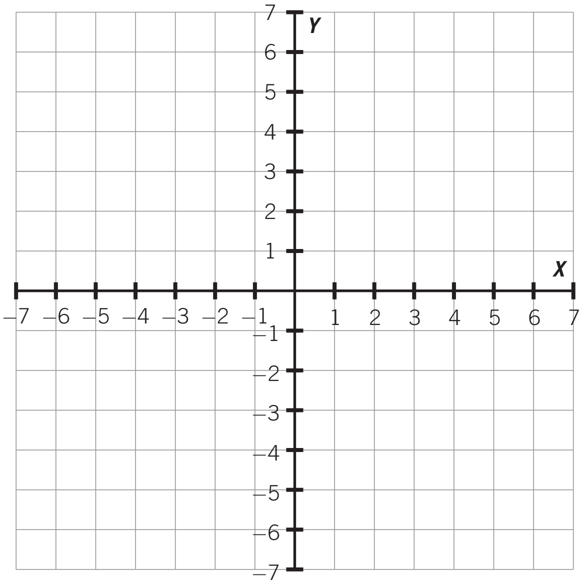
EJES CARTESIANOS EN EL PLANO

- Para representar puntos en el plano, utilizamos un sistema formado por dos rectas perpendiculares llamado **sistema de ejes cartesianos**.
  - En la **recta *X*** o **eje de abscisas** se representan los números enteros de forma horizontal.
  - En la **recta *Y*** o **eje de ordenadas** se representan los números enteros de forma vertical.
  - El punto donde se cruzan se llama **origen** y es el valor cero, 0, en cada recta.
- Cada punto en el plano tiene dos referencias numéricas llamadas **coordenadas**.
  - El primer número corresponde a la **coordenada *x***.
  - El segundo número corresponde a la **coordenada *y***.



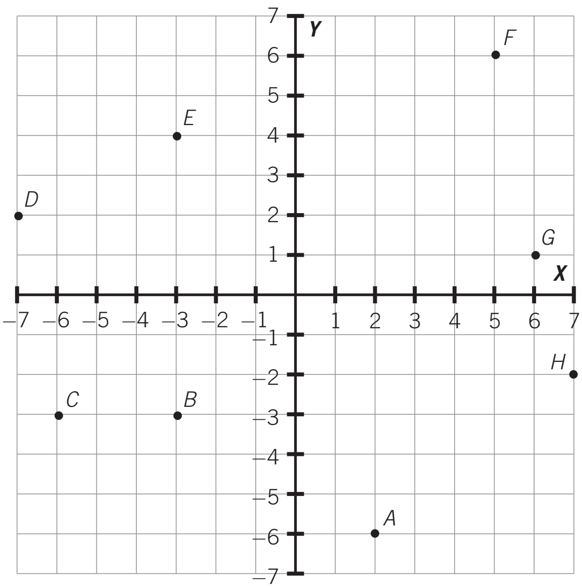
PUNTO	COORDENADAS	EJE *X*	EJE *Y*
A	(+2, +4)	+2	+4
B	(+3, –5)	+3	–5
C	(–4, –3)	–4	–3
D	(–5, +2)	–5	+2

2 **Completa la tabla y representa los puntos que se indican en un sistema de ejes cartesianos.**



PUNTO	COORDENADAS	EJE *X*	EJE *Y*
A	(–2, –4)		
B	(+3, +6)		
C	(+5, –3)		
D	(–1, +7)		
E	(+4, 0)		
F	(–4, 0)		

3 **Observa los puntos dele sistema de ejes cartesianos y completa la tabla.**



PUNTO	COORDENADAS	EJE *X*	EJE *Y*
A	(+2, –6)		
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			

INTERPRETAR Y REPRESENTAR TABLAS DE VALORES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

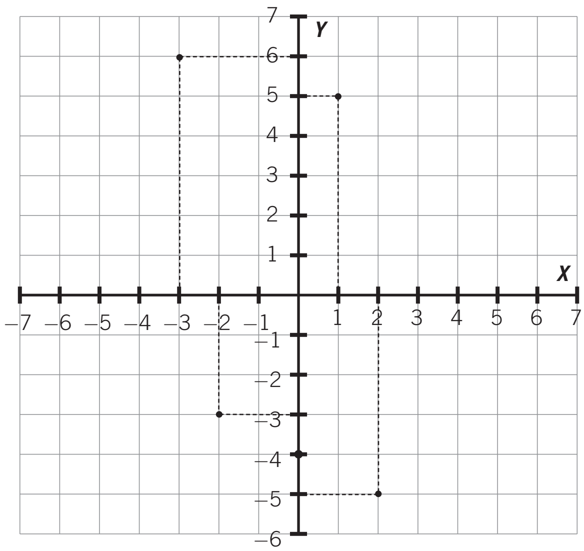
TABLAS DE VALORES Y PUNTOS EN EL EJE CARTESIANO

- Podemos expresar parejas de valores de números mediante pares de valores utilizando tablas horizontales o verticales. Cada par de valores de una tabla representa un punto del plano, y viceversa.
- A cada punto del plano le corresponde un par de valores ordenados:
  a) La primera fila o columna corresponde al valor numérico del eje horizontal, *X*.
  b) La segunda fila o columna corresponde al valor numérico del eje vertical, *Y*.

EJEMPLO

Forma la tabla y representa los pares de valores.
(–2, –3), (2, –5), (–3, 6), (1, 5), (0, –4)

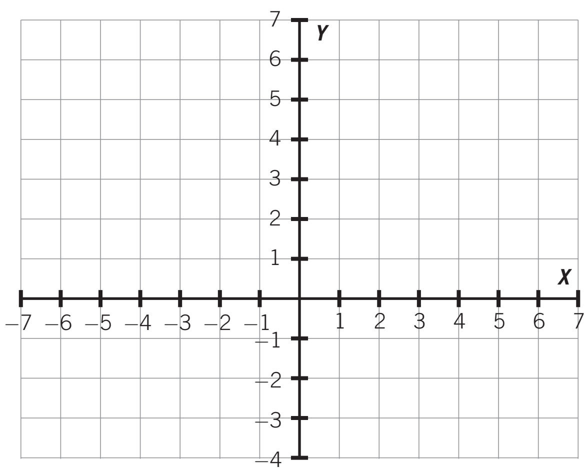
EJE *X*	EJE *Y*
–2	–3
2	–5
–3	6
1	5
0	–4



1 **Forma los pares de valores que se indican en la tabla y represéntalos en un sistema de ejes cartesianos.**

Pares de valores: ....

EJE *X*	EJE *Y*
4	7
2	–1
–1	6
4	0
–1	–3
–2	5



2 **Forma la tabla de valores de los siguientes pares ordenados y represéntalos en un sistema de ejes cartesianos.**

(0, –4), (–5, 5), (2, –2), (–3, 6), (7, 0), (–4, 0), (6, 6)

Mediante una **tabla** podemos relacionar cantidades de dos magnitudes.

EJEMPLO

Un saco de azúcar pesa 2 kilogramos, 2 sacos de azúcar pesan 4 kilogramos, 3 sacos de azúcar pesan 6 kilogramos...

Formamos la tabla de valores con las dos magnitudes.

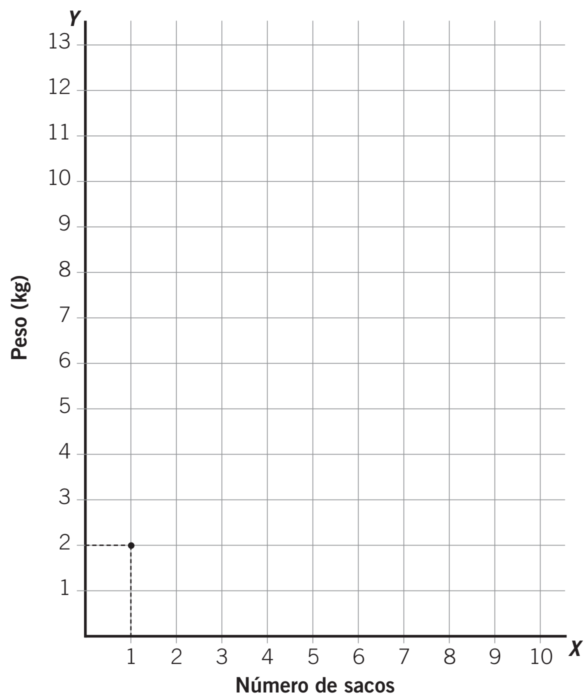
N.º DE SACOS	1	2	3	4	5	6	…
PESO (kg)	2	4	6	8	10	12	…

También podemos reflejar esta información en un sistema de ejes.

