

## UD 4 La materia. Sus transformaciones. Divisibilidad

### 1. La materia y sus propiedades

¿Qué tienen en común una roca, los gases que emite una industria, el agua que bebemos, el tejido de que está hecha nuestra camisa, las flores del campo o el gato que maúlla en el tejado? Aparentemente nada. Pero si pensamos más detenidamente nos daremos cuenta de que todo los entes anteriores ocupan un espacio en el Universo, y que tienen **materia**. Por lo tanto, todos los entes que existen, vivos o inertes, tienen en común que son sistemas materiales, cuerpos que ocupan un lugar y que tienen masa.

Los sistemas materiales están formados por sustancias, es decir, por materia de diferentes tipos, y como ya veremos, toda materia está constituida por partículas.



Tres sistemas materiales

Podemos preguntarnos por qué, si todo es materia, se utilizan determinados materiales en la construcción, y otros diferentes en el sector del automóvil o en la industria farmacéutica. Evidentemente, aunque todo es materia, hay grandes diferencias entre materias de diferente naturaleza o sustancias. Existen **propiedades** que identifican, y que confieren determinadas características a cada tipo de sistema material.

#### 1.1. Propiedades generales y específicas de la materia

En principio vamos a diferenciar entre propiedades comunes y propiedades específicas.

A) Son **propiedades comunes** las que poseen todas las sustancias y no sirven para diferenciar distintos tipo. El **estado** físico es una propiedad común a todas las materias. Lo mismo ocurre con la **masa** o el **volumen**.

B) Las propiedades **específicas** dependen de la naturaleza de cada sustancia, y por medio de ellas se pueden identificar distintos tipos de materias.

Una de estas propiedades es la **densidad**, porque cada tipo de sustancia tiene un valor de la densidad propio e invariable que está en función de su propia naturaleza. Por ejemplo, la densidad del acero es característica y diferente de otras sustancias como la del agua, oro, etcétera. Otra propiedad específica es el **punto de fusión**, porque cada sólido funde a una temperatura determinada.

#### 1. Escribe al lado de cada propiedad si es COMÚN o ESPECÍFICA

Estado\_\_\_\_\_

Punto de fusión\_\_\_\_\_

Masa \_\_\_\_\_

Volumen \_\_\_\_\_

Densidad \_\_\_\_\_

## 2. Si quisieras diferenciar un bloque de hierro y uno de aluminio, ¿qué datos te serían útiles?

- La masa.
- El volumen.
- La densidad.
- El punto de fusión.

## 3. Completa los huecos con los términos correctos:

Todas las \_\_\_\_\_ existen en la naturaleza (20°C y a nivel del mar) en un \_\_\_\_\_ de agregación determinado, aunque luego mediante la intervención de \_\_\_\_\_ externas, puedan \_\_\_\_\_ de estado. En este sentido, clasificamos a las sustancias en sólidas, líquidas y \_\_\_\_\_.

**Banco de palabras:** sustancias, estado, energías, cambiar, gaseosas.

## 1.2. Masa, volumen y densidad

¿Por qué si ponemos un bloque de madera en un recipiente con agua, flota, y si ponemos un bloque de hierro, de la misma masa, se hunde?

La magnitud física que relaciona la masa de un cuerpo con su volumen se denomina **densidad**. Se define la densidad como la masa contenida en una unidad de volumen, es decir, la relación que existe entre la masa de un cuerpo y el volumen que ésta ocupa.

Se representa por “d” y matemáticamente se expresa:

$$d = \frac{m}{v}$$

Se mide en una unidad de masa dividida por una unidad de volumen. En el sistema internacional, en **Kg/m³**.

- Un objeto menos denso que el agua flota en ella.
- Un objeto más denso que el agua, se hunde.

La densidad del agua es 1 Kg/dm³, y el dm³ equivale al litro, podemos decir que en 1 litro de agua hay una masa de 1 Kg, que 2 Kg de agua ocuparán un volumen de 2 litros, o que medio litro de agua tiene una masa de 0,5 Kg. A continuación vemos una tabla con valores de densidades, en Kg/m³, para algunas de las sustancias más comunes:

Hierro	7.500
Mármol	2.700
Vidrio	2.500
Aceite de oliva	910
Aire	1,3

de la fórmula de la densidad podemos extraer otras dos:

$$m = d * v \quad v = \frac{m}{d}$$



Los objetos menos densos flotan

## 4. Utilizando las tablas de la página anterior calcula:

- El volumen que ocupan 100 Kg de hierro. Exprésalo en litros
- El volumen, en litros, que ocupan 15 Kg de aire.
- El volumen que ocupan 100 Kg de mármol-
- Los litros que ocupan 16 Kg de aceite-

## 5. La densidad del cobre es de 8'9 g/cm³. Calcula la masa de un litro de cobre-

## 6. Calcula la masa de los siguientes volúmenes:

- 576 litros de agua.
- 3.000 m³ de aire.
- 576 litros de hielo.
- 576 litros de vapor de agua

7. ¿Cuál será la densidad del plomo si una esfera de medio Kg de masa de este metal, ocupa un volumen de 44,25 cm<sup>3</sup>?

- a) 11,3 g/cm<sup>3</sup>
- b) 11,3 Kg/cm<sup>3</sup>
- c) 113 Kg/cm<sup>3</sup>
- d) 0,0113 Kg/cm<sup>3</sup>

### 1.3. Estados de la materia

¿Es correcto decir que el agua es una sustancia líquida? La respuesta es relativa. Efectivamente, el agua es líquida a temperatura ambiente y una atmósfera de presión, pero todos sabemos que puede encontrarse en estado sólido, en forma de hielo, o en estado gaseoso, en forma de vapor de agua.

La mayoría de las sustancias que existen en la naturaleza, aunque no todas, pueden presentarse en los **tres estados de agregación: sólido, líquido y gaseoso**.