3 **Representa en el sistema de ejes los valores del ejemplo anterior.**

– En el eje *X* se representan los valores de la magnitud *número de sacos*.

– En el eje *Y* se representan los valores de la magnitud *peso* (en kg).



OBJETIVO 3

INTERPRETAR GRÁFICAS. RECONOCER LA IDEA DE FUNCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

VARIABLES Y GRÁFICAS

- En las tablas de valores se relacionan dos magnitudes.Dichas magnitudes se llaman **variables**, porque toman distintos valores, es decir, varían.
- En los pares de valores (*a*, *b*), (*c*, *d*), (*e*, *f*) y (*g*, *h*), el segundo valor depende del primero:
  – *a*, *c*, *e*, *g* son la **variable independiente**; su valor se fija previamente y se designan con la letra *x*.
  – *b*, *d*, *f*, *h* son la **variable dependiente**; su valor depende del valor de *x* y se designan con la letra *y*.
- Si representamos los valores en un sistema de ejes y unimos sus puntos, obtenemos una **gráfica**:
  – La variable independiente (*x*) se sitúa en el eje de abscisas u horizontal.
  – La variable dependiente (*y*) se sitúa en el eje de ordenadas o vertical.

x	*y*
a	*b*
c	*d*
e	*f*
g	*h*

EJEMPLO

Un kilo de fresas cuesta 3 €.

a) Magnitudes: *peso* (kg) y *precio* (€).

b) Variable independiente: peso (kg) (se fija previamente).

c) Variable dependiente: precio (€) (depende del número de kilos).

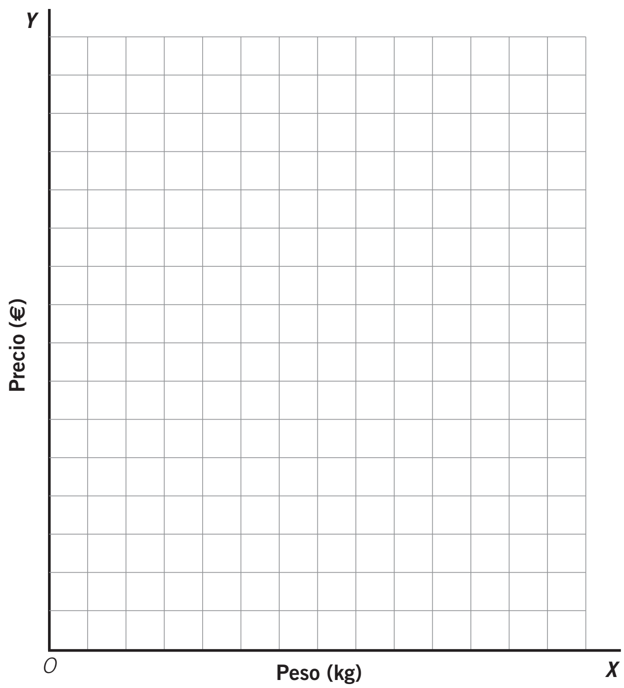
d) Tabla de valores:

PESO (kg)	1	2	3	4	5
PRECIO (€)	3	6	9	12	15

1 **Respecto al ejemplo anterior:**

a) Representa los pares de valores en el sistema de ejes adjunto.

b) Une los puntos. ¿Qué obtienes?



4 **La temperatura media durante el año pasado en un lugar viene determinada por la siguiente tabla de valores.**

MES	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Sep.	Octubre	Nov.	Dic.
TEMPERATURA (°C)	4	8	12	18	22	26	32	34	26	14	10	2

a) Representa los valores en un sistema de ejes y traza la gráfica correspondiente.

b) Indica las variables dependiente e independiente.

c) ¿Cuál fue el mes con menor temperatura media?

d) ¿Y el mes con mayor temperatura?

CONCEPTO DE FUNCIÓN

- En los ejercicios anteriores, los valores obtenidos en cada puesto de clasificación del equipo de fútbol y en cada temperatura media están en función de los valores de cada jornada jugada y de cada mes del año.
- El valor de y está en función del valor que toma x. La relación entre dos magnitudes la podemos escribir con una expresión algebraica, es decir, combinando letras, números y signos aritméticos.
- A cada valor de la variable independiente (x) le corresponde un único valor de la variable dependiente (y).
- Así, en la expresión algebraica $3x + 1$, cada vez que se asignen valores numéricos a la variable x se obtendrán otros valores numéricos que están en función de ellos: multiplicamos por tres y sumamos uno.

En $3x + 1$:

VALOR DE x	VALOR OBTENIDO
0	$3 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$
1	$3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4$
2	$3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$
-1	$3 \cdot (-1) + 1 = -3 + 1 = -2$
-2	$3 \cdot (-2) + 1 = -6 + 1 = -5$

→

Se expresa: $y = 3x + 1$

x (valor)	y (valor)
0	1
1	4
2	7
-1	-2
-2	-5

5 **Elabora la tabla de valores de cada una de las siguientes funciones.**

a) $y = x + 2$

x	*y*
0	
1	3
–1	
2	
–2	

Ejemplo: $x = 1$
$y = 1 + 2 = 3$

c) $y = 2x - 1$

x	*y*
0	
–1	–3

Ejemplo: $x = -1$
$y = 2 \cdot (-1) - 1 = -2 - 1 = -3$

e) $y = 2x + 1$

x	*y*
1	3

Ejemplo: $x = 1$
$y = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$

b) $y = -3x$

x	*y*

d) $y = 2 - x$

x	*y*

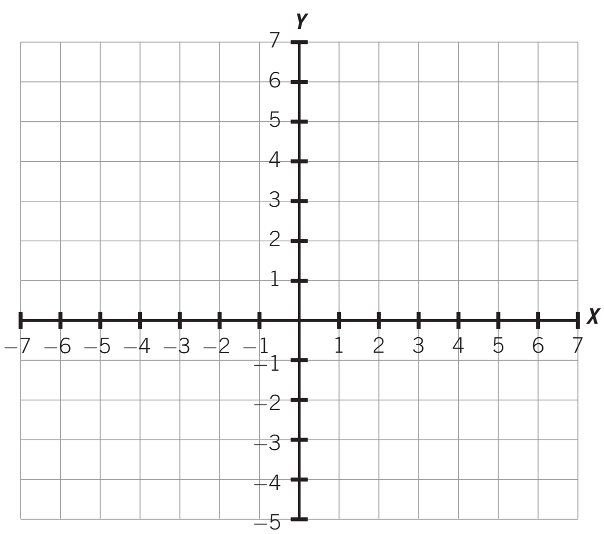
f) $y = x - 5$

x	*y*

6 **Representa gráficamente las funciones: calcula los pares de valores mediante una tabla y une los puntos obtenidos en los sistemas de ejes cartesianos.**

a) $y = x - 1$

x	*y*
0	
1	
–1	
2	
2	



CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES

Cuando representamos funciones mediante gráficas podemos observar las siguientes características.

- Pueden ser **crecientes**: si al aumentar la variable independiente también aumenta la variable dependiente, la gráfica crece.
- Pueden ser **decrecientes**: si al aumentar la variable independiente, disminuye la variable dependiente, la gráfica decrece.
- La gráfica de **funciones de proporcionalidad directa**, que relaciona dos magnitudes directamente proporcionales, es una línea recta que pasa por el origen, es decir, por el punto (0, 0).
- La gráfica de **funciones de proporcionalidad inversa**, que relaciona dos magnitudes inversamente proporcionales, es una línea curva que no pasa por el origen.

7 **Un kilogramo de pescado cuesta 2 €, y su función viene definida por la expresión $y = 2x$.**

a) Elabora una tabla de valores para el precio de 2, 3, 4, 5 y 6 kg de pescado.

b) Representa los valores en un sistema de ejes y dibuja la gráfica obtenida.

c) Describe alguna característica de la gráfica.

8 **Un camión recorre una distancia de 120 km, de modo que si aumenta la velocidad, hasta un límite de 80 km/h, tardará menos tiempo en recorrer dicha distancia. La función que relaciona el tiempo que tarda (y) con la velocidad (x) viene definida por la expresión $y = \dfrac{120}{x}$.**

a) Elabora una tabla de valores para estas velocidades (en km/h): 40, 65, 70 y 80.

b) Representa los valores en un sistema de ejes y dibuja la gráfica obtenida.

c) Describe alguna característica de la gráfica.

: ESTUDIO DEL MOVIMIENTO. CINEMÁTICA

2.1 Definición de movimiento y su carácter relativo. Sistemas de referencia.

Si echamos un vistazo a nuestro alrededor comprobaremos que gran parte de los objetos y personas que nos rodean se encuentran en movimiento. Así, por ejemplo vemos como los coches en marcha se mueve, las personas que transitan por la calle, los pájaros que vuelan, el viento, el sol, las olas del mar, el agua de un río, o incluso nosotros mismos estamos en continuo movimiento. Pero, ¿qué es el movimiento? ¿cómo sabemos que un objeto se mueve? Una persona que va tranquilamente sentada en el asiento de un tren en marcha ¿se mueve o no? Una persona que está durmiendo en su cama plácidamente, ¿se está moviendo o no? En esta unidad intentaremos dar respuesta a todas estas preguntas y algunas otras que irán surgiendo más adelante.

El **movimiento** es un fenómeno físico que se define como todo *cambio de posición que experimentan los cuerpos en el espacio, con respecto al tiempo y a un punto de referencia.* Si un objeto se encuentra en un punto dado en un instante dado y al cabo de un tiempo se encuentra en otro punto diferente sabemos que dicho objeto se ha movido. Pero para saber que un objeto se ha movido necesitamos tener algún sistema de referencia respecto del cual haya cambiado su posición a lo largo del tiempo. Imagina que vas en un tren en plena noche por un paraje solitario (a través de las ventanas no se distingue nada en el exterior del tren y por supuesto el tren es magnífico y no produce nada de traqueteo). Te resultará difícil distinguir si el tren está parado o se mueve con velocidad constante. Obviamente, durante el día resulta fácil distinguir el reposo del movimiento porque a través de las ventanas del tren se aprecia como dejamos atrás los objetos del exterior que nos sirven de referencia.

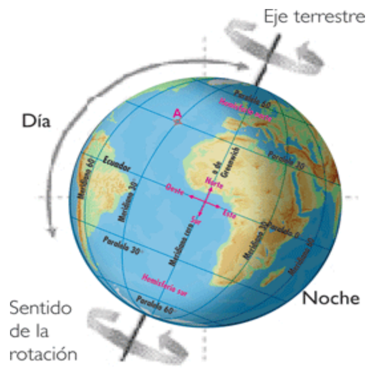
Queda claro que para hablar de movimiento es necesario establecer previamente un sistema de referencia respecto al que comparar las posiciones de los objetos. Así mismo puede ocurrir que un mismo objeto esté en movimiento respecto a un sistema de referencia y en reposo respecto a otro sistema distinto. Por ejemplo, un viajero que va sentado en un tren en marcha está moviéndose con respecto al andén de la estación, pero está en reposo con respecto a otro viajero que va delante de él también sentado.

De acuerdo con estas nociones podemos asegurar que *el movimiento es un concepto relativo, puesto que un mismo objeto puede estar en reposo o en movimiento dependiendo del sistema de referencia que se considere.*

EJEMPLO

Una farola de la calle ¿está en reposo o en movimiento?

La pregunta que se plantea admite dos respuestas. Según el sistema de referencia elegido podemos decir que la farola está en reposo o en movimiento. Por ejemplo, con respecto a un árbol que haya cerca de la farola, ésta se encontrará en reposo, pues su posición en relación con el árbol no cambia con el tiempo. Pero si tomamos como referencia la Luna, por ejemplo, la farola sí que estaría en movimiento, pues la Tierra está continuamente girando sobre su eje (rotación) y por tanto , la farola también está girando.



El ejemplo anterior nos lleva a un interesante planteamiento. Si la Tierra está continuamente girando sobre sí misma y además en torno al Sol y el Sol a su vez se mueve por la Galaxia y ésta se mueve por el universo, podemos llegar a la conclusión de que en el universo no existe el reposo absoluto, puesto que no existe un sistema de referencia universal que podamos asegurar que se encuentra en reposo absoluto. Esta observación es esencialmente cierta. Pero ¿entonces cuando decimos que un objeto está en "reposo"?
Cuando nosotros estudiamos los movimientos cotidianos que nos rodean, no tiene sentido tomar como sistema de referencia objetos fuera de la propia Tierra (ésta posibilidad se podría plantear, aunque complicaría bastante el estudio del movimiento). Al estudiar movimientos cotidianos tomamos sistemas de referencia cercanos y de acorde con la escala de espacio en la que se desarrolla el movimiento. En esta situación podemos asegurar que respecto a un semáforo, un vehículo se mueve cuando se acerca o se aleja y en esta escala de estudio sí que podemos decir que el semáforo está en "reposo" porque no cambia su posición respecto a todo lo que tiene a su alrededor.

Debe quedar claro que para detectar un movimiento, cualquier punto u objeto podría servir como sistema de referencia. Un semáforo, el edificio del final de la calle, un árbol, una ventana de un edificio, el suelo, el techo de una habitación, una pared, etc. No obstante, el estudio de un movimiento respecto de un sistema de referencia puede ser muy sencillo, pero puede ser muy complicado respecto de otro sistema de referencia. Para estudiar los movimientos de los cuerpos es importante elegir el sistema de referencia adecuado en el que sea más sencillo el estudio.

Recuerda

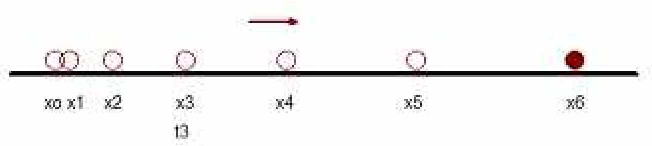
<u>Movimiento</u>: *cambio de posición que experimentan los cuerpos en el espacio, con respecto al tiempo y a un punto de referencia.*

El movimiento es un concepto relativo, pues un objeto puede considerarse que está en reposo o en movimiento dependiendo del sistema de referencia con el que se compare.

2.2 Magnitudes del movimiento: posición, trayectoria, espacio recorrido y desplazamiento.

Para estudiar el movimiento de los objetos hemos de conocer algunos aspectos importantes que nos van a dar una idea de cómo se mueven esos objetos. Por ejemplo, necesitamos conocer la posición inicial, la posición final al cabo de un cierto tiempo, la trayectoria, si se mueve en una línea, en un plano, en un volumen, etc.

Los movimientos más sencillos de describir son aquellos que se producen *en una sola dimensión* (siguiendo una línea). Por ejemplo, un equilibrista andando por un cable. El punto de referencia en este caso es un sencillo. Podría considerarse como referencia cualquiera de los extremos del cable, o también el punto medio del cable.



Los movimientos *en dos dimensiones* son aquellos que se producen sobre un plano (por ejemplo, una hormiga que se mueve sobre una pared). En este caso el sistema de referencia más conveniente sería el formado por los bordes del plano, es decir las esquinas de la pared (anchura y altura). Se trata en este caso de un sistema de ejes perpendiculares o ejes cartesianos (que veremos más adelante). Cuando nos movemos sobre el suelo de la clase o de nuestra casa, por ejemplo, también nos estamos moviendo sobre un plano (es decir, en dos dimensiones). Las bolas de billar sobre la mesa también constituyen otro ejemplo de movimiento en un plano.

Los movimientos en tres dimensiones son aquellos que se desarrollan en todas las direcciones posibles dentro de un volumen. Por ejemplo, una mosca que vuela en una habitación se mueve en tres dimensiones (arriba-abajo, derecha-izquierda, delante-detrás). Para fijar la posición de la mosca en un instante dado se necesita un sistema de referencia constituido por tres ejes perpendiculares (tres dimensiones). En este nivel de conocimientos no incluiremos el estudio de los movimientos en tres dimensiones por la complejidad operativa que puede llegar a presentar.

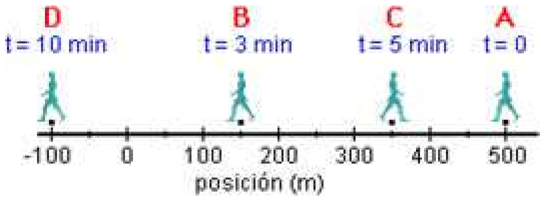
Una vez que se ha fijado el sistema de referencia adecuado, se llama **posición** al lugar que ocupa un objeto en un instante dado con respecto a ese sistema de referencia.