Cuando decimos que una sustancia es sólida, líquida o gas, nos referimos a las condiciones anteriores de presión y temperatura, y para que se produzca un **cambio de estado**, es necesaria una variación externa de alguna de estas magnitudes.



Estado sólido



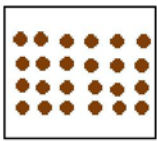
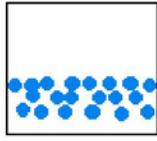
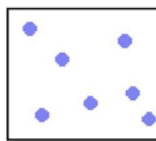
Estado líquido



Estado gaseoso

Por ejemplo, si nos preguntan cómo es el hierro, lo lógico es contestar que sólido, porque así es como se encuentra a nivel del mar y a temperatura ambiente (se considera a 20<sup>a</sup>), pero sabemos que en los altos hornos se alcanzan temperaturas suficientemente altas (superiores a 1.539 °C), como para fundirlo. En estas nuevas condiciones, el hierro es líquido.

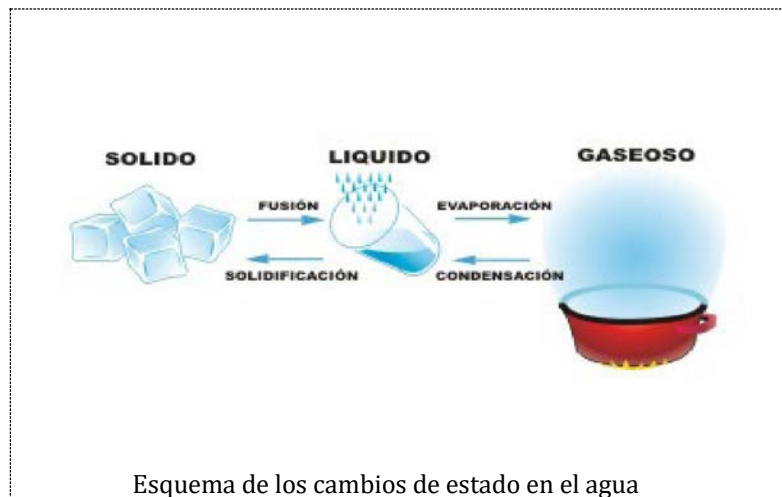
Las fuerzas atractivas, denominadas fuerzas de cohesión, que mantienen unidas a las partículas que constituyen una sustancia, son las que determinan su estado de agregación, y las que confieren a las sustancias, las características propias de cada uno de ellos:

	Sólido	Líquido	Gaseoso
<b>Modelo</b>			
<b>Fuerzas de cohesión entre partículas</b>	Intensas	Medias	Bajas
<b>Situación de las partículas</b>	Ocupan posiciones fijas en el espacio. Ordenadas. Sólo son posibles movimientos oscilatorios respecto a sus posiciones.	Posiciones fijas, pero con posibilidad de deslizarse unas sobre otras, aunque manteniendo la distancia entre ellas.	Partículas muy desordenadas, con libertad total de movimiento a gran velocidad y en todas direcciones, produciendo multitud de choques.
<b>Forma</b>	Fija.	Variable.	Variable.
<b>Volumen</b>	Fijo.	Fijo.	Variable.
<b>Propiedades</b>	Dureza, fragilidad.	Fluidez, viscosidad.	Fluidez, compresibilidad

## Cambios de estado

Las sustancias pueden pasar de un estado a otro. Los **cambios de estado** se llevan a cabo por la variación de las condiciones de **presión y temperatura**. Nos centraremos en aquellos producidos al modificar esta última magnitud.

Como dijimos anteriormente, las partículas que constituyen la materia están unidas debido a las fuerzas de cohesión, que son atractivas, pero también están sometidas a una **agitación térmica**, que es directamente proporcional a la temperatura. Al aumentar la temperatura, aumenta su energía.



Pensemos en el caso del agua: a temperaturas bajo 0 °C se encuentra en forma de hielo, las fuerzas de cohesión entre sus partículas son intensas, y éstas están ordenadas ocupando posiciones fijas en el espacio.

Cuando la temperatura aumenta por encima de 0 °C ( $T$  fusión del agua), las fuerzas de cohesión entre sus partículas disminuyen, porque aumenta la agitación térmica, las partículas siguen manteniéndose unidas, pero pueden deslizarse y cambiar de posición. El hielo pasa a agua líquida.

Si seguimos aumentando la temperatura y superamos los 100 °C (temperatura de ebullición del agua), la agitación supera a las fuerzas de cohesión, y las partículas se separan unas de otras, moviéndose libremente, a gran velocidad, chocando entre sí y contra las paredes del recipiente. El agua líquida ha pasado a estado gaseoso, es decir, a vapor de agua.

Los cambios de estado pueden ser:

El paso de sólido a líquido se llama **fusión**, y la temperatura a que tiene lugar, **temperatura de fusión**. Es una propiedad específica, es decir, depende de la naturaleza de cada sustancia.

El cambio de estado de líquido a gas, denominado **evaporación** y la temperatura a la que se produce, **punto de ebullición**, que también es una propiedad específica.

Si un gas pierde energía, llegará un momento que empiece a convertirse en líquido. Este cambio de estado se llama **condensación**. Para una misma sustancia, la ebullición y la condensación ocurren a la misma temperatura.

Cuando disminuimos la temperatura de un líquido, sus partículas se van reordenando, pierden energía y movilidad. El líquido pasa a estado sólido. Este cambio de estado se llama **solidificación**.

### 8. Indica qué afirmaciones son ciertas, respecto a los estados de agregación en que puede encontrarse la materia:

- a) Depende de las fuerzas de cohesión entre las partículas que constituyen la materia.
- b) Depende de la temperatura a que esté sometida la materia.
- c) Depende de la velocidad de las partículas que constituyen la materia.
- d) Depende de la masa de las partículas que constituyen la materia.

### 9. Lee el siguiente párrafo y completa los huecos en blanco. Puedes usar las palabras: hielo, gaseoso, nubes, condensa, líquido y vapor.

El agua está en la naturaleza en los tres estados posibles: sólido, líquido y \_\_\_\_\_. En estado sólido la encontramos formando \_\_\_\_\_ y nieve fundamentalmente. Cuando se evapora, decimos que es \_\_\_\_\_ de agua y entonces está en estado \_\_\_\_\_. En estado \_\_\_\_\_ la vemos en ríos, mares, océanos y en la \_\_\_\_\_ cuando se \_\_\_\_\_ el vapor de agua de las nubes.

### 10. Completa con los términos correctos, las siguientes afirmaciones relativas a los estados de la materia:

La mayoría de las \_\_\_\_\_ que existen en la naturaleza, aunque no todas, pueden presentarse en los tres estados de \_\_\_\_\_ sólido, líquido y gaseoso. Cuando decimos que una sustancia es sólida, líquida o gas, nos referimos a 1 \_\_\_\_\_ de presión y \_\_\_\_\_ °C de temperatura. Para que se produzca un cambio de \_\_\_\_\_, es necesaria una \_\_\_\_\_ externa de alguna de estas magnitudes.

**Banco de palabras:** sustancias, estado, agregación, variación, atmósfera, 20

**11. Relaciona cada característica con el estado de agregación correspondiente:**

- |            |  |
|------------|--|
| a) Sólido  | 1) Tienen forma y volumen variable   |
| b) Líquido | 2) Las partículas ocupan posiciones fijas, pero con posibilidad deslizarse unas sobre otras. |
| c) Gaseoso | 3) Las fuerzas de cohesión entre partículas son intensas.                                    |

**12. Indica verdadero o falso en las siguientes afirmaciones:**

- a) Para que se produzca un cambio de estado en un sistema material, hay que variar la presión o la temperatura.
- b) Durante un cambio de estado la temperatura permanece constante.
- c) El paso de sólido a gas se llama fusión.
- d) Cuando se produce un cambio de estado hay una variación en el comportamiento de las partículas.

**13. Indica el nombre de cada cambio de estado:**

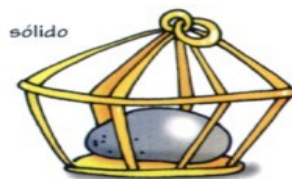
- |                                       |                                  |
|---------------------------------------|----------------------------------|
| a) De líquido a gas evaporación       | c) De sólido a líquido fusión    |
| b) De líquido a sólido solidificación | d) De gas a líquido condensación |



# Unidad 3 Los estados de la materia

## Ideas claras (para leer, estudiar y repasar)

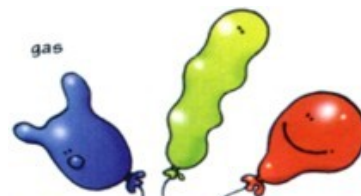
- ✓ La materia se puede presentar en **tres estados**: sólido, líquido y gaseoso.
- ✓ El **estado sólido** se caracteriza por tener masa, volumen y forma fijos.
- ✓ El **estado líquido** se caracteriza por tener masa y volumen fijos, pero forma variable. Así, las sustancias líquidas adoptan la forma del recipiente que las contiene.
- ✓ El **estado gaseoso** se caracteriza por tener masa fija, pero forma y volumen variables. Los gases adoptan la forma y ocupan el volumen del recipiente que los contiene.
- ✓ La **teoría cinética** establece que la materia está formada por partículas en continuo movimiento.
- ✓ En los **sólidos**, las partículas están firmemente unidas entre sí. Pueden vibrar, pero no son capaces de desplazarse.
- ✓ En algunos sólidos, las partículas aparecen ordenadas regularmente, formando figuras geométricas que reciben el nombre de **redes cristalinas**.
- ✓ En los **líquidos**, las partículas están unidas, pero no tan fuertemente como en los sólidos, por lo que pueden desplazarse unas sobre otras y cambiar de posición,
- ✓ En los **gases**, las partículas están muy separadas unas de otras y se mueven libremente a gran velocidad.
- ✓ La **expansión** de un gas es el aumento de la distancia entre sus partículas para ocupar un volumen mayor.
- ✓ La **compresión** de un gas es la disminución de la distancia entre sus partículas para ocupar un volumen menor.
- ✓ La **dilatación** es el aumento de volumen que experimentan los sólidos, líquidos y gases cuando se eleva la temperatura.
- ✓ La **contracción** es la disminución del volumen que experimentan los sólidos, líquidos y gases cuando desciende su temperatura.
- ✓ La materia puede **cambiar de estado** al modificarse la temperatura.
- ✓ El paso de sólido a líquido se denomina **fusión**; de líquido a gaseoso, **vaporización**; de gaseoso a líquido, **condensación**; de líquido a sólido, **solidificación**, y de sólido a gaseoso o viceversa, **sublimación**.
- ✓ La **presión** de un gas es la fuerza que ejercen las partículas que lo componen al chocar contra las paredes del recipiente que lo contiene.
- ✓ El **volumen** que ocupa una sustancia en estado gaseoso es mayor que el que ocupa en estado líquido, y este, a su vez, mayor que el que ocupa en estado sólido.
- ✓ La **densidad** de una sustancia en estado gaseoso es menor que la que tiene en estado líquido, y esta, a su vez, menor que la que tiene en estado sólido.