Por ejemplo, si consideramos una pista de atletismo para la carrera de 100 m lisos, estamos planteando un movimiento en una dimensión cuyo sistema de referencia más adecuado es el punto cero, es decir, el punto de inicio de la carrera. Una vez que el atleta inicia la carrera su posición va cambiando con respecto al tiempo. La posición en este ejemplo vendrá definida en cada instante por la distancia a la que se encuentra el atleta desde el origen.

Para indicar la posición en un instante dado de un objeto o persona que se mueve en una dimensión (en línea recta) hay que indicar la distancia a la que se encuentra del origen en ese instante y también en qué lado del origen se encuentra (derecha o izquierda, por encima o por debajo). Observa el siguiente ejemplo:

EJEMPLO

El dibujo siguiente representa una persona que está paseando por un camino recto. Indica cuál es la posición de la persona en cada instante y describe brevemente el movimiento que ha realizado.



Representaremos la posición con la letra x. En el instante inicial (t=0), la persona se encuentra a 500 metros a la derecha del origen. Decimos que su posición inicial es X_0 = 500 m

A los 3 minutos su posición es x_3 = 150 m (a la derecha del origen).
Al os 5 minutos su posición es x_5 = 350 m (a la derecha del origen).
A los 10 minutos su posición es x_{10} = - 100 m (a la izquierda del origen).

Como vemos, para diferenciar un lado u otro del origen se utilizan los signos positivo o negativo. Se considera positivo la parte derecha del origen y negativo la parte a la izquierda del origen.

La persona se ha movido hacia la izquierda durante 3 minutos, después cambió de sentido y se movió hacia la derecha hasta el minuto 5 y después volvió a cambiar de sentido moviéndose hacia la izquierda otra vez hasta el minuto 10.

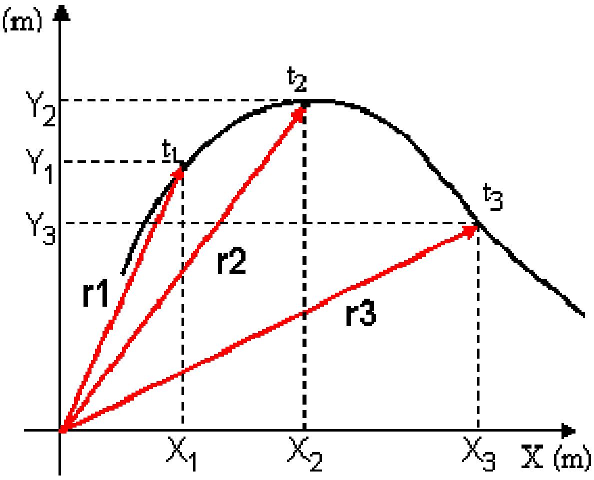
Podemos calcular los metros total que ha recorrido esta persona en los 10 minutos.

- De A hasta B ha recorrido 350 metros.
- De B hasta C ha recorrido 200 metros.
- De C hasta D ha recorrido 450 metros.

En total ha recorrido 350 + 200 + 450 = 1000 metros.

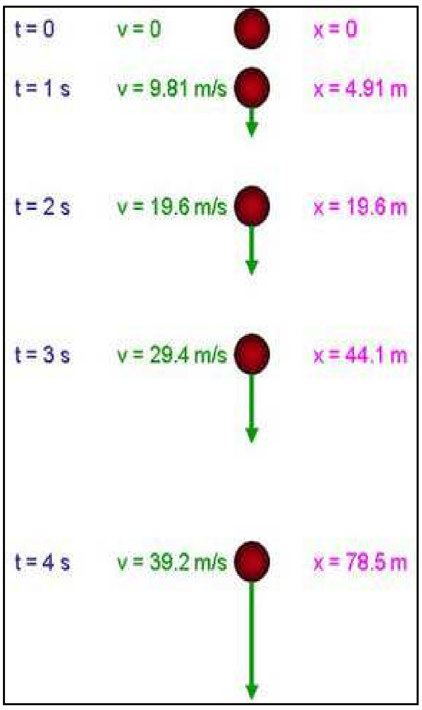
Otro dato que nos aporta información sobre cómo se ha movido un cuerpo es su **trayectoria**.

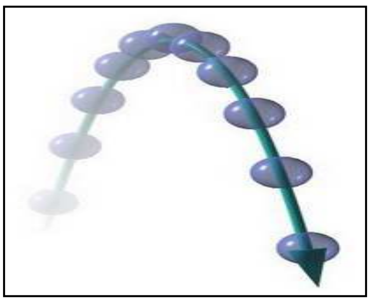
Imaginemos que fotografiamos un objeto mientras se mueve de manera que cada segundo le echamos una foto sobre la posición que ocupe en cada instante. Obtendremos múltiples posiciones a lo largo del tiempo. Esas posiciones son puntos que al unirlos formarían una línea. A esta línea la llamamos trayectoria. Así pues, la **trayectoria** *es el camino que ha seguido un móvil a lo largo de su recorrido, o lo que es lo mismo, la línea formada por todas las posiciones que ha ocupado un móvil a lo largo de su recorrido.*



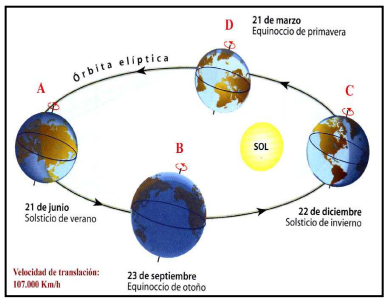
En la figura se recoge la trayectoria que ha seguido un móvil desde el instante t_1 hasta el instante t_3. Se trata en este caso de una trayectoria curva.

La trayectoria puede presentar formas diversas: recta, curva, circular, parabólica, elíptica, en espiral, irregular etc.





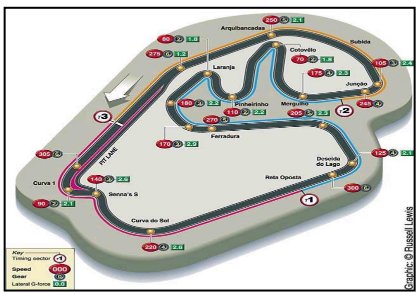
Tiro oblicuo:
Trayectoria parabólica



Traslación terrestre:
Trayectoria elíptica

Caída libre: trayectoria rectilínea

Noria: Trayectoria circular



Circuito de fórmula 1:
Trayectoria irregular

Recuerda

<u>Posición</u>: Es el lugar que ocupa un móvil en un instante dado respecto a un sistema de referencia.
<u>Trayectoria</u>: Es el conjunto de todas las posiciones por las que pasa un móvil a lo largo de su recorrido.
<u>Desplazamiento:</u> Es la distancia en línea recta entre la posición final e inicial de un móvil.
El espacio recorrido por el móvil depende la trayectoria que describa, pero el desplazamiento realizado sólo depende de la posición inicial y final, no de la trayectoria.

2.3 Concepto de velocidad y unidades. Velocidad media e instantánea.

En el estudio del movimiento que hemos hecho hasta el momento no hemos hablado todavía del factor tiempo. El tiempo también es una magnitud muy importante cuando se estudia el movimiento de los cuerpos. Resulta evidente que no es el mismo movimiento el que realiza un móvil que tarda 10 minutos en desplazarse 100 metros que el que tarda 10 segundos en desplazarse esos 100 metros. Lo que hay de diferente en ambos movimientos es la magnitud física que llamaremos **velocidad**.
Podemos definir la velocidad como *la magnitud física que relaciona el desplazamiento realizado por un móvil con el tiempo empleado en realizarlo*.

Cuanto más desplazamiento realice un móvil en un mismo tiempo, mayor será su velocidad. De esta forma podemos asegurar que la velocidad es directamente proporcional al desplazamiento (a mayor desplazamiento, mayor velocidad → magnitudes directamente proporcionales).

También podemos razonar que cuanto más tiempo tarde un móvil para realizar un mismo desplazamiento, menor será su velocidad. Es decir, la velocidad es inversamente proporcional al tiempo (a mayor tiempo, menor velocidad → magnitudes inversamente proporcionales).