**Sólido:** Mantiene la forma aunque lo cambiemos de recipiente.



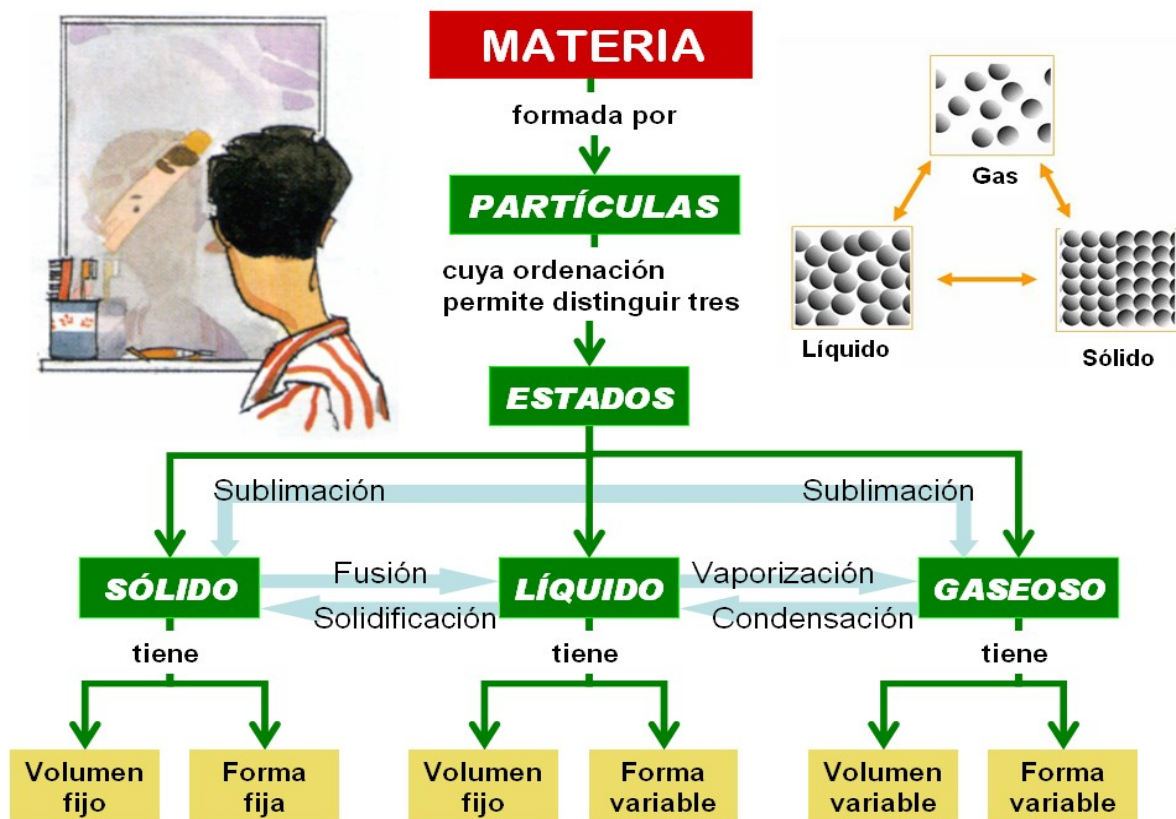
**Líquido:** Cambia de forma cuando lo cambiamos de recipiente.



**Gas:** tiende a ocupar todo el volumen que pueda. Cambia la forma y el volumen cuando lo cambiamos de recipiente

La materia está formada por partículas.  
Las partículas se hallan en continuo movimiento.





## Actividades

¿Cuál es el estado de estas sustancias a temperatura ambiente?. Di si se trata de un sólido, un líquido o un gas



Lo que hay dentro de un globo



El butano cuando sale de la bombona



El agua que sale del grifo



Un cubito de hielo del congelador

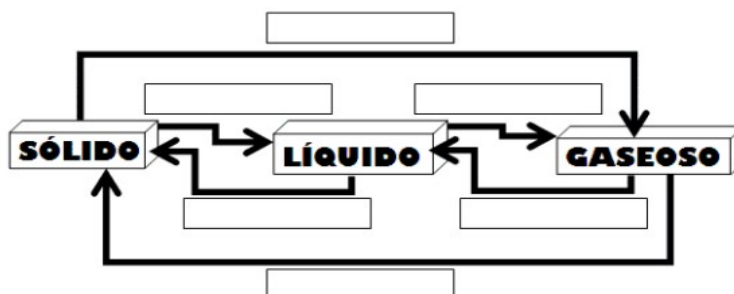


El aire del interior de la jeringuilla

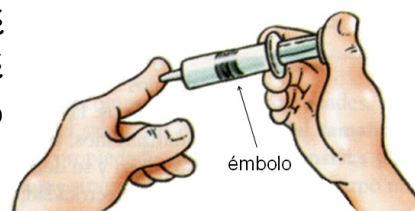
Completa esta tabla:

	Masa	Volumen	Forma
Sólidos	Fija		
Líquidos			
Gases		Variable	

Este esquema representa los cambios de estado de la materia. Pon los nombres de estos cambios.



Si tapas y empujas el émbolo de la jeringuilla, ¿qué ocurre con el aire: se expande o se comprime?. ¿Y qué ocurre con las partículas que forman el aire: se juntan o se separan?



.....

.....

.....

.....

¿Qué nombre recibe la teoría científica que dice que la materia está formada por pequeñísimas partículas que están en continuo movimiento?

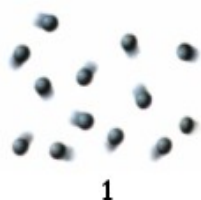
.....

¿Qué es un gas comprimido? ¿Qué ocurre con las partículas que forman ese gas al comprimirse: se juntan o se separan?

.....

.....

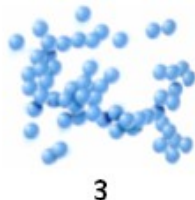
¿A qué estados de la materia corresponden los dibujos?



1



2



3

1 .....

2 .....

3 .....

¿En qué te has fijado para responder a la pregunta anterior?

.....

.....

¿El agua es una sustancia sólida, líquida o gaseosa? ¿Cómo influye la temperatura en el estado del agua?

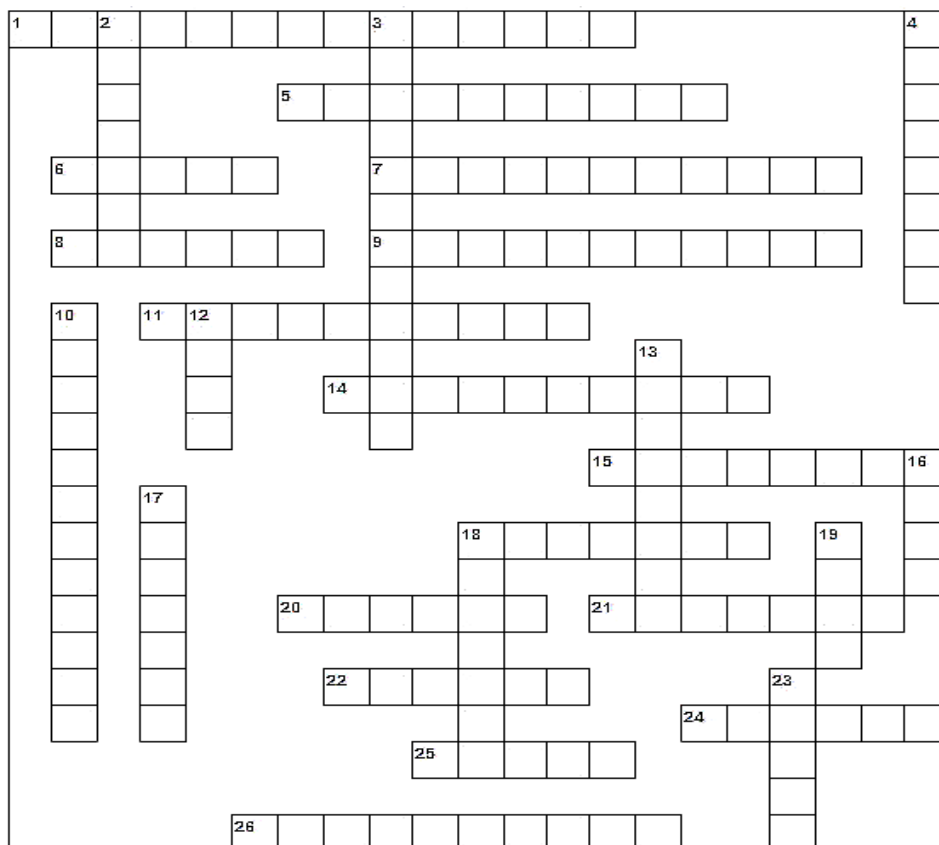
.....

.....

.....



## CRUCIGRAMA



### Horizontales:

1. Cambio de estado, de líquido a sólido.
5. Electrodoméstico, o parte de él, con el que podemos hacer cubitos de hielo.
6. Agua en estado sólido.
7. Vaporización lenta, sin alcanzar la ebullición.
8. Estado de la materia en el que las partículas están muy juntas y unidas unas con otras.
9. Nombre que puede indicar dos cambios de estado: de sólido a gaseoso, o al contrario, de gaseoso a sólido.
11. Según la Teoría Cinética, las pequeñas "cositas" de las que está hecha la materia.
14. Cuando hacemos que un gas junte sus partículas, disminuyendo su volumen.
15. Sustancia negra, líquida a temperatura ambiente, que por su elevado precio recibe el nombre de "oro negro". De esta sustancia se obtiene la gasolina.
18. La mantequilla cuando se derrite está...
20. Sustancia que venden en bombonas, en estado líquido, pero que cuando la dejamos salir se va convirtiendo en gas. Mucha gente la usa para cocinar.
21. Estado de la materia en el que las partículas están muy separadas y se mueven deprisa, con masa fija pero con volumen y forma variable.
22. Cambio de estado de sólido a líquido.
24. Vulgarmente hablando, poner una sustancia en ebullición.
25. Lo único variable de los líquidos.
26. Tipo de vaporización muy rápida, formando burbujas.

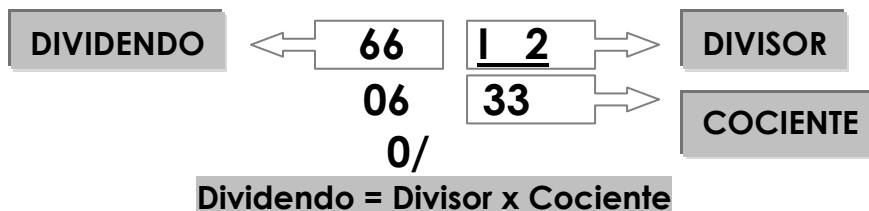
### Verticales:

2. Estado de la materia con masa y volumen fijos, pero con forma que varía según la forma del recipiente donde esté.
3. Cambio de estado de gaseoso a líquido. Por ejemplo, debido a este cambio se forma el rocío.
4. Masa dividida por volumen.
10. Cambio de estado de líquido a gaseoso. Si es rápido se llama ebullición, y si es lento recibe el nombre de evaporación.
12. Sustancia muy común en la naturaleza, que puede encontrarse en los tres estados.
13. Nombre de la Teoría que dice que la materia está formada por partículas que se hallan en continuo movimiento.
16. Percibir partículas del aire, en estado gaseoso, de cosas como alimentos, perfumes, etc.
17. La cantidad de espacio que ocupa un cuerpo material.
18. El queso de una pizza cuando se derrite.
19. La cantidad de materia de un cuerpo material. Se mide en gramos.
23. Unidad de medida de la masa. Mil de ellos son un kilogramo.