A partir de las ideas anteriores se puede representar matemáticamente la velocidad mediante la expresión:

$$\boxed{V = \frac{\Delta e}{\Delta t}}$$

Δe representa el desplazamiento realizado (o lo que es lo mismo, en movimientos rectilíneos sin retroceso, el espacio recorrido por el móvil). El símbolo Δ se lee

2.5 Clasificación de los movimientos.

Los movimientos se pueden clasificar atendiendo a diferentes criterios. Por ejemplo, si nos fijamos en la trayectoria los movimientos se clasifican en:

Movimiento
- Trayectoria recta → *Movimiento rectilíneo*.
- Trayectoria no rectilínea
  - Trayectoria circular → *Movimiento circular*
  - Otras trayectorias curvas → *Movimiento parabólico, elíptico, curvilíneo, …*

Si nos fijamos en la velocidad de los móviles, podemos encontrar tres posibles situaciones que dan lugar a tres tipos de movimiento:

● **Movimiento uniforme**: Es aquel cuya velocidad es constante, es decir, no cambia con el tiempo. Si el movimiento es además rectilíneo, al no haber variación de la velocidad la aceleración es cero. En este caso, al movimiento rectilíneo uniforme se le suele abreviar con las siglas MRU. En el siguiente cuadro se representan los datos correspondientes a velocidad y tiempo para un ejemplo de MRU.

t (s)	0	1	2	3	4	5
V (m/s)	12	12	12	12	12	12

● **Movimiento uniformemente acelerado:** Es aquel cuya velocidad no es constante, sino que varía progresiva y regularmente con el tiempo. En este tipo de movimiento la aceleración que lleva es constante. Cuando la trayectoria es rectilínea se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA). Hay que tener en cuenta que la velocidad puede variar aumentando o disminuyendo con el tiempo. Cuando la velocidad va disminuyendo se suele llamar también movimiento rectilíneo uniformemente *retardado*. En estos tipos de movimiento, en intervalos iguales de tiempo, se producen incrementos iguales de velocidad.
En el siguiente cuadro se representan los datos correspondientes a velocidad y tiempo para un ejemplo de MRUA.

t (s)	0	1	2	3	4	5
V (m/s)	4	7	10	13	16	19

Se puede comprobar que cada segundo que pasa la velocidad del móvil aumenta en 3 m/s. Esto es lo mismo que decir que tiene una aceleración constante de +3 m/s^2. (¡Cuidado!, no hay que confundir aceleración constante con velocidad constante, pues en este tipo de movimientos la velocidad NO es constante). La aceleración hace referencia al cambio de velocidad.

En el siguiente cuadro se representan los datos correspondientes a un movimiento rectilíneo uniformemente retardado:

t (s)	0	1	2	3	4	5
V (m/s)	25	21	17	13	9	5

Se puede comprobar que cada segundo que pasa la velocidad del móvil disminuye en 4 m/s. Esto es lo mismo que decir que tiene una aceleración constante de - 4 m/s^2. El signo negativo indica que se trata de un movimiento retardado, pues la velocidad va disminuyendo conforme avanza el tiempo.

● **Movimiento acelerado (o retardado)**: Es aquel cuya velocidad varía con el tiempo pero la variación no es progresiva. La velocidad cambia sin regularidad. En intervalos iguales de tiempo NO se producen incrementos iguales de velocidad. En este tipo de movimientos ni la velocidad ni la aceleración son constantes. Se abrevia como MRA.
En el siguiente cuadro se representan los datos correspondientes a un movimiento acelerado (pero no uniformemente acelerado):

t (s)	0	1	2	3	4	5
V (m/s)	4	6	14	17	18	23

Recuerda

Movimiento rectilíneo uniforme (MRU) → Su velocidad no cambia con el tiempo:

V= constante
a = 0

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado/retardado (MRUA) → Su velocidad cambia progresiva y regularmente con el tiempo.

V ≠ constante
a = constante

Movimiento rectilíneo acelerado (MRA) → Su velocidad cambia a lo largo del tiempo pero no lo hace progresiva y regularmente.

V ≠ constante
a ≠ constante

2.6 Estudio analítico y gráfico del movimiento rectilíneo uniforme (MRU).

Podríamos decir que se trata del tipo de movimiento más sencillo que puede llevar un objeto que se mueve. Sus principales características son:

- Trayectoria rectilínea.
- Velocidad constante (por lo tanto no tiene aceleración, a=0).
- En intervalos iguales de tiempo, el móvil recorre intervalos iguales de espacio.

Resulta intuitivo y sencillo de comprender que si un coche, por ejemplo, circula con una velocidad constante de 15 m/s, este coche recorre cada segundo 15 metros.
Del mismo modo, si un móvil cualquiera lleva velocidad constante y recorre 500 m en 50 segundos, podemos calcular su velocidad dividiendo el espacio recorrido entre el tiempo empleado:

$$v = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{500}{50} = 10 \text{ m/s}$$

La ecuación que relaciona las magnitudes para este tipo de movimiento es la que define en sí misma el concepto de velocidad.

$$\boxed{v = \frac{\Delta e}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \Delta e = v \cdot \Delta t \quad \rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta e}{v}}$$

El espacio recorrido por un móvil con MRU es directamente proporcional a la velocidad y al tiempo. Por ejemplo, si un coche circula con velocidad constante de 60 km/h, en 1 hora recorre 60 · 1 = 60 km
en 2 horas recorre 60 · 2 = 120 km
en 3 horas recorre 60 · 3 = 180 km
……..
En t horas recorre 60 · t km → $\Delta e = v \cdot \Delta t$

En las tablas siguientes se resumen los datos del movimiento para el coche anterior:

t (h)	0	1	2	3	4	5
V (km/h)	60	60	60	60	60	60

t (h)	0	1	2	3	4	5
e (km)	0	60	120	180	240	300

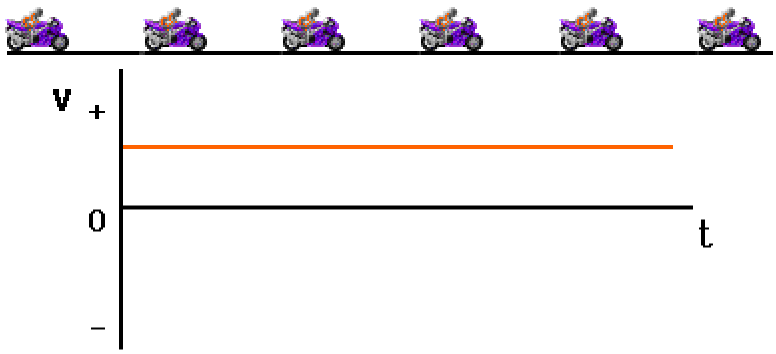
El estudio del MRU también se puede realizar mediante las gráficas de movimiento, en las que se representan cómo varían la con el tiempo, las diferentes magnitudes: espacio recorrido, velocidad y aceleración.

- **GRÁFICAS DEL MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU)**

Grafica velocidad – tiempo:

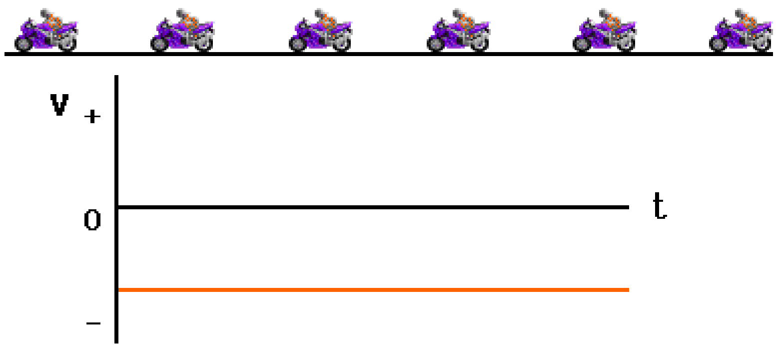
Como la velocidad no cambia con el tiempo, aunque el tiempo avanza siempre tiene el mismo valor. Por esta razón la gráfica velocidad – tiempo es una línea recta horizontal. Esta línea recta puede estar en los valores positivos si el movimiento es en el sentido positivo (hacia la derecha) o puede estar en valores negativos si el objeto se mueve en sentido negativo (hacia la izquierda).

Movimiento Rectilíneo Uniforme
Velocidad constante y positiva



Velocidad positiva porque se mueve hacia la derecha
Aceleración cero (velocidad constante).

Movimiento Rectilíneo Uniforme
Velocidad constante y negativa

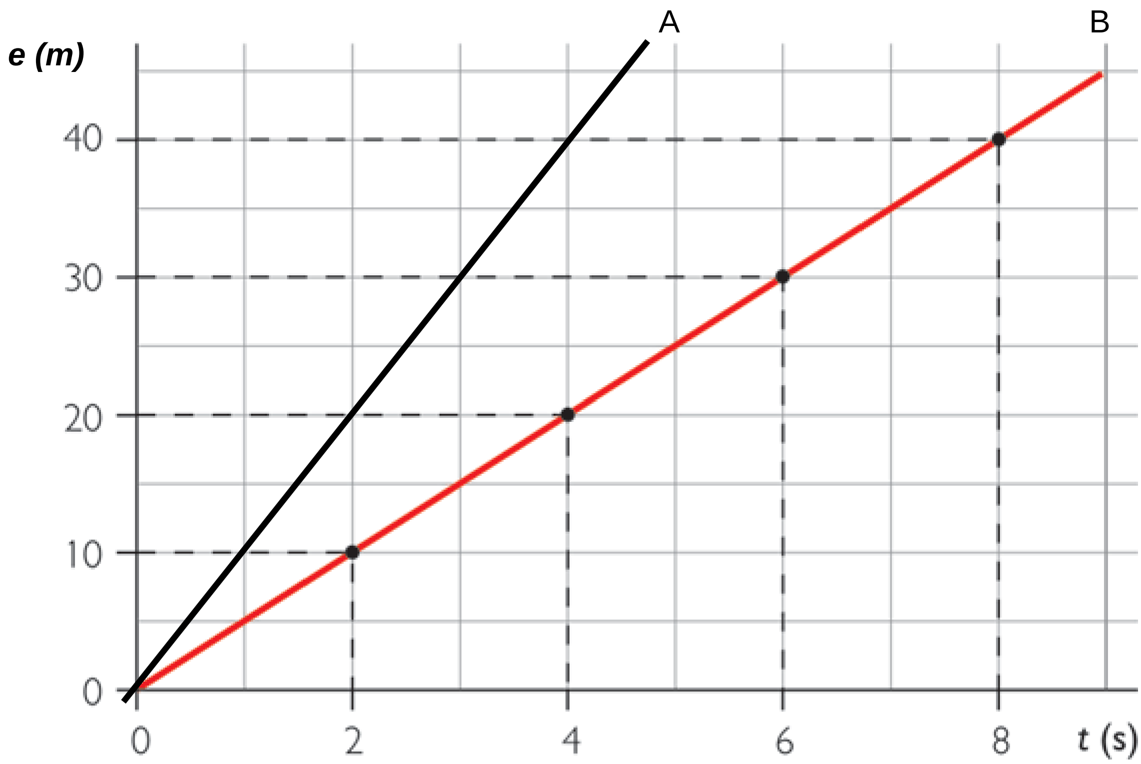


Velocidad negativa porque se mueve hacia la izquierda
Aceleraci�n cero (velocidad constante) .

Gráfica espacio - tiempo

Al estudiar el espacio recorrido por un móvil con MRU durante un intervalo de tiempo podemos comprobar que conforme pasa el tiempo, el espacio recorrido va aumentando proporcionalmente (doble tiempo → doble espacio; triple tiempo → triple espacio,…) La gráfica que corresponde a esta variación es una línea recta más o menos inclinada dependiendo del valor de la velocidad. Cuanto más inclinada está la recta e-t, esto significa que el móvil lleva más velocidad, pues recorre más espacio para un mismo intervalo de tiempo.

En la gráfica A siguiente vemos como cada segundo que transcurre el móvil recorre 10 metros (la velocidad es de 10 m/s). En la grafica B vemos como cada segundo que transcurre el móvil recorre 5 m (la velocidad es de 5 m/s). Se puede comprobar de esta forma que cuanto mayor es la velocidad, más inclinada está la recta espacio-tiempo.



Gráfica aceleración - tiempo

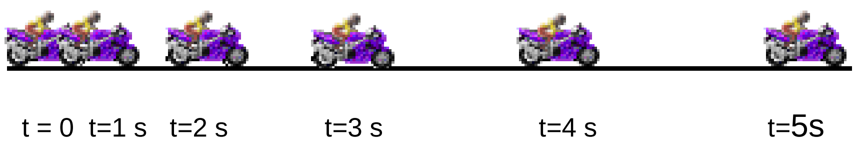
Por tratarse de un movimiento con velocidad constante, su aceleración es nula en todo momento. Por esta razón no cabe representar ninguna gráfica de aceleración – tiempo para el MRU.

2.7 Estudio analítico y gráfico del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)

Este tipo de movimiento se caracteriza por:

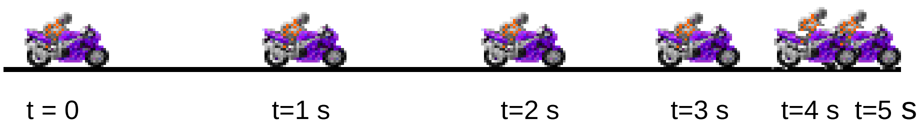
- Su trayectoria es rectilínea.
- Su velocidad no es constante, pero cambia de forma progresiva y regular con el tiempo.
- Su aceleración es constante y puede ser positiva (si el móvil está acelerando) o negativa (si el móvil está frenando).

Cuando un móvil lleva un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado hay que tener en cuenta que el espacio que recorre en cada unidad de tiempo NO es igual. Supongamos un motorista que va acelerando. Puesto que cada vez va más rápido, durante un segundo recorre cada vez más espacio. Si hiciéramos fotografías al motorista con intervalo de 1 segundo entre cada foto encontraríamos una secuencia como la que se indica la imagen siguiente.



Esto representa una característica diferenciadora respecto del movimiento rectilíneo uniforme, en el que cada segundo, el móvil recorre el mismo espacio por ser su velocidad constante.

Cuando el móvil va frenando (por tanto lleva un movimiento rectilíneo uniformemente retardado), cada segundo que pasa recorre menos espacio, pudiendo llegar a detenerse.



Teniendo en cuenta estas características del movimiento, podemos asegurar que el espacio recorrido por un móvil con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado o retardado no es directamente proporcional al tiempo, aunque, como veremos a continuación, sí que depende del tiempo.

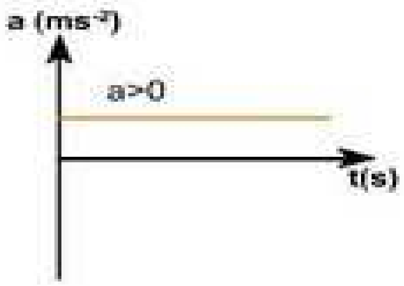
En el estudio del MRUA, intervienen cuatro magnitudes físicas que están relacionadas entre sí. Dichas magnitudes son: espacio recorrido (e), velocidad (v), aceleración (a) y tiempo (t).

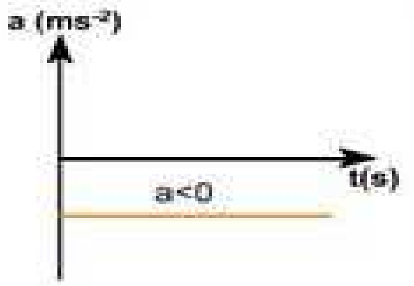
La aceleración, velocidad y tiempo están relacionadas entre sí en la propia fórmula que define la aceleración. A continuación se indican las ecuaciones características del MRUA.

- **GRÁFICAS DEL MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (MRUA).**

Gráfica aceleración – tiempo.

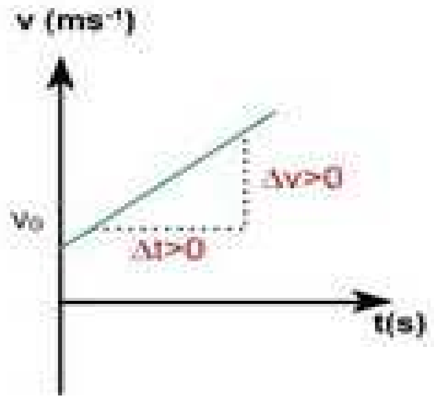
Como en el MRUA la aceleración es constante, es decir, no varía con el tiempo, su gráfica será una línea horizontal, situada en la parte positiva o negativa del eje, según el signo positivo o negativo de la aceleración. La gráfica de la izquierda corresponde a un móvil que está acelerando con un MRUA. La gráfica de la derecha corresponde a un móvil que está frenando con un MRUA (retardado).