## Divisibilidad

### 3. ¿Qué son los múltiplos y divisores de número?

Recuerda que dividir significa repartir una cantidad en partes iguales. Si la división es exacta (o sea, si el resto es 0, no sobra nada) se cumple que:



**66 = 2 x 33**  
**66 = 66**

Pues para calcular los **múltiplos** de un número sólo tendremos que multiplicar ese número x 1, x 2, x 3, x 4, x 5, x 6..... Cada resultado será un múltiplo de ese número. Vamos a ver un ejemplo:

**Múltiplos de 3**  $\Rightarrow 3$  ( $3 \times 1$ )  
 $\Rightarrow 6$  ( $3 \times 2$ )  
 $\Rightarrow 9$  ( $3 \times 3$ )  
 $\Rightarrow \dots$

**Múltiplos de 4**  $\Rightarrow 4$  ( $4 \times 1$ )  
 $\Rightarrow 8$  ( $4 \times 2$ )  
 $\Rightarrow 12$  ( $4 \times 3$ )  
 $\Rightarrow \dots$

En el caso de los **divisores** es también muy sencillo. Son los números por el que se puede dividir un número de manera exacta:

**Divisores de 12**  $\Rightarrow 12$  ( $12 : 12 = 1$ )  
 $\Rightarrow 6$  ( $12 : 6 = 2$ )  
 $\Rightarrow 4$  ( $12 : 4 = 3$ )  
 $\Rightarrow 3$  ( $12 : 3 = 4$ )  
 $\Rightarrow 2$  ( $12 : 2 = 6$ )  
 $\Rightarrow 1$  ( $12 : 1 = 12$ )



5. Escribe cinco múltiplos de los siguientes números:

5  $\Rightarrow$

18  $\Rightarrow$

20  $\Rightarrow$

11  $\Rightarrow$

7  $\Rightarrow$

6. Escribe todos los divisores de los siguientes números:

8  $\Rightarrow$

18  $\Rightarrow$

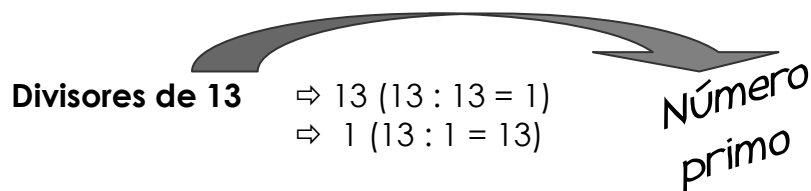
36  $\Rightarrow$

15  $\Rightarrow$

48  $\Rightarrow$

## ❑ ¿QUÉ SON LOS NÚMEROS PRIMOS?

Son aquellos números cuyos divisores son ellos mismos y el número uno:



Ejemplos: el 1, el 2, el 3, el 5, el 7, el 11, el 13, el 17...



### RECUERDA QUE...

Todos los números son divisibles por sí mismos y por el número 1.

7. En un supermercado solo se venden los yogures en bloques de 4 unidades. Escribe la sucesión formada por el número posible de yogures que se pueden comprar.

4, .....

8. ¿De cuántas formas podemos colocar en filas y columnas los 30 alumnos de una clase?

Filas	1							
Columnas	30							

## 4. ¿Cómo podemos descomponer un número?

También se le llama descomposición factorial. Se trata de dividir un número entre todos los números primos que se pueda y después expresarlos (los n<sup>os</sup> primos o factores) en forma de multiplicación.



### RECUERDA QUE...

Los números primos son aquellos que sólo tienen como divisores él mismo y el 1. Ejemplos:  
El 1, el 2, el 3, el 5, el 7, el 11, el 13, el 17...

Intentemos comprenderlo con un ejemplo:

Tenemos el número 24, que debemos factorizar. A su lado dibujamos una raya. A la derecha de la raya escribiremos el número primo por el que podemos dividirlo, y el resultado lo escribiremos en la parte izquierda. Con este resultado volveremos a hacer lo mismo hasta que tengamos como resultado el número 1, ya que no se puede descomponer más:



$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Una vez descompuesto el número, hay que describirlo. Ahora tenemos que expresar el número en factores primos. Se haría de la siguiente manera:

$$24 = 2^3 \times 3$$

9. Factoriza los siguientes números: 30, 56 y 72:

10. Factoriza los siguientes números:

$$18 =$$

$$36 =$$

$$54 =$$

$$95 =$$

$$125 =$$

$$72 =$$



RECUERDA QUE...

$$2^{10}$$

Potencia

Base

Las potencias expresan un número multiplicado por sí mismo, donde **la base es el número** y **el exponente** es el número de veces que se repite.



## 5. ¿Qué es el mínimo común múltiplo (mcm)?

Para comprender el mínimo común múltiplo es importante recordar y tener claros estos conceptos:



- ❑ **Exponente:** número que dice cuantas veces se multiplica otro número por sí mismo. Ej:  $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ .
- ❑ **Números primos:** son aquellos números que solo tienen como divisores él mismo y el 1.
- ❑ **Descomposición de un número:** descomponer un número expresándolo como una multiplicación de números primos. Ej:  $24 = 2^3 \times 3$ .



El **mínimo común múltiplo** (m.c.m.) de varios números es resultado de la multiplicación de los factores primos **comunes y no comunes** elevados al **mayor exponente** que aparecen en la descomposición factorial.

Vamos verlo mejor con un ejemplo: hallar el m.c.m de 18 y 20.