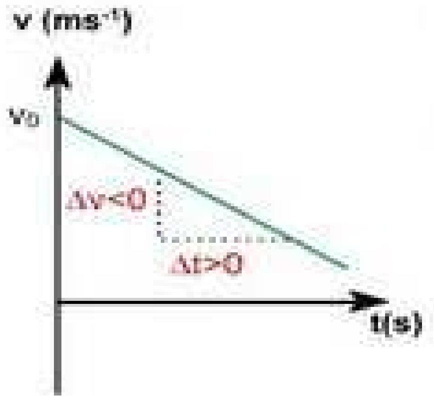




Gráfica velocidad - tiempo

En este caso, la velocidad va cambiando progresivamente con el tiempo. Puede ir aumentando o disminuyendo a partir de un valor de velocidad inicial (V_0), pero en cualquier caso, la variación se produce de forma gradual y regularmente. La gráfica de la izquierda corresponde a un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, pues la velocidad aumenta con el tiempo. La gráfica de la derecha corresponde a un movimiento rectilíneo uniformemente retardado, pues la velocidad va disminuyendo con el tiempo. En este caso, en el instante en que la velocidad llegue a tomar el valor cero, el móvil se habrá parado.

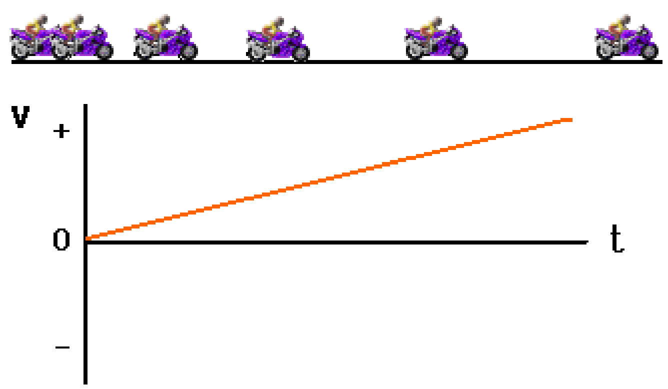




Cuanto mayor sea la inclinación de la recta, más rápidamente va cambiando la velocidad, o lo que es lo mismo, mayor es la aceleración. Así pues, la inclinación de la recta v-t nos da una idea del mayor o menor valor de la aceleración.

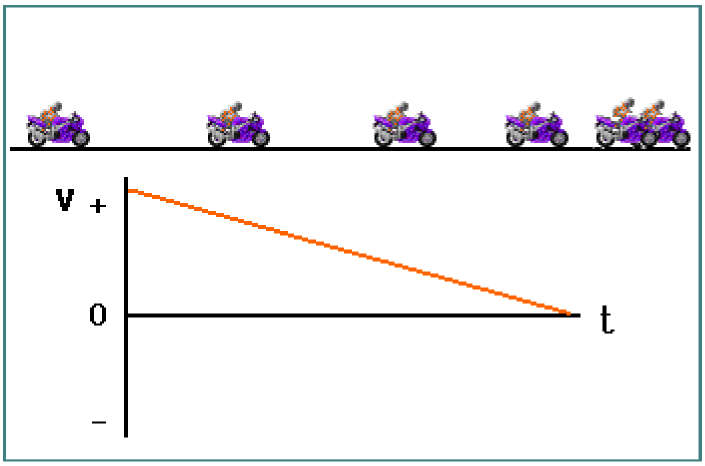
Observa los siguientes ejemplos:

Movimiento uniformemente acelerado
Velocidad positiva y aceleración constante y positiva.



En este gráfico se observa como el motorista parte del reposo (V_0=0) y acelera con un MRUA, aumentando su velocidad regular y progresivamente con el tiempo. En este ejemplo se ha considerado el sentido de movimiento positivo hacia la derecha. Por esta razón, la recta aparece dibujad en la parte positiva de la gráfica.

Movimiento uniformemente acelerado
Velocidad positiva y aceleración constante y negativa



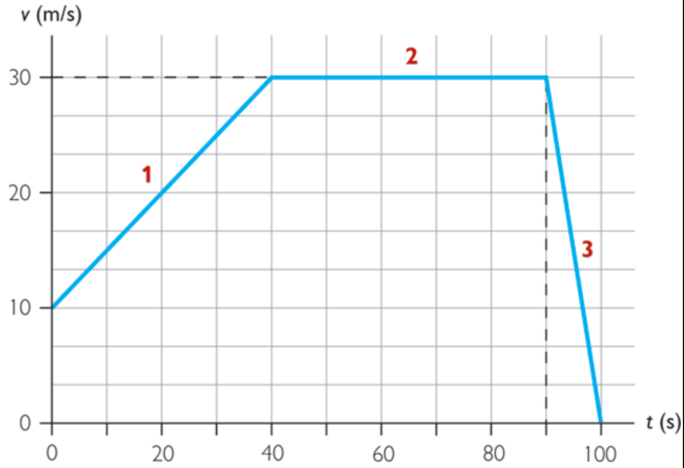
En este gráfico se observa como el motorista que inicialmente iba a una velocidad determinada, empieza a frenar uniformemente, de forma que su velocidad va disminuyendo progresivamente con el tiempo. Puesto que el movimiento es hacia la derecha, los valores de velocidad, aunque cada vez son menores, siguen siendo positivos, por lo que la recta aparece dibujada en la zona positiva de la gráfica. La aceleración es negativa por tratarse de un movimiento de frenado (retardado).

Gráfica espacio – tiempo.

El espacio recorrido durante un MRUA está relacionado con el tiempo mediante una expresión cuadrática, es decir, en la que el tiempo aparece elevado al cuadrado. Al hacer la representación gráfica del espacio frente al tiempo, se obtiene una curva llamada parábola. A continuación se representan las gráficas de espacio-tiempo para un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado y otro retardado.

EJEMPLO

A partir de la información que se proporciona en la gráfica adjunta, indica:
- a) Tipo de movimiento que lleva el móvil en cada etapa, suponiendo que se mueve en línea recta.
- b) Aceleración en cada etapa.
- c) Espacio recorrido por el móvil en todo el periodo que se está moviendo.



En primer lugar observamos que se trata de una gráfica de velocidad tiempo, luego debemos de analizar la información teniendo presente cómo varía la velocidad en cada periodo de tiempo. Tambien comprobamos que todas las unidades corresponden al Sistema Internacional.

a) En la etapa <u>número 1</u> vemos que al iniciar el estudio del movimiento de ese objeto (t=0) , éste ya llevaba una velocidad inicial de 10 m/s y durante 40 segundos la velocidad va aumentando hasta alcanzar el valor de 30 m/s. Por tanto, en esta etapa el objeto lleva un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado **(MRUA).**

   En la etapa <u>número 2</u>, el objeto mantiene la velocidad de 30 m/s constante durante un periodo de 50 segundos (desde el segundo 40 hasta el segundo 90). Puesto que la velocidad no varía, se trata de un movimiento rectilíneo uniforme **(MRU).**

   En la etapa <u>número 3</u> el móvil frena de manera que en 10 segundos pasa de llevar una velocidad de 30 m/s a pararse (velocidad final cero). Se trata, pues, de un movimiento rectilíneo uniformemente retardado **(MRUR).**

b) Vamos a calcular la aceleración en cada etapa. Recordemos que $a = \frac{V_f - V_0}{t}$

   - **Aceleración de la etapa 1 →** $a_1 = \frac{30-10}{40} = 0{,}5$ m/s²

   (El valor del tiempo que aparece en la fórmula es el que corresponde a la duración de la etapa número 1, es decir 40 segundos).

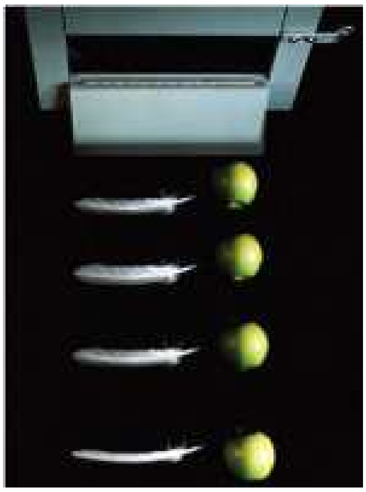
   - **Aceleración de la etapa 2 →** Puesto que se trata de un movimiento rectilíneo uniforme, la velocidad no varía durante esta etapa y por tanto si no hay variación de velocidad no hay aceleración → $a_2 = 0$

   - **Aceleración de la etapa 3 →** $a_3 = \frac{0-30}{10} = -3$ m/s²

   (El valor del tiempo que aparece en la fórmula es el que corresponde a la duración de la etapa número 3, es decir 10 segundos). El signo negativo indica que se trata de un movimiento de retardado, es decir, el móvil va frenando en ese intervalo de tiempo.

2.8 La caída libre y el tiro vertical.

La caída libre es el movimiento rectilíneo que describe un objeto que se deja caer libremente (sin velocidad inicial) desde una determinada altura debido a la acción de la gravedad terrestre. Como veremos en el siguiente tema, todos los cuerpos que se encuentran en la superficie terrestre son atraídos hacia el centro de la Tierra de forma que cuando se mueven en caída libre lo hacen de manera acelerada, es decir, durante la caída libre de un cuerpo en el vacío (sin rozamientos con el aire), la velocidad va aumentando progresivamente a razón de 9,8 m/s cada segundo. Esto equivale a decir que la aceleración en el movimiento de caída libre en la superficie terrestre vale 9,8 m/s^2. Este valor se conoce comúnmente como aceleración de la gravedad y se representa mediante la letra g (g= *9,8 m/s*^{2}). La aceleración de la gravedad siempre está dirigida hacia abajo (hacia el centro de la Tierra).



Un aspecto importante que hay que tener en cuenta es que la aceleración con la que caen todos los cuerpos en las proximidades de la superficie terrestre es la misma, independientemente de la masa del objeto que cae. Esto significa que una piedra o una pluma en el vacío caen con la misma aceleración. La observación cotidiana parece que contradice este hecho y según nuestra experiencia más evidente la piedra tarda menos en caer desde la misma altura que una pluma. No debemos olvidar que el aire produce un efecto de rozamiento en los cuerpos que caen que hace que los objetos en caída libre se frenen en mayor o menor medida. Pero en el vacío total, sin aire, la pluma y la piedra caerían exactamente con la misma aceleración g=9,8 m/s^2. La imagen que aparece junto a este párrafo es real y corresponde a la caída libre de una manzana y una pluma en una cámara en la que se ha hecho el vacío (se ha sacado todo el aire).

El valor de la gravedad varía con la distancia al centro de la Tierra y se hace menor cuanto más nos alejamos del centro. No obstante, para estudiar caída libre desde pequeñas alturas, el valor de la gravedad lo supondremos constante e igual a 9,8 m/s^2 y no tendremos en cuenta el rozamiento del aire (esto supone una limitación que desvirtúa un poco la realidad del movimiento pero simplifica el estudio para un nivel básico de conocimientos científicos como el que corresponde a este curso).

De acuerdo con lo visto hasta este momento, podemos decir que la caída libre es un ejemplo de *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado*, por lo cual para su estudio analítico serán válidas todas las ecuaciones correspondientes al MRUA.

Es habitual utilizar una simbología específica para el estudio de la caída libre. Así, al espacio recorrido lo asociamos con el concepto de "altura" desde donde cae el objeto y la representamos con la letra "h" (¡Cuidado, pues la palabra altura no lleva h!). De la misma forma, al referirnos a la aceleración, empleamos el término g (gravedad). Además, la caída libre se caracteriza por iniciar el movimiento desde el reposo, es decir, la velocidad inicial del móvil es cero (V_0=0).

ESTUDIO DEL MOVIMIENTO. CINEMÁTICA

A.1 El movimiento es un fenómeno que está continuamente produciéndose en la naturaleza y también en nuestro entorno más cotidiano. Intenta definir el concepto de *movimiento.*

A.2. ¿Por qué es fundamental al estudiar el movimiento establecer de antemano cuál es el sistema de referencia?

A.3. ¿Qué quiere decir que el movimiento es un concepto relativo?

A.4. Explica razonadamente si una farola de la calle está en movimiento o en reposo.

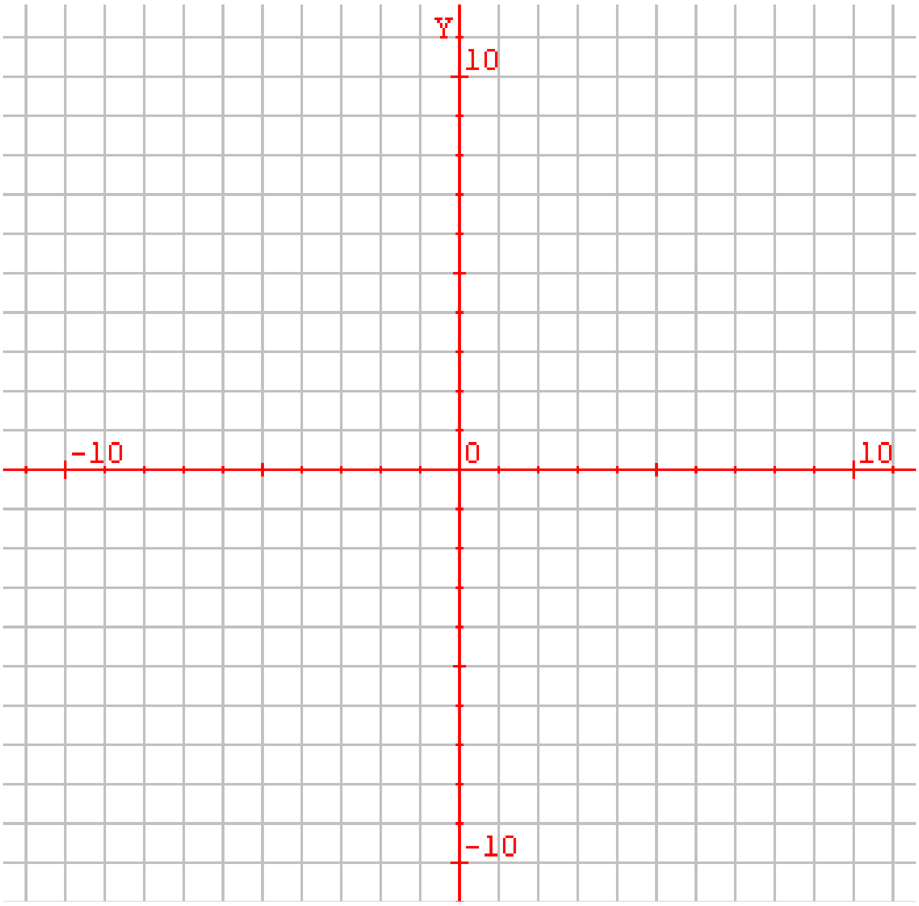
A.5. Completa las siguientes definiciones:

a) El lugar que ocupa un objeto en un instante dado respecto de un sistema de referencia determinado se llama _________________

b) El conjunto de todas las posiciones que ha ocupado un móvil a lo largo de su recorrido se llama _________________

c) La distancia en línea recta que separa la posición inicial y final de un móvil se llama ______________

A.6. Sitúa en el siguiente sistema de referencia cartesiano las posiciones que se indican al margen. Supondremos que todas las coordenadas están expresadas en metros. Cada división de los ejes representa una unidad.



A (6, 9)

B (3, -5)

C (0, -10)

D (-4, -8)

E (9,0)

F (-3, 7)

G (0,5)

H (7, -3)

I (-1, 0)

J (-2, -3)

A.7. Indica qué tipo de trayectoria llevan los siguientes objetos a lo largo de su movimiento:

- Un balón que se lanza de una patada desde el punto de penalti: ________________

- Un piedra que cae libremente desde una cierta altura: __________________

- Un pasajero en una noria en movimiento: _________________

- Un coche de fórmula 1 en un circuito a lo largo de una vuelta: _________________

- La Tierra en su movimiento de traslación entorno al Sol: ___________________

- Un muchacho que desliza sobre un tobogán sin curvas: ____________________

- Una persona que asciende por una pequeña escalera de caracol: _______________