1. Descomponemos los números. Ej:

$$18 = 2 \times 3^2$$

18	2
9	3
3	3
1	

$$20 = 2^2 \times 5$$

20	2
10	2
5	5
1	



2. Señalamos los números que no se repitan en las descomposiciones, y de los que se repitan señalamos los mayores.

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$20 = 2^2 \times 5$$

3. Multiplicamos todos estos números y el resultado es el m.c.m.

$$\text{m.c.m.} = 3^2 \times 2^2 \times 5 = (3 \times 3) \times (2 \times 2) \times 5 = 9 \times 4 \times 5 = 180$$

11. Calcula el mínimo común múltiplo de:

a) 36 y 38



b) 55, 33 y 11

c) 45, 25, 60

## 6. ¿Qué es el Máximo Común Divisor (MCD)?



El **Máximo Común Divisor** (M.C.D) de varios números es la multiplicación de los factores primos **comunes a todos**, elevados cada uno al **menor** de los **exponentes** con que aparecen en su descomposición.

Vamos verlo con un ejemplo: hallar el M.C.D de 18 y 20.

1. Descomponemos los números. Ej:

$$18 = 2 \times 3^2$$

18	2
9	3
3	3
1	

$$20 = 2^2 \times 5$$

20	2
10	2
5	5
1	



2. Señalamos los números que se repitan en las descomposiciones, y de los que se repitan señalamos los más pequeños.

$$18 = \mathbf{2} \times 3^2$$
$$20 = 2^2 \times 5$$

3. Multiplicamos todos estos números y el resultado es el M.C.D

$$\text{M.C.D} = 2$$



12. Calcula el Máximo Común Divisor de:

a) 8 y 48

b) 30 y 45

c) 12 y 45

13. Una pareja que trabaja como ATS tiene guardias nocturnas. Él cada 8 días y ella cada 10. Si coinciden el 1 de enero haciendo guardia ¿cuánto tardarán en coincidir de nuevo?, ¿cuántas veces al año les toca guardia a la vez y tienen que contratar a una persona para que cuide a sus hijas?

14. Tenemos dos cuerdas, una de 12m. y la otra de 8m. ¿Cómo las dividiremos de modo que los trozos de una sean de igual longitud que los de otra y lo más largos posibles?



**RECUERDA QUE...** La forma de diferenciar los problemas de mínimo común múltiplo (m.c.m.) y de máximo común divisor (m.c.d) es que:

⇒ Si el problema busca **repetir o multiplicar** será un problema de **m.c.m.**

⇒ Si el problema busca **repartir o dividir** será un problema de **M.C.D.**

## Ejercicios de divisibilidad

### 3.1. - Múltiplos

Los múltiplos de un número se obtienen multiplicando ese número por 1, 2, 3, 4, 5, ..... es decir, por los números naturales.

Ejemplo: Los 4 primeros múltiplos de 3 son:

$$3 \cdot 1 = 3 \quad 3 \cdot 2 = 6 \quad 3 \cdot 3 = 9 \quad 3 \cdot 4 = 12$$

**3, 6, 9 y 12 son los 4 primeros múltiplos de 3**

### ACTIVIDADES

1.- Escribe los 5 primeros múltiplos de:

- a) 4
- b) 5
- c) 6

2.- Completa la tabla

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

3.- Observa la tabla anterior y contesta:

- a) 15 es múltiplo de 5 porque  $15 = 5 \cdot 3$
- b) 35 es múltiplo de 7 porque  $35 = \underline{\hspace{2cm}}$
- c)  $\underline{\hspace{2cm}}$  es múltiplo de 2 porque  $14 = \underline{\hspace{2cm}}$
- d) 30 es múltiplo de  $\underline{\hspace{2cm}}$  porque  $30 = 6 \cdot \underline{\hspace{2cm}}$

### 3.2. - Divisores.

Un número es divisor de otro cuando al dividir el primero entre el segundo la división es exacta.

Ejemplo:  $18 : 3 = 6$ ; El 3 es divisor de 18 porque al dividir 18 entre 3 la división es exacta.

Para calcular los divisores de un número lo dividimos entre todos los números naturales menores o igual que él. Aquellos con los que se obtenga una **división exacta**, son sus **divisores**.

Ejemplo:

$12 : 1 = 12$	resto 0	$12 : 5 = 2$	resto 2	$12 : 9 = 1$	resto 3
$12 : 2 = 6$	resto 0	$12 : 6 = 2$	resto 0	$12 : 10 = 1$	resto 2
$12 : 3 = 4$	resto 0	$12 : 7 = 1$	resto 5	$12 : 11 = 1$	resto 1
$12 : 4 = 3$	resto 0	$12 : 8 = 1$	resto 4	$12 : 12 = 1$	resto 0

Los divisores de 12 son : 1, 2, 3, 4, 6, 12

Observa que cada división exacta nos dice dos divisores: el divisor y el cociente.

#### ACTIVIDADES

4.- Fíjate en el ejemplo y responde verdadero (v) o falso (f) en las siguientes afirmaciones:

- a) 2 es divisor de 12 \_\_\_\_
- b) 4 y 3 son divisores de 12 \_\_\_\_
- c) Si 2 y 6 son divisores de 12, 12 es múltiplo de 2 y de 6 \_\_\_\_
- d) Si 12 es múltiplo de 4 y de 3, 4 y 3 son divisores de 12 \_\_\_\_
- e) El cociente de una división exacta es divisor del dividendo \_\_\_\_

5.- Calcula todos los divisores de:

- a) 36
- b) 40
- c) 48

### 3.3. - Divisibilidad. Criterios De Divisibilidad.

En una división exacta existe una relación especial entre el dividendo, el divisor y el cociente, así podemos afirmar:

- Que el divisor y el cociente son divisores del dividendo.
- Que el dividendo es múltiplo del divisor i del cociente.

A esta relación se le llama **divisibilidad**, un número es divisible por otro cuando al dividir el primero por el segundo la división es exacta.

Los **criterios de divisibilidad** son una serie de normas o reglas que nos ayudan a saber si un número es divisible por otro sin necesidad de realizar la división.



Un número es divisible por:

- 2 ----> Cuando acaba en 0 o en cifra par.
- 3 ----> Cuando la suma del valor absoluto de sus cifras es múltiplo de 3.
- 4 ----> Cuando sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 4 o son ceros.
- 5 ----> Cuando termina en 0 o en 5.
- 6 ----> Cuando también es divisible por 2 y por 3.
- 9 ----> Cuando la suma del valor absoluto de sus cifras es múltiplo de 9.
- 11 ----> Si la diferencia del valor absoluto de las cifras que ocupan posición par y las que ocupan lugar impar, es 0 o múltiplo de 11.
- 10, 100, 1000... ----> Si termina respectivamente en uno, dos o tres ceros....

### ACTIVIDADES

6.- Indica cuál de los siguientes números son divisibles por:

	Por 2	Por 3	Por 5	Por 6	Por 9	Por 11	Por 10
12							
18							
40							
84							
100							
1.732							
4.037							
5.670							
12.430							

### **3.4. - Números Primos Y Compuestos.**

Un número natural es **primo** si solo tiene como divisores el 1 y el propio número.

Un número natural es **compuesto** cuando tiene más de dos divisores.

El número 1 no es primo ni compuesto. Solo tiene un divisor.

Para saber si un número natural es primo se le aplican los criterios de divisibilidad conocidos de los números primos: 2, 3, 5, 7, 11.....

### ACTIVIDADES

7.- Fíjate en el modelo y completa la tabla con productos equivalentes.

60	$6 \cdot 10$	$2 \cdot 3 \cdot 10$	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2$
40			
	$4 \cdot 8$	$2 \cdot 2 \cdot 8$	
36			
	$\cdot 5$	$2 \cdot 4 \cdot 5$	
	$25 \cdot 4$		
			$3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$
			$2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

### 3.5. - Escribir Un Número Como Producto De Factores Primos.

Los números naturales compuestos, se pueden expresar como productos de potencias de números primos, a dicha expresión se le llama **Descomposición de un número en factores primos**.

Para ello, se divide el número y los sucesivos cocientes por los números primos, siempre de menor a mayor, hasta que el cociente de la última división sea 1.

$$60 : 2 = 30 \text{ ---> } 60 \text{ es divisible por } 2 \text{ y el cociente es } 30$$

$$30 : 2 = 15 \text{ ---> } 30 \text{ es divisible por } 2 \text{ y el cociente es } 15$$

$$15 : 3 = 5 \text{ ---> } 15 \text{ es divisible por } 3 \text{ y el cociente es } 5$$

$$5 : 5 = 1 \text{ ---> } 5 \text{ es divisible por } 5 \text{ y el cociente es } 1$$

60		2	$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
30		2	
15		3	
5		5	
1			

## ACTIVIDADES

8.- Calcula la descomposición en factores primos de los siguientes números y exprésalos en forma de producto.

84	—	36	—	276	—	180	—
42	2	18	—	138	2	90	2
—	3	9	—	69	3	—	3
7	—	3	—	—	23	—	3
—	—	—	—	—	—	—	5
—	—	—	—	—	—	—	—
84 =	—	36 =	—	276 =	—	180 =	—

9.- Descompón en factores primos los siguientes números:

120	42	90	75
—	—	—	—
—	—	—	—
—	—	—	—
—	—	—	—

### 3.6.- Máximo Común Divisor.

El **máximo común divisor** de varios números es el mayor de sus divisores comunes. Se expresa por **m.c.d.**

Ejemplo:

Averigua el m.c.d. de 16 y 24.

Divisores de 16: 1, 2, 4, 8, 16

Divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Los divisores comunes de 16 y 24 son: 1, 2, 4, 8. Como el 8 es el mayor, **8 es el m.c.d.**

**Para calcular el m.c.d. de varios números:**

1º - Se descomponen los números en factores primos.

2º - El m.c.d. es igual al producto de los factores primos comunes, elevados al menor exponente.

Ejemplo:

Calcula el m.c.d. de 56 y 84.

$$56 = 2^3 \cdot 7$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\text{m.c.d. (56 y 84)} = 2^2 \cdot 7 = 4 \cdot 7 = 28$$

### ACTIVIDADES

10.- Calcula el máximo común divisor de las siguientes parejas de números:

- a) 60 y 12                      b) 12 y 18                      c) 90 y 120                      d) 20 y 30

### **3.7.- Mínimo Común Múltiplo.**

El **mínimo común múltiplo** de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes. Se expresa **m.c.m.**

Ejemplo:

Averigua el m.c.m. de 6 y de 8.

Múltiplos de 6: 6, 12, 18, **24**, 30, 36, 42, **48**, 54, .....

Múltiplos de 8: 8, 16, **24**, 32, 40, **48**, 56, 64, 72, ....

Los múltiplos comunes de 6 y de 8 son: 24, 48, 72, ...

¿Cuál es el menor? ----> **24 es el m.c.m. de 6 y de 8.**

**Para calcular el m.c.m. de dos o más números:**

1º - Se descomponen los números en factores primos.

2º - El **mínimo común múltiplo (m.c.m.)** es igual al producto de los factores primos comunes y no comunes, elevados al mayor exponente.

Ejemplo:

Calcula el m.c.m. de 12 y 18.

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de 12 y 18 =  $2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$

### ACTIVIDADES

11.- Calcula el m.c.m. de:

- a) 12, 15 y 24                      b) 14 y 36                      c) 6 y 20                      d) 6, 9 y 12

# Números Primos del 1 al 100

Los Números Primos son números enteros que solo se dividen 2 veces, entre ellos mismos y 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

\* Los números primos son los marcados en gris

